वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल

8
CHAPTER

सूची

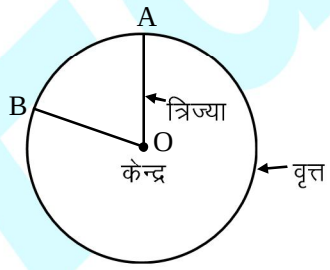
- वृत्त
- वृत्त की परिधि
- वृत्त का क्षेत्रफल
- दो संकेन्द्रीय वृत्तों के मध्य क्षेत्रफल

➢ वृत्त

एक वृत्त एक ज्यामितीय आकृति है जो समतल में स्थित उन सभी बिन्दुओं को रखती है जो एक बिन्दु (जो वृत्त का केन्द्र कहलाता है) से स्थिर दूरी पर होते हैं।

◈ त्रिज्या

केन्द्र से वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु की नियत दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है जिसे 'r' से व्यक्त करते है। त्रिज्या, केन्द्र को वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से मिलाने वाले रेखाखण्ड के रूप में भी उपयोग होती है।



एक दिये गये वृत्त के लिए अनन्त त्रिज्याऐं होती है तथा वे सभी लम्बाई में बराबर होती है।

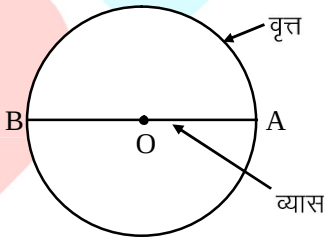
◈ वृत्त की जीवा

वह रेखाखण्ड जिसके सिरें, वृत्त पर स्थित होते हैं, जीवा कहलाती है।

◈ व्यास

वृत्त का व्यास वृत्त के केन्द्र से गुजरने वाला कोई रेखाखण्ड है जिसके सिरें वृत्त पर स्थित होते हैं।

व्यास = 2 × त्रिज्या

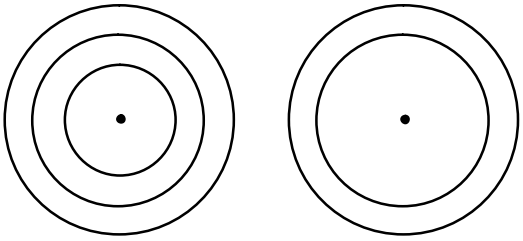


सबसे लम्बी जीवा व्यास जीवा है।

◈ संकेन्द्रीय वृत्त

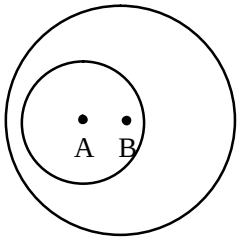
समान केन्द्र वाले दो या अधिक वृत्त संकेन्द्रीय वृत्त कहलाते हैं।

निम्न संकेन्द्रीय वृत्त है :



(i) (ii)

निम्न वृत्त संकेन्द्रीय वृत्त नहीं हैं क्योंकि वे अलग–अलग केन्द्र रखते है।



➢ वृत्त की परिधि

परिधि (Circumference) का अर्थ है 'वृत्त का परिमाप'। यह शब्द लेटिन शब्द *circumferre* से लिया है जिसका अर्थ है 'चारों ओर से लेना'।

एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी को इसकी परिधि के द्वारा भी जाना जाता है।

नोट :

(1) परिधि का व्यास से अनुपात लगभग 3.142 के बराबर होता है।

अर्थात् वृत्त की परिधि इसके व्यास से 3 गुना से अधिक होती है।

इस प्रकार, हम पाते हैं कि

$$\frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{वृत्त का व्यास}} = \text{अचर या } \frac{C}{d} = \pi,$$

परिधि का व्यास से अचर अनुपात अर्थात् 3.142 ग्रीक अक्षर π के द्वारा व्यक्त किया जाता है जिसे पाई (π) पढ़ते हैं।

(2) गणना के उद्देश्य से π का मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 (लगभग) लेते हैं।

$\therefore\ C = \pi \times d \Rightarrow C = \pi \times 2r$

$\Rightarrow\ C = 2\pi r$, जहाँ r वृत्त की परिधि है।

अर्थात् वृत्त की परिधि = 2 × वृत्त की त्रिज्या × π

या वृत्त की परिधि = वृत्त का व्यास × π

(3) अर्धवृत्त की परिधि = $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$ तथा अर्ध-वृत्ताकार आकृति का परिमाप = $(\pi + 2)$ r इकाई

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 7 cm व्यास के वृत्त की परिधि ज्ञात करो ($\pi = \frac{22}{7}$ लें)

Sol. हम जानते हैं कि वृत्त की परिधि का सूत्र = $\pi \times d$

$\therefore$ परिधि = $\frac{22}{7} \times 7 = 22$ cm.

