घातांक एवं घात

8
CHAPTER

सूची

- घातांक
- ऋणात्मक पूर्णांकों के घातांक
- घातांक के नियम
- बड़ी संख्याओं को व्यक्त करने में घातांक का उपयोग

➤ घातांक

संख्याओं के पुनरावर्त (बार-बार) योग को लघुरूप (गुणन रूप) में लिखा जा सकता है।

उदाहरणार्थ :

क्रमांक	कथन	पुनरावर्त योग	गुणन रूप
(i)	4 बार 2	2 + 2 + 2 + 2	4 × 2
(ii)	5 बार – 1	(–1) + (–1) + (–1) + (–1) + (–1)	5 × (–1)
(iii)	3 बार $\frac{-2}{3}$	$\left(\frac{-2}{3}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)$	$3\times\left(\frac{-2}{3}\right)$
(iv)	2 बार 1	1 + 1	2 × 1

संख्याओं के पुनरावर्त गुणन को भी हम लघु रूप में लिख सकते है जिसे घातांक रूप के द्वारा जाना जाता है।

उदाहरण के लिए, जब 5 को स्वयं से दो बार गुणा किया जाता है, तो हम गुणनफल 5 × 5 को घातांक रूप में 5^2 द्वारा लिखते है जिसको "5 की घात दो'' पढ़ते है।

इसी प्रकार, यदि हम 5 को स्वयं से 6 बार गुणा करे तो गुणनफल 5 × 5 × 5 × 5 × 5 × 5 को घातांक रूप में 5^6 के द्वारा लिखते है जिसको "5 की घात 6" पढ़ते है।

5^6 में, संख्या 5 **आधार** कहलाता है तथा 6 आधार का **घातांक** कहलाता है।

व्यापक रूप में,

एक घातांक संख्या को हम b^a के रूप में लिखते है, जहाँ b आधार है तथा a घातांक है।

किसी संख्या को स्वयं से कई बार गुणा कर लिखने का संकेतन घातांकीय संकेतन या घात संकेतन कहलाता है।

इस प्रकार, व्यापक रूप में हम पाते है कि :

यदि 'a' एक परिमेय संख्या है, तो 'a' का स्वयं से 'n' बार गुणनफल इस प्रकार दिया जाता है कि a × a × a × a ....., n बार तथा इसे a^n के द्वारा व्यक्त करते है जहाँ 'a', a^n का आधार कहलाता है तथा n, a^n का घातांक कहलाता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 निम्नलिखित कथनों को पुनरावर्त गुणन के रूप में लिखो तथा सारणी को पूरा करो :

क्रमांक	कथन	पुनरावर्त गुणन	लघु रूप
(i)	3 को 3 से 6 बार गुणा	3 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3 = 729	3^6
(ii)	2 को 2 से 3 बार गुणा	2 × 2 × 2	2^3
(iii)	1 को 1 से 7 बार गुणा	1 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1	1^7

Ex.2 निम्नलिखित संख्याओं के आधार तथा घातांक लिखो तथा विस्तारित रूप में भी लिखो :

क्रमांक	संख्याएं	आधार	घातांक	विस्तारित रूप	मान
(i)	3^4	3	4	3 × 3 × 3 × 3	81
(ii)	2^5	2	5	2×2×2×2×2	32

(iii)	3^3	3	3	3 × 3 × 3	27
(iv)	2^2	2	2	2 × 2	4
(v)	1^7	1	7	1 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1	1

➤ ऋणात्मक पूर्णांकों के घातांक

जब एक ऋणात्मक पूर्णांक का घातांक विषम है, तो परिणाम एक ऋणात्मक संख्या होगी तथा जब एक ऋणात्मक पूर्णांक का घातांक सम है, तो परिणाम एक धनात्मक संख्या होगी या

$(\text{एक ऋणात्मक पूर्णांक})^{\text{एक विषम संख्या}}$ = एक ऋणात्मक पूर्णांक

$(\text{एक ऋणात्मक पूर्णांक})^{\text{एक सम संख्या}}$ = एक धनात्मक संख्या

❖ उदाहरण ❖

Ex.3 144 को अभाज्य गुणनखण्ड़ों की घातों के रूप में व्यक्त करो।

Sol. $144 = 16 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

यहाँ 144 प्राप्त करने के लिए 2 को चार बार तथा 3 को 2 बार गुणा करते है।

$\therefore \quad 144 = 2^4 \times 3^2$

Ex.4 कौनसा बड़ा है : 3^5 या 5^3 ?

