सममिति

7
CHAPTER

सूची

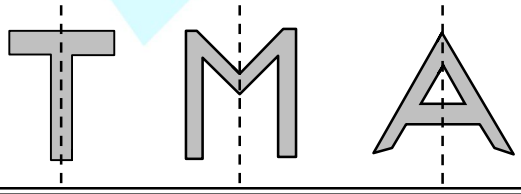
- परिचय
- रेखा सममिति
- सम बहुभुज में रेखा सममिति
- घूर्णन सममिति

➢ परिचय

एक चित्र का प्रतिबिम्ब हमेशा एक रेखा के सापेक्ष सममित होता है, जिसे सममिति रेखा या अक्ष कहते हैं। सममिति के अन्य प्रकार को घूर्णन सममिति कहते हैं। सममिति प्रकृति में कई प्रेक्षणों के घटित होने से सम्बन्धित है, उदाहरणार्थ यदि हम हमारे शरीर से शुरू करते हुए, हमारे हाथों (लम्बाई), पैरों (लम्बाई) को देख सकते हैं जो समान रूप से अनुक्रमानुपाती सन्तुलित है, हम कहते हैं ''वे सममित हैं''। अन्य प्राकृतिक रूप से प्राप्त होने वाले प्रेक्षण जो सममिति के विचारों में सम्मिलित है : फूल, पेड़ इत्यादि। अभियान्त्रिकी के क्षेत्र में, सममिति के विचारों का उपयोग कार, बसें आदि बनाने में किया जाता है।

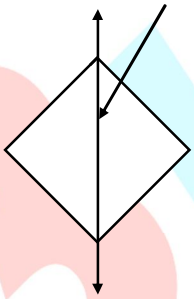
➢ रेखा सममिति

एक चित्र रेखा सममिति रखता है यदि एक रेखा जिसके सापेक्ष चित्र को मोड़ सकते हैं जबकि चित्र के दो भाग एक दूसरे पर सम्पाती होंगे। नीचे दिये गये सभी अक्षरों के चित्र तथा सभी प्रेक्षणों के चित्र रेखा सममिति रखते हैं।

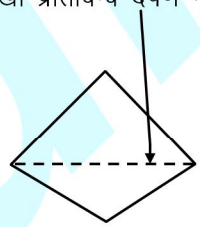


रेखा सममिति की अवधारणा, दर्पण प्रतिबिम्ब के साथ निकटता से सम्बन्धित है।

रेखा एक दर्पण रेखा है



रेखा प्रतिबिम्ब दर्पण नहीं है

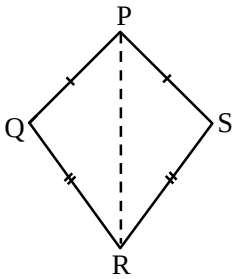


नोट : यदि आधा भाग अन्य के सम्पूर्ण को ढक लेता है तो हम कहते हैं कि रेखा एक सममित है अन्यथा नहीं है।

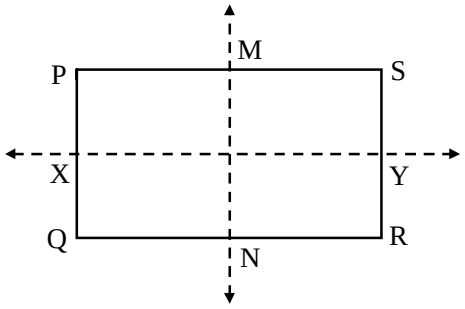
❖ उदाहरण ❖

Ex.1 माना PQRS एक पतंग है जिसमें PQ = PS तथा QR = SR है

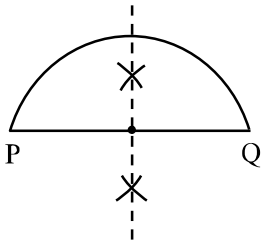
तब पतंग PQRS विकर्ण PR के सापेक्ष (संगत) सममित है।



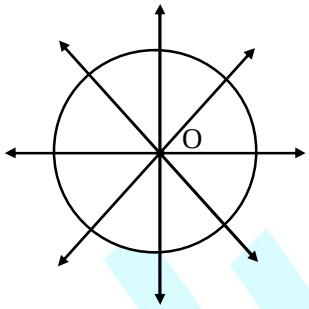
Ex.2 एक आयत, सममिति की दो रेखाऐं रखता है, प्रत्येक जो कि विपरीत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखा हैं।