Ex.2 एक छल्ले की त्रिज्या 60 cm है, इसकी परिधि ज्ञात करो ($\pi = 3.142$ लें)

Sol. हम जानते हैं कि,

परिधि = $2 \times \pi \times r$

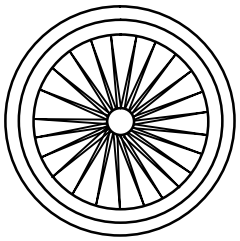
$= 2 \times 3.142 \times 60 = 377.04$ cm.

Ex.3 एक पहिये की त्रिज्या 35 cm है। इसकी परिधि ज्ञात करो ($\pi = \frac{22}{7}$ ले)

Sol. त्रिज्या = 35 cm,

अतः परिधि = $2 \times \pi \times r = 2 \times \frac{22}{7} \times 35 = 220$ cm

Ex.4 एक वृत्ताकार पुष्प वाटिका का व्यास 1.5 m है। इसके चारों ओर धातु की कोर लगानी है। आवश्यक कोर की लम्बाई तथा कोर लगाने का खर्च ज्ञात करो यदि यह मीटर में बेची जाती है तथा खर्च ₹ 60 प्रति मीटर है। (आप केवल पूर्ण संख्या में ही मीटर खरीद सकते हो)



Sol. पहले वृत्त की परिधि ज्ञात करो कि तुम्हें कितने मीटर की आवश्यकता है

$\therefore\ C = \pi \times d = 3.14 \times 1.5 = 4.71$ m.

चूंकि आवश्यक लम्बाई 4.71 m है, अतः हमें 5 m कोर खरीदनी है। अतः 5 m कोर खरीदने का खर्च = 5 × ₹ 60 = ₹ 300.

Ex.5 एक कार के पहिये का व्यास 77 cm है। 10 km दूरी तय करने में इसको कितने चक्कर लगाने होंगें?

Sol. हम जानते हैं कि पहिये की परिधि

$= \pi \times d = \frac{22}{7} \times 77 = 242$ cm

इसका अर्थ है कि एक चक्कर में कार दूरी तय करेगी = 242 cm

अन्य शब्दों में, 1 चक्कर में कार के द्वारा तय की गई दूरी = 242 cm

दिया है कि 10 km = 10,000 m

= 10,000 × 100 cm = 10,00,000 cm

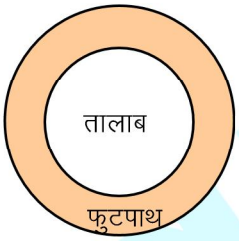
अब, 242 cm = 1 चक्कर

$\therefore \quad 1 \text{ cm} = \frac{1}{242}$ चक्कर

अतः, 10,00,000 cm में $= \frac{10,00,000}{242}$ चक्कर

= 4132.23 (लगभग) चक्कर

Ex.6 एक वृत्ताकार तालाब के चारों ओर इसकी परिसीमा के अनुदिश फुटपाथ बना हुआ है। एक आदमी इसके किनारे के समीप रहते हुए ठीक एक बार इसके चारों ओर घुमता है। यदि उसकी स्टेप 66 cm लम्बी है तथा वह तालाब के चारों ओर घूमने में ठीक 400 स्टेप रखता है। तालाब का व्यास क्या है ?



Sol. हम जानते हैं कि वृत्त का परिमाप = π d

आदमी की एक स्टेप की लम्बाई = 66 cm

आदमी की 400 स्टेप की लम्बाई = 400 × 66 cm

= 26400 cm

इसका अर्थ है कि तालाब की परिधि 26400 cm

$\therefore \quad \pi d = 26400$ cm है।

या $\quad d = \frac{26400}{\pi} \text{cm} = \frac{26400}{22} \times 7 \text{cm}$

= 1200 × 7 cm

= 8400 cm = 84 m.

Ex.7 एक साईकिल की परिधि 198 cm है। एक स्पोक की लगभग लम्बाई क्या है ?