Sol. $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9 \times 3$

$= 81 \times 3 = 243$

तथा $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 25 \times 5 = 125$

स्पष्टतया, $243 > 125 \quad \therefore \quad 3^5 > 5^3$

➤ घातांक के नियम

नियम-1 :

यदि a कोई अशूनय पूर्णांक है तथा m एवं n पूर्ण संख्याएँ हैं, तब $a^m \times a^n = a^{m+n}$

उदाहरण **:**

(i) $3^4 \times 3^2 = \underbrace{(3\times3\times3\times3)}_{3 \text{ का स्वयं से } 4 \text{ बार गुणा}} \times \underbrace{(3\times3)}_{3 \text{ का स्वयं से } 2 \text{ बार गुणा}}$

$= \underbrace{3\times3\times3\times3\times3\times3}_{3 \text{ का स्वयं से } 6 \text{ बार गुणा}} = 3^6 = 3^{4+2}$

इस प्रकार, $3^4 \times 3^2 = 3^{4+2}$

(ii) $2^3 \times 2^5 = \underbrace{(2\times2\times2)}_{2 \text{ का स्वयं से } 3 \text{ बार गुणा}} \times \underbrace{(2\times2\times2\times2\times2)}_{2 \text{ का स्वयं से } 5 \text{ बार गुणा}}$

$= \underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{2 \text{ का स्वयं से } 8 \text{ बार गुणा}}$

$= 2^8 = 2^{3+5}$

इस प्रकार, $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5}$

अतः, व्यापक रूप में हम लिखते हैं,

$a^m \times a^n = \underbrace{(a\times a\times a\times a\times\ldots)}_{a \text{ का स्वयं से } m \text{ बार गुणा}} \times \underbrace{(a\times a\times a\times a\times\ldots)}_{a \text{ का स्वयं से } n \text{ बार गुणा}}$

$= a \times a \times a \times a \times a \times \ldots, (m + n)$ बार $= a^{m+n}$

नियम-2 :

यदि a एवं b अशून्य पूर्णांक हैं तथा m एक धनात्मक पूर्णांक है, तब

$a^m \times b^m = (a \times b)^m$

उदाहरण **:**

$5^3 \times 3^3 = (5 \times 5 \times 5) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= (5 \times 3) \times (5 \times 3) \times (5 \times 3)$

$= 15 \times 15 \times 15 = (15)^3$

अतः $5^3 \times 3^3 = (5 \times 3)^3 = (15)^3$

यहाँ, हम पाते है कि 15, आधार 5 एवं 3 का गुणनफल है।

यदि a एवं b अशुन्य पूर्णांक है, तब

$a^5 \times b^5 = (a \times a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b \times b)$

$= (a \times b)\,(a \times b)\,(a \times b)\,(a \times b)\,(a \times b) = (ab)^5$

Ex.5 घातांक रूप में लिखो :

(i) $(5 \times 7)^6$ (ii) $(-7n)^5$

Sol. (i) $(5 \times 7)^6$

$= (5 \times 7)\,(5 \times 7)\,(5 \times 7)\,(5 \times 7)\,(5 \times 7)\,(5 \times 7)$

$= (5\times5\times5\times5\times5\times5)(7\times7\times7\times7\times7\times7) = 5^6\times7^6$

फलतः , $(5 \times 7)^6 = 5^6 \times 7^6$

(ii) $(-7n)^5 = (-7n)\,(-7n)\,(-7n)\,(-7n)\,(-7n)$

$= (-7\times-7\times-7\times-7\times-7)(n\times n\times n\times n\times n)$

$= (-7)^5 \times (n)^5$

नियम-3 :

यदि a एक अशून्य पूर्णांक है तथा m एवं n दो पूर्ण संख्याए इस प्रकार है कि m > n तब $a^m \div a^n = a^{m-n}$