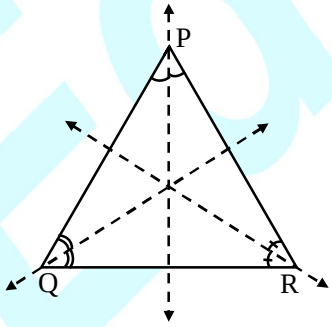
Ex.3 एक अर्द्धवृत्त एक रेखा सममित रखता है, अर्थात् व्यास PQ का लम्ब समद्विभाजक



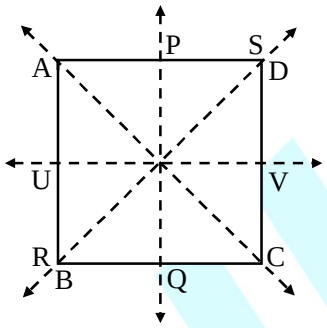
Ex.4 एक वृत्त इसके प्रत्येक व्यास के संगत सममित होता है



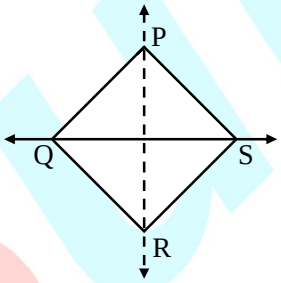
Ex.5 एक समबाहु त्रिभुज इसके प्रत्येक अन्तःकोण के अर्धकों के संगत सममित होता है



Ex.6 एक वर्ग सममिति की 4 रेखाऐं रखता है, अर्थात् विकर्ण तथा इसकी विपरित भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखाऐ।



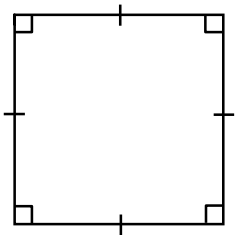
Ex.7 एक समचतुर्भुज इसके प्रत्येक विकर्ण के संगत सममित होता है।



➢ समबहुभुजों में सममिति की रेखा

◈ समबहुभुज

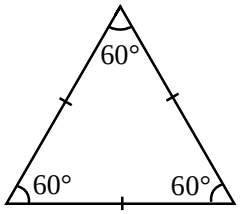
समान लम्बाई के सरल रेखा खण्डों से परिबद्ध बंद आकृति को समबहुभुज कहते है। उदाहरणार्थ वर्ग एक समचतुर्भुज की आकृति है।



माना अब हम सम बहुभुज की सममिति की रेखाओं को ज्ञात करने की विधि पर विचार करते है।

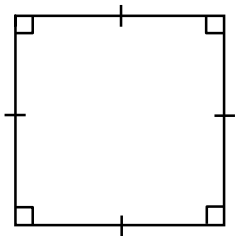
1. एक समबाहु त्रिभुज

एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाऐं समान लम्बाई तथा इसका प्रत्येक कोण 60° मापा जाता है, समबाहु त्रिभुज कहलाता है, चित्र में दिखाया गया है



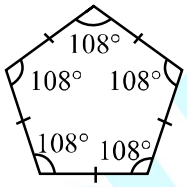
2. एक वर्ग

हम पहले ही विचार कर चुके है कि वर्ग भी एक समबहुभुज है क्योंकि इसकी सभी भुजाऐं समान लम्बाई तथा उसका प्रत्येक कोण समकोण (90°) है, चित्रानुसार -



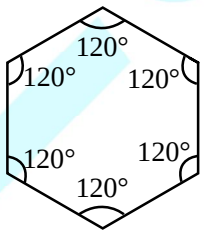
3. एक सम पंचभुज

समान लम्बाई की पांच भुजाओं से परिबद्ध आकृति को सम पंचभुज कहते है। समपंचभुज का प्रत्येक कोण 108° का होता है।

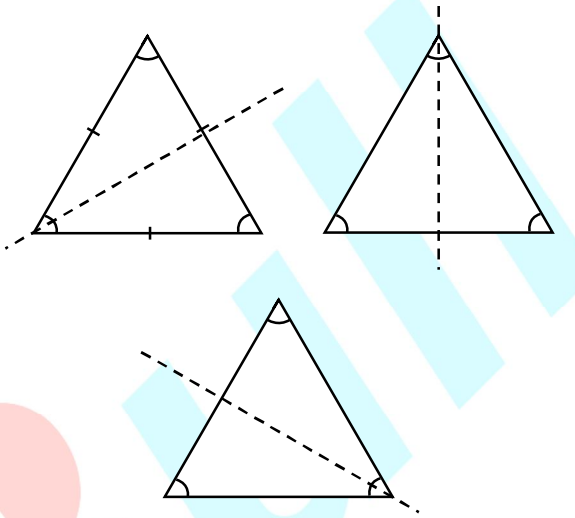


4. एक सम षट्भुज

समान लम्बाई की छः भुजाओं से परिबद्ध आकृति को सम षट्भुज कहते है। इसका मापा गया प्रत्येक कोण 120° है।