Sol. साईकिल की परिधि = 198 cm

यहाँ साईकिल का स्पोक साईकिल के पहिये की त्रिज्या है।

यदि r त्रिज्या (स्पोक की लम्बाई) है तथा C परिधि है।

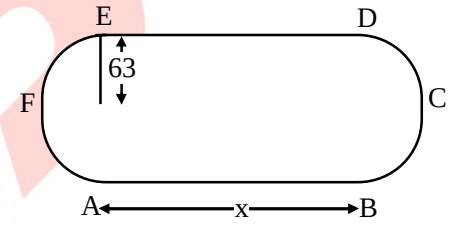
तब $\quad C = 2\pi r \quad$ या $\quad 198 = 2\pi r$

या $\quad r = \frac{198}{2\pi} = \frac{198}{2 \times \frac{22}{7}} = \frac{198 \times 7}{2 \times 22} = \frac{63}{2}$

= 31.5 cm

अतः स्पोक की लम्बाई 31.5 cm है।

Ex.8 एक दौड़ पथ में दो सीधी लम्बाईयों पर 63 मीटर त्रिज्या के दो अर्धवृत्ताकार सिरे हैं। पथ का परिमाप 1000 मीटर है। प्रत्येक सीधे पथ की लम्बाई ज्ञात करो। (निकटस्थ मीटर में)



Sol. यदि हम स्केच बनाये तो हम पाते हैं कि पथ, चित्र जैसा है

तब पथ की परिधि = AB + BCD + DE + EFA

माना AB = DE = x तथा BCD (अर्द्ध-वृत्ताकार चाप) + EFA (अर्द्ध-वृत्ताकार चाप) एक पूर्ण वृत्त बनाते हैं।

अतः पथ की परिधि = 2x + 63m त्रिज्या के वृत्त की परिधि

या $\quad 1000 \text{ m} = 2x + 2 \times \pi \times 63$

या $\quad 2x = 1000 - 2 \times \frac{22}{7} \times 63$

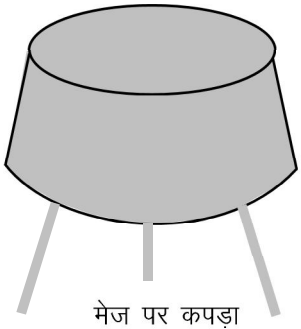
या $\quad 2x = 1000 - 44 \times 9 = 1000 - 396$

या $\quad 2x = 604$ m या $x = 302$ m.

Ex.9 एक वृत्ताकार मेज के कपड़े की परिधि 220 cm है

(a) क्या कपड़ा 50 cm व्यास की गोल मेज को ढकने के लिए पर्याप्त है?

(b) यदि ऐसा है, तो प्रत्येक ओर लटक रहे कपड़े की लम्बाई क्या है?



मेज पर कपड़ा

Sol. (a) मेज का व्यास 50 cm है

अतः, मेज की परिधि

$= \pi \times d = \pi \times 50$ cm ……(i)

तथा कपड़े की परिधि = 220 cm

$\Rightarrow \quad 2\pi r = 220$

$\Rightarrow \quad r = \dfrac{220}{2 \times \frac{22}{7}} = \dfrac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$ cm

$\therefore$ कपड़े की परिधि = 220 cm

$= 2 \times \pi \times 35$ या 70π …..(ii)

(i) तथा (ii) से स्पष्ट है कि कपड़ा मेज को ढकने के लिए प्रर्याप्त है,

(b) मेज की त्रिज्या $= \dfrac{50}{2}$ cm = 25 cm

तथा वृत्ताकार कपड़े की त्रिज्या

$= \dfrac{\text{परिधि}}{2\pi} = \dfrac{70\pi}{2\pi} = 35$ cm

$\therefore$ लटकने वाली लम्बाई = 35 cm – 25 cm = 10 cm

स्पष्टतः, कपड़े की त्रिज्या मेज की त्रिज्या से अधिक है,

अतः कपड़ा प्रत्येक ओर 10 cm नीचे लटकेगा।

Ex.10 कुछ सूती धागा 35 cm त्रिज्या की एक रील पर लपेटा जाता है

(a) रील पर एक चक्कर में लगे धागे की लम्बाई क्या है?