तथा m < n के लिए

$$a^m \div a^n = (a)^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

उदाहरण के लिए, $2^5 \div 2^7 = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}$

$$= \frac{1}{2\times2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{7-5}}$$

जब एक घातांक रूप को दूसरे घातांक रूप से विभाजित किया जाता है जिनके आधार समान है, तब परिणाम समान आधार का घातांक रूप होगा परन्तु घातांक भाज्य के घातांक से भाजक के घातांक का अन्तर होगा।

नियम-4 :

समान घातांक तथा अलग–अलग आधार के घातांक रूपो का भाग :

यदि a एवं b कोई दो अशून्य पूर्णांक है जो समान घातांक m रखते है, तब $a^m \div b^m$ के लिए, हम लिखते है

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{a\times a\times a\times\ldots, m \text{ बार}}{b\times b\times b\times\ldots, m \text{ बार}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\ldots, m \text{ बार} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

उदाहरण के लिए,

(i) $2^6 \div 3^6 = \frac{2^6}{3^6} = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3\times3\times3}$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

फलतः , $2^6 \div 3^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

(ii) $(-2)^4 \div b^4 = \frac{(-2)^4}{b^4}$

$$= \frac{-2\times-2\times-2\times-2}{b\times b\times b\times b}$$

$$= \frac{-2}{b}\times\frac{-2}{b}\times\frac{-2}{b}\times\frac{-2}{b} = \left(-\frac{2}{b}\right)^4$$

फलतः, $(-2)^4 \div b^4 = \left(-\frac{2}{b}\right)^4$

Ex.6 निम्नलिखित को विस्तारित रूप में लिखो :

(i) $\left(-\frac{7}{9}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^6$

Sol. (i) $\left(-\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{-7}{9}\times\frac{-7}{9}\times\frac{-7}{9}$

$$= \frac{-7\times-7\times-7}{9\times9\times9} = \frac{(-7)^3}{9^3}$$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^6 = \frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}$

$$= \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{8\times8\times8\times8\times8\times8} = \frac{5^6}{8^6}$$

नियम-5 :

यदि 'a' कोई अशून्य संख्या है तथा m एवं n कोई दो धनात्मक पूर्णांक है, तब

$$[(a)^m]^n = a^{mn}$$

उदाहरण :

$(2^2)^3 = 2^2\times2^2\times2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 2^{2\times3}$

$(2^7)^2 = 2^7\times2^7 = 2^{7+7} = 2^{14} = 2^{7\times2}$

नियम-6 :

शून्य घातांक का नियम

हम जानते है कि

$$2^6 \div 2^6 = \frac{2^6}{2^6} = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2} = 1$$

घातांक के नियम-3 के उपयोग से, हम पाते है कि

$2^6 \div 2^6 = 2^{6-6} = 2^0$

इस प्रकार, $2^0 = 1$

व्यापक रूप में, $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$ तथा

$$\frac{a^m}{a^m} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a \times ....,m \text{ बार}}{a \times a \times a \times a \times a \times a \times ....,m \text{ बार}} = 1$$

फलतः, $\boxed{a^0 = 1}$

∴ कोई भी अशून्य पूर्णांक जिसकी घात 0 है, का मान हमेशा 1 होता है

Ex.7 निम्न का मान ज्ञात करो :

(i) $(3^0 - 2^0) \times 5^0$ (ii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$

(iii) $(6^0 - 2^0) \times (6^0 + 2^0)$

Sol. (i) यहाँ, $(3^0 - 2^0) \times 5^0$

$\therefore (1 - 1) \times 1 = 0 \times 1 = 0$ [$\because 3^0 = 1, 2^0 = 1$]

(ii) यहाँ, $2^0 \times 3^0 \times 4^0 = (1 \times 1 \times 1) = 1$

(iii) यहाँ, $(6^0 - 2^0) \times (6^0 + 2^0)$

$= (1 - 1) \times (1 + 1)$

$= 0 \times 2 = 0.$

➤ बड़ी संख्याओ को व्यक्त करने में घातांको का उपयोग

हम जानते है कि

$100 = 10 \times 10 = 10^2$,

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$,

$10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

किसी संख्या के पीछे बड़ी संख्या में आने वाले शून्यों को हम 10 की घात के रूप में लिख सकते हैं।