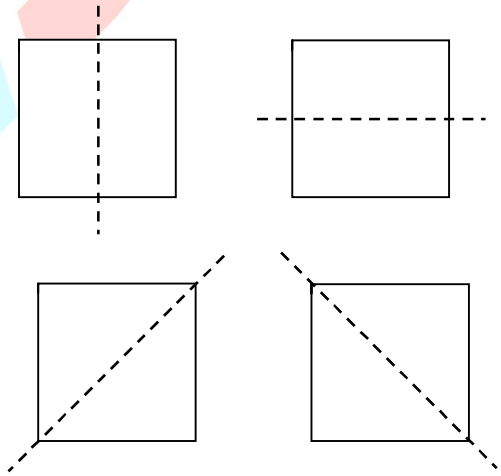


एक ट्रेसिंग पत्र पर समबाहु त्रिभुज को बनाते है (ट्रेस करते है) तथा मौड़ने से इसकी सममिति की रेखाएँ ज्ञात करते है।



एक समबाहु त्रिभुज के लिए सममिति की तीन रेखाऐं होती है।

एक ट्रेसिंग पत्र पर वर्ग खींचते है

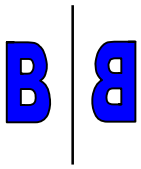


एक वर्ग सममिति की चार रेखाऐं रखता है।

Note :

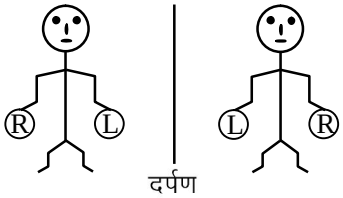
(1) हम एक आकृति की सममिति की रेखा ; एक दर्पण को रखकर भी ज्ञात कर सकते है। जब आकृति का आधा भाग इसके दर्पण प्रतिबिम्ब में जैसे के जैसा दिखाई दे, हम दर्पण के अनुदिश रेखा को सममिति की रेखा कहते है।

(2) दर्पण प्रतिबिम्ब में आकृति के अभिविन्यास बाँयें-दाँयें अभिविन्यासों में परिवर्तित हो जाते है, जैसे चित्र में दर्शाया है -



Mirror

(i)



दर्पण

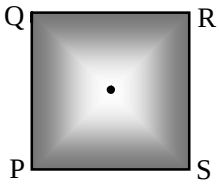
(ii)

➢ घूर्णन सममिति

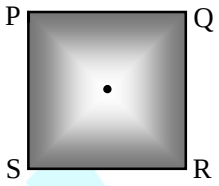
यदि एक आकृति को एक स्थिर बिन्दु के संगत निश्चित घूर्णन (पूर्ण रुप से नहीं) कराने के बाद यह स्वंय पर ठीक रुप से स्वंय की जैसी है, तब इसे घूर्णन सममिति कहते है।

घूर्णन के दौरान घुमाव के कोण को घूर्णन का कोण कहते है।

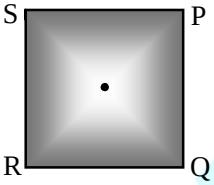
उदाहरणार्थ, एक वर्ग घूर्णन सममिति रखता है



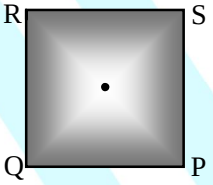
मूलभूत स्थिति



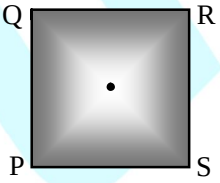
90° पर घूर्णन



180° पर घूर्णित



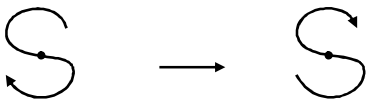
270° पर घूर्णित



360° पर घूर्णित

◈ बिन्दु सममिति

कुछ आकृत्तियाँ समान स्थिति में प्रकट होती है जबकि एक स्थिर बिन्दु के संगत इसका आधा घुमाया (180°) जाता है, उन्हें बिन्दु सममिति रखने वाले कहते है।