(b) रील पर 44 m धागा लपेटने पर कितने चक्कर लगेंगे।

रील

Sol. (a) स्पष्टतः, रील पर एक चक्कर में लपेटे गये धागे की लम्बाई की गणना करने के लिए हम रील की परिधि की गणना करेंगे।

अब, रील की परिधि = $2\pi r$, जहाँ r रील की त्रिज्या है

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 35$ cm = 220 cm

इस प्रकार, 220 cm रील पर एक चक्कर में लपेटे गये धागे की अभीष्ट लम्बाई है।

(b) चूंकि, हम जानते हैं कि 1 m = 100 cm

$\therefore$ 44 m = 4400 cm

$\therefore$ 220 cm एक चक्कर पूरा करने में अभीष्ट लम्बाई है

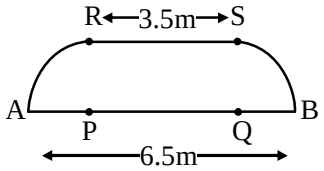
अब, 1 cm लम्बाई पूरी करने में चक्करों की संख्या

$= \dfrac{1}{220}$ चक्कर

अतः, 4400 cm लम्बाई पूरी करने में चक्करों की अभीष्ट संख्या $= 4400 \times \dfrac{1}{220}$ चक्कर = 20 चक्कर

Ex.11 चित्र (i) तथा (ii) में बनी आकृतियों की परिधि ज्ञात करो :

Sol. (i) स्पष्ट रूप से, दिये गये चित्र (i) में 3.5 m की दो सीधा लम्बाईयाँ हैं तथा दो चतुर्थांश वृत्त है



अब, दिये गये चित्र की परिधि की गणना करने के लिए हम पहले चतुर्थांश वृत्तों की त्रिज्या ज्ञात करेंगे

चूंकि AB = 6.5 m, PQ = RS = 3.5 m तथा AP = QB

$\therefore \quad$ AB = AP + PQ + QB

या $\quad$ AB = PQ + 2QB $\quad [\because$ QB = AP]

या $\quad$ 6.5 = 3.5 + 2QB

या $2QB = 6.5 - 3.5 = 3$ m

या $QB = 1.5$ m

अतः, दिये गये चित्र का परिमाप

= 6.5 m + 3.5 m + दो चतुर्थांश वृत्ताकार चापों की परिधि

= 10 m + अर्धवृत्ताकार चाप का परिमाप

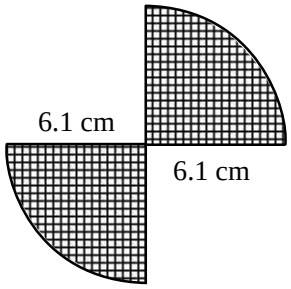
$= 10 \text{ m} + \frac{\text{वृत्त का परिमाप}}{2}$

$= 10 \text{ m} + \frac{2\pi \times 1.5 \text{m}}{2}$

= 10 m + 1.5 π m = 10 m + 1.5 × 3.14 m

= 14.71 m

(ii) स्पष्ट रूप से, दिया गया चित्र (ii) दो चतुर्थांश वृत्त रखता है



∴ अभीष्ट परिमाप

= एक अर्ध-वृत्ताकार चाप की परिधि + 4 × त्रिज्या

$= \frac{2\pi \times 6.1 \text{m}}{2} + 4 \times 6.1 \text{ m}$

= π × 6.1 m + 4 × 6.1 m = 6.1 (π + 4) m

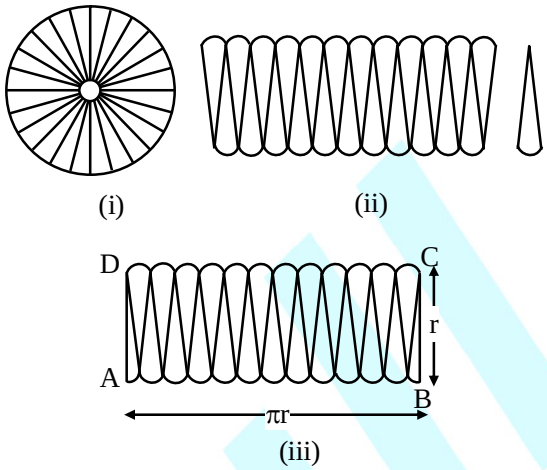
= 6.1 (3.14 + 4) m

= 43.55 m. (लगभग)

➢ वृत्त का क्षेत्रफल

एक वृत्ताकार वस्तु के द्वारा घेरी गई सतह इसका क्षेत्रफल कहलाती है

$A = \pi r^2$ जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है



❖ उदाहरण ❖

Ex.12 उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी त्रिज्या 5.6 cm है।