उदाहरणार्थ : हम लिख सकते हैं कि निर्वात में प्रकाश का वेग = 300,000,000 m/s

$= 3 \times 1,00,000,000$ m/s $= 3 \times 10^8$ m/s

$= 30 \times 10^7$ m/s $= 300 \times 10^6$ m/s

इसी प्रकार,

ब्रह्माण्ड की आयु = 8,000,000,000 वर्ष (लगभग)

$= 8 \times 10^9$ वर्ष (लगभग)

ब्रह्माण्ड की आयु को हम 80×10^8 वर्ष या 800×10^7 वर्ष आदि से भी व्यक्त कर सकते है।

परन्तु सामान्यतः 10 की घात के पूर्व वाली संख्या 10 से छोटी होनी चाहिए। ऐसा संकेतन **मानक या वैज्ञानिक संकेतन** कहलाता है।

अतः 8×10^9 वर्ष ब्रह्माण्ड की आयु का मानक रूप है।

इसी प्रकार, प्रकाश के वेग का मानक रूप 3×10^8 m/s है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.8 निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में लिखिए ?

(i) 4340000 (ii) 173000

(iii) 140000

Sol. (i) यह स्पष्ट है कि $4340000 = 434 \times 10000$

तथा $4340000 = 4.34 \times 10^6$

$\because 434 = 4.34 \times 100 = 4.34 \times 10^2$

(ii) $173000 = 1.73 \times 10^5$

(iii) $140000 = 1.4 \times 10^5$

Ex.9 निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 980000000

(ii) 602000000000000000000000

Sol. हम जानते है,

(i) $980000000 = 9.8 \times 10^8$

(ii) 602000000000000000000000

$= 6.02 \times 10^{23}$

Ex.10 निम्नलिखित संख्याओं को सामान्य रूप मे लिखो :

(i) 1.001×10^9 (ii) 6.678×10^8

Sol. (i) $1.001 \times 10^9 = 1001000000$

(ii) $6.678 \times 10^8 = 667800000$

Ex.11 निम्नलिखित कथनो में उपस्थित संख्या को $K \times 10^n$ के रूप में लिखो जहाँ $1 < K < 10$ तथा n एक पूर्णांक है।

(i) भारत की राजधानी में प्रतिदिन लगभग 1050000 kg प्रदूषक उत्सर्जित होता है।

(ii) पृथ्वी लगभग 1,353000000 घन किमी. समुद्री जल रखती है तथा यह समुद्री जल लगभग 1,361000,000 kg सोना रखता है।

Sol. (i) यहाँ $1050000 = 105 \times 10^4 = 10.5 \times 10^5$

$= 1.05 \times 10^6$

(ii) यहाँ 1,353,000,000 $= 1,353 \times 10^6$

$= 135.3 \times 10^7$

$= 13.53 \times 10^8$

$= 1.353 \times 10^9$

तथा 1,361,000,000 $= 1,361 \times 10^6$

$= 136.1 \times 10^7$

$= 13.61 \times 10^8$

$= 1.361 \times 10^9$

Ex.12 निम्नलिखित संख्याओं को सामान्य रूप में लिखो :

(i) 3.49×10^4 (ii) 1.11×10^6

Sol. (i) $3.49 \times 10^4 = 34900$

(ii) $1.11 \times 10^6 = 1110000$

Ex.13 निम्नलिखित संख्या को $K \times 10^n$ के रूप में लिखो, जहाँ K एक संख्या है तथा n एक पूर्णांक है : 4176300000

Sol. हम 4176300000 को 41763×10^5 के रूप में लिख सकते है।

या 4176.3×10^6 या 417.63×10^7

या 41.763×10^8 या 4.1763×10^9

Ex.14 128 को 2 की घात के रूप में लिखो तथा इसका आधार एवं घातांक भी लिखो।

Sol.

2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अर्थात् $128 = 2^7$

2^7 में, आधार = 2

घातांक (घात) = 7

Ex.15 625 को 5 की घात के रूप में व्यक्त करो तथा इसका आधार एवं घातांक भी लिखो।

Sol.

5	625
5	125
5	25
5	5
	1

$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$

अर्थात्, $625 = 5^4$

5^4 में, आधार = 5,

घातांक = 4

Ex.16 कौनसा छोटा है : 5^2 या 2^5 ?

Sol. $5^2 = 5 \times 5 = 25$

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$5^2 < 2^5$ $(\because \ 25 < 32)$

Ex.17 कौनसा बड़ा है : 2^7 या 7^2 ?

Sol. $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128.$

$7^2 = 7 \times 7 = 49 \Rightarrow 2^7 > 7^2$

Ex.18 y^3x^2, y^2x^3, x^2y^3, x^3y^2 का प्रसार कीजिए। क्या वे समान है?

Sol. $y^3x^2 = y \times y \times y \times x \times x$

$y^2x^3 = y \times y \times x \times x \times x$

$x^2y^3 = x \times x \times y \times y \times y$

$x^3y^2 = x \times x \times x \times y \times y$

x^3y^2 तथा x^2y^3 की स्थिति में x एवं y की घात अलग-अलग है। अतः x^3y^2 तथा x^2y^2 अलग–अलग है।

अन्य रूप में x^3y^2 तथा y^2x^3 समान है चूंकि इन दो पदों में x एवं y की घाते समान है। गुणनखण्ड़ो का क्रम महत्व नहीं रखता है।

$x^3y^2 = x^3 \times y^2 = y^2 \times x^3 = y^2x^3.$

इसी प्रकार, x^2y^3 तथा y^3x^2 समान है।

Ex.19 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्ड़ो की घातो के गुणनफल के रूप में व्यक्त करो :

(i) 27 (ii) 512 (iii) 343

(iv) 729 (v) 3125

Sol. (i) $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3 \Rightarrow 27 = 3^3$

(ii) $512 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$

$\Rightarrow\ 512 = 2^8$

(iii) $343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3 \Rightarrow 343 = 7^3$

(iv) $729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

$\Rightarrow\ 729 = 3^6$

(v) $3125 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$

$\Rightarrow\ 3125 = 5^5$

Ex.20 सरल करो :

(i) $(-4)^3$ (ii) $-3 \times (-2)^3$

(iii) $(-4)^2 \times (-5)^2$ (iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

Sol. (i) $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = 64$

$= 4 \times 4 \times 4 \times (-1)^3$

($\because$ $(-1)^{\text{विषम संख्या}}$ = ऋणात्मक)

(ii) $-3 \times (-2)^3 = (-3) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

$= 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times (-1)^4$

$= 24 \times 1$

($\because$ $(-1)^{\text{सम संख्या}}$ = धनात्मक)

$= 24$

(iii) $(-4)^2 \times (-5)^2 = (-4) \times (-4) \times (-5) \times (-5)$

$= 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times (-1)^4$

$= 16 \times 25 \times 1 = 400$

(iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

$= (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-10) \times (-10) \times (-10)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 10 \times 10 \times 10 \times (-1)^6 = 8000$

Ex.21 तुलना करो : 3.7×10^{12}, 2.5×10^8.

Sol. $3.7 \times 10^{12} = 3.7 \times 1000000000000$

$= 3700000000000$

$2.5 \times 10^8 = 2.5 \times 100000000$

$= 25 \times 10000000$

$3.7 \times 10^{12} > 2.5 \times 10^8$

($\because$ 10^{12} का स्थानीय मान 10^8 के स्थानीय मान से अधिक है)

Ex.22 गणना करो : $3^2 \times 3^4$.

Sol. $3^2 \times 3^4 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3^6 = 3^{2+4}$

Ex.23 गणना करो : $(-2)^3 \times (-2)^4$.

Sol. $(-2)^3 \times (-2)^4$

$= (-2 \times -2 \times -2) \times (-2 \times -2 \times -2 \times -2)$

$= (-2)^7 = (-2)^{3+4}$.