Sol. हम जानते हैं कि वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

दिया है कि r = 5.6 cm

$\therefore$ क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 5.6 \times 5.6$ sq cm

= 22 × 0.8 × 5.6 sq cm = 98.56 sq. cm

Ex.13 एक वृत्त की परिधि 44 cm है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Sol. दिया गया है कि परिधि $2\pi r = 44$ cm

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$ cm

या $r = \frac{7 \times 44}{2 \times 22} = 7$ cm

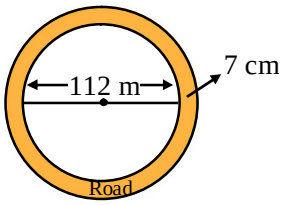
अतः क्षेत्रफल = πr^2

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ sq cm

= 154 sq cm.

Ex.14 एक वृत्ताकार पार्क का व्यास 112 m है। पार्क के चारों ओर 7 m चौड़ी सड़क बनी हुई है। सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Sol.



वृत्ताकार पार्क का क्षेत्रफल = πr^2 वर्ग इकाई

दिया गया है कि पार्क का व्यास = 112 m

$\therefore$ पार्क की त्रिज्या = $\frac{112}{2}$ = 56 m

पार्क का क्षेत्रफल = $\left(\frac{22}{7} \times 56 \times 56\right)$ sq m

= 9856 sq m. .....(1)

अब, सड़क सहित पार्क की त्रिज्या

= 56 m + 7 m = 63 m

सड़क सहित पार्क का क्षेत्रफल

= $\frac{22}{7}$ × 63 × 63 sq m

= 12,474 sq m .....(2)

$\therefore$ सड़क का क्षेत्रफल = सड़क सहित पार्क का क्षेत्रफल (2 से) – पार्क का क्षेत्रफल (1 से)

= (12,474 – 9,856) sq m

= 2,618 sq m

जो कि अभीष्ट उत्तर है।

Ex.15 एक विद्यार्थी तर्क देता है कि यदि एक वृत्त की त्रिज्या 2 इकाई है, तब वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल बराबर होंगे क्योंकि दोनों का माप 4π है। फिर भी यह तर्क सही नही है विद्यार्थी कहाँ गलती करता है?

Sol. त्रिज्या = 2 इकाई, तब

परिधि = $2\pi r = 2\pi.2 = 4\pi$ इकाई ....(1)

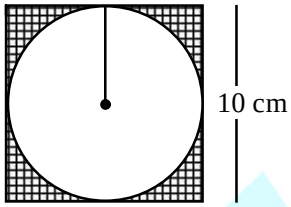
क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \pi(2)^2$

= 4π वर्ग इकाई ....(2)

(1) तथा (2) से, हम देखते है कि परिधि तथा क्षेत्रफल के संख्यात्मक मान बराबर है परन्तु गणितीय रूप से यह गलत है क्योंकि परिधि तथा क्षेत्रफल की इकाई अलग–अलग होती है।

Ex.16 छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Sol.



वर्ग की भुजा = 10 cm

तथा वृत की त्रिज्या = $\frac{10}{2}$ cm = 5 cm

अब, वर्ग का क्षेत्रफल = $(10 \text{ cm})^2$ = 100 sq cm

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi(5^2)$ sq cm = π × 25 sq cm

= 3.14 × 25 sq cm = 78.50 sq cm

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वर्ग का क्षेत्रफल – वृत्त का क्षेत्रफल

= 100 sq cm – 78.50 sq cm

= 21.50 sq cm

Ex.17 चित्र में, केन्द्र O के वृत्त के सापेक्ष वर्ग ABCD बनाया गया है। वृत्त की त्रिज्या 5 इकाई है। वर्ग तथा वृत्त के मध्य क्षेत्र छायांकित है। ज्ञात करो :

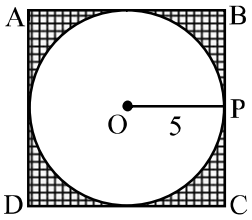
(a) वृत्त का व्यास

(b) वर्ग की भुजा की लम्बाई

(c) वर्ग का क्षेत्रफल

(d) वृत्त का क्षेत्रफल

(e) छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल



Sol. (a) व्यास d की लम्बाई त्रिज्या r की लम्बाई से दुगुनी है, अतः d = 2 × 5 = 10 इकाई