Ex.24 मान ज्ञात करो : $4^8 \div 4^3$

Sol. $4^8 \div 4^3 = \dfrac{4^8}{4^3} = \dfrac{4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4}{4\times4\times4}$

$= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 4^{8-3}$

Ex.25 मान ज्ञात करो : $(4^2)^3$, $(2^4)^3$.

Sol.

$(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$

$= 4^{2+2+2}$

$= 4^6$

($\because$ $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$)

$(4^2)^3 = 4^{2\times3}$

&

$(2^4)^3 = 2^4 \times 2^4 \times 2^4$

$= 2^{4+4+4}$

$= 2^{12}$

($\because$ $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$)

$(2^4)^3 = 2^{4\times3}$.

Ex.26 मान ज्ञात करो : $(3^2 \times 4^2)$

Sol. $3^2 \times 4^2 = 3 \times 3 \times 4 \times 4$

$= (3 \times 4) \times (3 \times 4)$

$= 12 \times 12 = 12^2$

Ex.27 मान ज्ञात करो : $(5^3 \times 2^3)$

Sol. $5^3 \times 2^3 = 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2$

$= 10 \times 10 \times 10$

$\therefore\ 5^3 \times 2^3 = 10^3$

Ex.28 मान ज्ञात करो : $\dfrac{3^2}{4^2}, \dfrac{4^4}{7^5}$.

Sol. $\dfrac{3^2}{4^2} = \dfrac{3\times3}{4\times4} = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

$\dfrac{4^5}{7^5} = \dfrac{4\times4\times4\times4\times4}{7\times7\times7\times7\times7} = \left(\dfrac{4}{7}\right)^5$

Ex.29 मान ज्ञात करो : $\frac{x^3}{y^3}$.

Sol. $\frac{x^3}{y^3} = \frac{x \times x \times x}{y \times y \times y} = \left(\frac{x}{y}\right) \times \left(\frac{x}{y}\right) \times \left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^3$

Ex.30 $\frac{4^3}{4^3}$ का मान ज्ञात करो।

Sol. **प्रथम विधि :** $\frac{4^3}{4^3} = \frac{4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = 1$

द्वितीय विधि : घातांक के नियमो के उपयोग से

$\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3}$ $(\because a^m \div a^n = a^{m-n})$

$= 4^0 = 1.$

Ex.31 $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$ को आधार 3 के घातांक रूप में लिखो।

Sol. यहाँ, $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$

$= (3 \times 3)^5$ $(\because 9 = 3 \times 3)$

$(\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

$= (3^2)^5$

$= 3^{2\times5} = 3^{10}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

Ex.32 घातांको के नियमो के उपयोग से, सरल कीजिए तथा घातांक रूप में उत्तर लिखिए :

(i) $2^3 \times 2^4 \times 2^7$ (ii) $4^{13} \div 4^8$

(iii) $5^2 \times 2^2$ (iv) $x^3 \times x^2$

(v) $6^x \times 6^2$ (vi) $(5^2)^3 \div 5^3$

(vii) $(3^4)^3$ (viii) $(2^{20} \div 2^{15}) \times 2^3$

(ix) $8^x \div 8^2$ (x) $a^5 \times b^5$

Sol. (i) $2^3 \times 2^4 \times 2^7 = 2^{3+4+7} = 2^{14}$

$(\because a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p})$

(ii) $4^{13} \div 4^8 = 4^{13-8} = 4^5 = (2^2)^5$

$= 2^{2\times5} = 2^{10}$

$(\because a^m \times a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn})$

(iii) $5^2 \times 2^2 = (5 \times 2)^2 = 10^2$

$(\because a^m \times b^m = (a \times b)^m)$

(iv) $x^3 \times x^2 = x^{3+2} = x^5$ $(\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

(v) $6^x \times 6^2 = 6^{x+2}$ $(\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

(vi) $(5^2)^3 \div 5^3 = 5^{2\times3} \div 5^3$

$= 5^6 \div 5^3$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$= 5^{6-3}$

$= 5^3$

(vii) $(3^4)^3 = 3^{4\times3} = 3^{12}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

(viii) $(2^{20} \div 2^{15}) \times 2^3 = (2^{20-15}) \times 2^3$

$(\because a^m \div a^n = a^{m-n})$

$= 2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

(ix) $8^x \div 8^2 = 8^{x-2}$ $(\because a^m \div a^n = a^{m-n})$

(x) $a^5 \times b^5 = (a \times b)^5$

Ex.33 बताईए सत्य है या असत्य तथा अपने उत्तर का तर्क दीजिए :

(i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$

(ii) $2^3 > 5^2$

(iii) $6^0 = (400)^0$

Sol. (i) $10 \times 10^{11} = 10^1 \times 10^{11}$

$= 10^{1+11}$ $(\because a^m \times a^n = a^{m+n})$

$\therefore$ $10 \times 10^{11} = 10^{12}$

तथा $100^{11} = (10 \times 10)^{11}$

$= (10^2)^{11} = 10^{2\times11}$

$\therefore$ $100^{11} = 10^{22}$

अत: $10 \times 10^{11} = 100^{11} \rightarrow$ असत्य

$(\because 10^{12} \neq 10^{22})$

(ii) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$5^2 = 5 \times 5 = 25.$

$2^3 = 5^2 \rightarrow$ असत्य $(\because 8 \neq 25)$

(iii) $6^0 = 1$ $(\because a^0 = 1)$

तथा $(400)^0 = 1$

$6^0 = 400^0 \rightarrow$ सत्य $(\because 1 = 1)$

Ex.34 निम्नलिखित को प्रत्येक को केवल अभाज्य गुणनखण्ड़ो के गुणनफल के घातांक रूप में व्यक्त करो :

(i) 729×64 (ii) 270

(iii) 108 × 192 (iv) 512 × 216

Sol. (i) 729 × 64

$= (3\times3\times3\times3\times3\times3)\times(2\times2\times2\times2\times2\times2)$

$(\because\ 729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$729 \times 64 = 3^6 \times 2^6 = (3 \times 2)^6 = 6^6$

$279 \times 64 = 3^6 \times 2^6 = (3 \times 2)^6 = 6^6$

(ii)

2	270
3	135
3	45
3	15
5	5
	1

$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

$270 = 2 \times 3^3 \times 5$

(iii)

2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

2	192
2	96
2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$108 \times 192 = (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3)$

$= (2^2 \times 3^3) \times (2^6 \times 3)$

$= 2^{2+6} \times 3^{3+1}$

$= 2^2 \times 2^6 \times 3^3 \times 3 = 2^8 \times 3^4$

(iv)

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

$512 \times 216 = (2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2^9 \times 2^3 \times 3^3$

$= 2^{9+3} \times 3^3$

$= 2^{12} \times 3^3$

Ex.35 सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{(2^5)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times x^8}{10^3 \times x^4}$

(iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$ (iv) $\dfrac{4^7 \times 3^4}{4^4 \times 4^3 \times (3^2)^2}$

Sol. (i) $\dfrac{(2^5)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7} = \dfrac{2^{5\times2} \times 7^3}{(2^3)^3 \times 7}$ $[\because\ (a^m)^n = a^{mn}]$

$= \dfrac{2^{10} \times 7^3}{2^9 \times 7}$

$= 2^{10-9} \times 7^{3-1}$ $(\because\ a^m \div a^n = a^{m-n})$

$= 2^1 \times 7^2$

$= 2 \times 49$

$= 98$

(ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times x^8}{10^3 \times x^4} = \dfrac{5^2 \times 5^2 \times x^8}{(5 \times 2)^3 \times x^4}$

$= \dfrac{5^2 \times 5^2 \times x^8}{5^3 \times 2^3 \times x^4}$ $[\because (a \times b)^m = a^m \times b^m]$

$= \dfrac{5^4 \times x^8}{5^3 \times 2^3 \times x^4}$

$= \dfrac{5^{4-3} \times x^{8-4}}{2^3}$ $(\because\ a^m \div a^n = a^{m-n})$

$= \dfrac{5 \times x^4}{2^3} = \dfrac{5}{8} x^4$

(iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5} = \dfrac{3^5 \times (5 \times 2)^5 \times 5^2}{5^7 \times (3 \times 2)^5}$