(b) यहाँ वर्ग की भुजा की लम्बाई व्यास d के बराबर है, अतः a = 10 इकाई

(c) वर्ग का क्षेत्रफल A = a^2 वर्ग इकाई

अर्थात् $A = 10^2 = 100$ वर्ग इकाई

(d) वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ वर्ग इकाई

अर्थात् $A = \pi.5^2$

$= 25\,\pi$ वर्ग इकाई

$= 25 \times \frac{22}{7}$

$= 78.6$ वर्ग इकाई

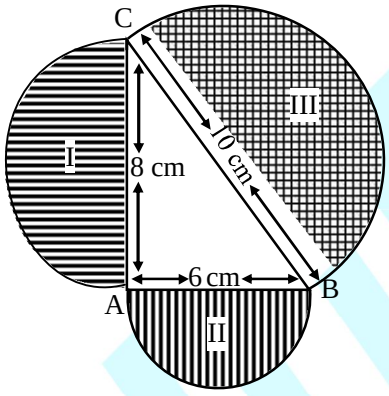
(e) छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल

= वर्ग का क्षेत्रफल – वृत्त का क्षेत्रफल

$= 100 - 78.6$

$= 21.4$ वर्ग इकाई

Ex.18 निम्न चित्र में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



Sol. चित्र से हम देख सकते है कि समकोण त्रिभुज ABC की भुजाओं पर तीन अर्ध–वृत्त निर्मित है जहाँ AB = 6 cm, AC = 8 cm तथा BC = 10 cm है। स्पष्टतः छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम तीन अर्ध–वृत्तों के क्षेत्रफल की गणना करेंगे जिनके व्यास क्रमशः 8 cm, 6 cm तथा 12 cm है।

(i) अब, अर्धवृत्त I जिसका व्यास 8 cm है, का

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8}{2}\right)^2$

$= \frac{\pi}{2} \times 16$ sq cm

$= 8\pi$ sq cm

(ii) अर्धवृत्त II जिसका व्यास 6 cm है, का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \times 9$ sq cm

$= \frac{9}{2}\pi$ sq cm

(iii) अर्ध-वृत्त III जिसका व्यास 10 cm है, का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{10}{2}\right)^2$

$= \frac{25}{2}\pi$ sq cm

छायांकित क्षेत्र का कुल क्षेत्रफल

$= \left(8\pi + \frac{9\pi}{2} + \frac{25\pi}{2}\right)$ sq cm

$= \pi\left(8 + \frac{9}{2} + \frac{25}{2}\right)$ sq cm

$= \pi\left(\frac{50}{2}\right)$ sq cm

$= 25\,\pi$ sq cm

$= 25 \times \frac{22}{7}$ sq cm

$= 78.57$ cm.

Ex.19 एक गाय एक खम्भे से 10 m लम्बी रस्सी के द्वारा बंधी है। गाय रस्सी को तनी हुई रखते हुए घूमती है। गाय के द्वारा चरा गया क्षेत्रफल ज्ञात करो ($\pi = 3.1416$ ले)

Sol. स्पष्टतः गाय के द्वारा चरे गये मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम 10 m त्रिज्या के वृत्त के क्षेत्रफल की गणना करेंगे।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \pi\,(10)^2$

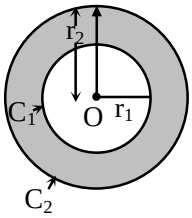
$= 100\,\pi$ sq m

$= 100 \times 3.1416$ sq m

$= 314.16$ sq m

अतः गाय के द्वारा चरे गये मैदान का अभीष्ट क्षेत्रफल 314.16 sq m. है

➢ दो संकेन्द्रीय वृत्तों के मध्य का क्षेत्रफल



माना C_1 एवं C_2 दो संकेन्द्रीय वृत्त है जिनकी त्रिज्याऐं क्रमशः r_1 एवं r_2 $(r_2 > r_1)$ हैं। अतः दो संकेन्द्रीय वृत्तों के मध्य क्षेत्रफल (चित्र में छायांकित भाग)

= बाह्य वृत्त का क्षेत्रफल – अन्तः वृत्त का क्षेत्रफल

$= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)$ इकाई^2

$= \pi (r_2^2 - r_1^2)$ इकाई^2

EduBull