$[\because\ (a \times b)^m = a^m \times b^m]$

$= \dfrac{3^5 \times 5^5 \times 2^5 \times 5^2}{5^7 \times 3^5 \times 2^5}$ $(\because\ a^m \div b^n = a^{m-n})$

$= 3^{5-5} \times 5^{5+2-7} \times 2^{5-5}$ ($\because$ $a^0 = 1$)

$= 1 \times 1 \times 1 = 1$

(iv) $\dfrac{4^7 \times 3^4}{4^4 \times 4^3 \times (3^2)^2}$

$= \dfrac{4^7 \times 3^4}{4^4 \times 4^3 \times 3^{2\times 2}}$ [$\because$ $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= \dfrac{4^7 \times 3^4}{4^7 \times 3^4}$ ($\because$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$)

$= 4^{7-7} \times 3^{4-4}$

$= 4^0 \times 3^0$

$= 1 \times 1 = 1$ ($\because$ $a^0 = 1$)

Ex.36 निम्नलिखित को प्रत्येक को सरल करो तथा घातांक रूप में व्यक्त करो :

(i) $25^4 \div 5^3$

(ii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$

(iii) $2^0 + 3^0 + 4^0$

(iv) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$

(v) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$

Sol. (i) $25^4 \div 5^3$ $= (5^2)^4 \div 5^3$

$= 5^8 \div 5^3$ ($\because$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$)

$= (5)^{8-3} = 5^5$.

(ii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ $= 1 \times 1 \times 1$ ($\because$ $a^0 = 1$)

$= 1$

(iii) $2^0 + 3^0 + 4^0$ $= 1 + 1 + 1$ ($\because$ $a^0 = 1$)

$= 3$

(iv) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3} = \dfrac{2^8 \times a^5}{(2^2)^3 \times a^3} = \dfrac{2^8 \times a^5}{2^6 \times a^3}$ [$\because$ $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= 2^{8-6} \times a^{5-3}$ ($\because$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$)

$= 2^2 \times a^2 = (2 \times a)^2 = (2a)^2$

(v) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$

$= (1 + 1) \times 1$ ($\because$ $a^0 = 1$)

$= 2 \times 1$

Ex.37 निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करो:

(i) 35794.8 (ii) 78,640

(iii) 2,160,000 (iv) 60,090,000,000,000

Sol. (i) चार अकों से स्थानान्तरित करना है अतः 10000 से गुणा करने पर

$35794.8 = 3.57948 \times 10000$

$= 3.57948 \times 10^4$.

(ii) 78,640 = 78640.0

$= 78640 \times 10000 = 7.864 \times 10^4$

(iii) 2,160,000 = 2160000.0

$= 2.160,000 \times 10^6 = 2.16 \times 10^6$

(iv) 60,090,000,000,000

= 60,090,000,000,000.0

$= 6.0090,000,000,000 \times 10^{13}$

$= 6.009 \times 10^{13}$.

Ex.38 निम्नलिखित संख्याओं को घातांक का उपयोग कर विस्तारित रूप में लिखो :

(i) 279404 (ii) 3006194 (iii) 20068

Sol. (i) $279404 = 2 \times 100000 + 7 \times 10000 + 9 \times 1000 + 4 \times 100 + 00 + 4 \times 1$

$= 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 4 \times 10^0$

(ii) 3006194

$= 3 \times 1000000 + 0 \times 100000 + 0 \times 10000 + 6 \times 1000 + 1 \times 100 + 9 \times 10 + 4 \times 1$

$= 3 \times 10^6 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

(iii) $20068 = 2 \times 10000 + 6 \times 10 + 8 \times 1$

$= 2 \times 10^4 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

Ex.39 निम्नलिखित विस्तारित रूपों का प्रत्येक का संख्यात्मक मान ज्ञात करो :

(i) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

(ii) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

(iii) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

Sol. (i) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

$= 8 \times 10000 + 6 \times 1000 + 0 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

$= 80000 + 6000 + 0 + 40 + 5 = 86045.$

(ii) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

$= 9 \times 100000 + 2 \times 100 + 3 \times 10$

$= 900000 + 200 + 30 = 900230$

(iii) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

$= 4 \times 100000 + 5 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 1$

$= 400000 + 5000 + 300 + 2 = 405302$