मूलभुत स्थिति 180° घुमाने पर

नोट :

1. एक वर्ग रेखा सममिति के जैसे ही घूर्णन सममिति रखता है।
2. एक समबाहु त्रिभुज घूर्णन सममिति के जैसे ही रेखा सममिति रखता है।
3. एक पूर्ण घूर्णन का अर्थ यह नहीं है कि आकृत्ति एक घूर्णन सममिति रखती है जबकि प्रत्येक आकृति एक पूर्ण घूर्णन के बाद स्वंय पर ठीक रुप से अध्यारोपित हो सकती हो।

◈ घूर्णन सममिति का क्रम :

एक पूर्ण घुमाव में एक आकृति के स्वंय पर आच्छादित होने की संख्या को घूर्णन सममिति का क्रम कहते है।

या

इस प्रकार, हम कहते है कि एक चित्र की घूर्णन सममिति का क्रम जिसका अंकित बिन्दु (P है), एक स्थिर बिन्दु के संगत, अंकित बिन्दु P को इसकी मूलभूत स्थिति पर वापस लाने के लिए घूर्णको की संख्या है।

उदाहरणार्थ एक समबाहु त्रिभुज 3 क्रम का घूर्णन सममिति रखता है, ऐसी तीन स्थितियाँ जहाँ स्पष्ट होता है कि यह बदलता नहीं है।

नोट : आकृति जो घूर्णन सममिति नहीं रखती है, 1 क्रम का घूर्णन सममिति रखती है।

◈ घूर्णन की दिशा

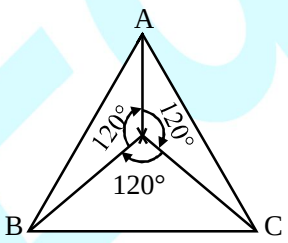
एक निकाय (आकृति) घड़ी की सूईयों की दिशा में गति करती है, को दक्षिणावृत्त घूर्णन कहते है तथा यदि यह घड़ी की सूईयों के विपरित दिशा में गति करती है, को वामावृत्त घूर्णन कहते है।

इसलिये, हम आकृति के घूर्णन का क्रम, 360° को मूलभूत चित्र के घूर्णन कोण के माप से विभाजित करके ज्ञात कर सकते है, जबकि ऐसा पूर्व में दिखाया गया है।

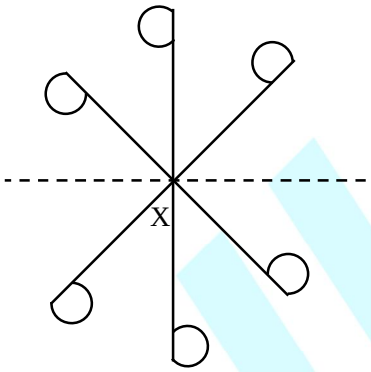
उदाहरणार्थ, एक समबाहु त्रिभुज ABC के लिए, जब यह बिन्दु X के संगत घूमाया जाता है, 120° के घूर्णन कोण के बाद समान आकार प्राप्त करेगा चित्र के जैसे

इसलिए, घूर्णन सममिति का क्रम $= \frac{360°}{120°} = 3$

नोट : हमें क्रम समान मिलता है, जब हम चित्र (आकृति) को घुमाते है।



Ex.8 निम्नलिखित चित्र का बिन्दु X के संगत घूर्णन सममिति का क्रम ज्ञात कीजिए :



Sol. बिन्दु X से गुजरने वाली एक बिन्दुवत् रेखा खींची जाती है।

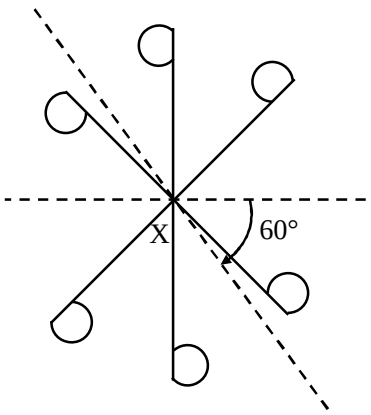
एक ट्रेंसिग पत्र पर चित्र (आकृति) की प्रतिकोपी बनाते है।

ट्रेस प्रतिकोपी को आकृति पर रख कर तथा बिन्दु X पर अंगुठे से आलपिन लगाते है।

आकृति को घूमाते है (दक्षिणा वृत्त या वामावृत) प्रथम घूर्णन के दौहरान जब ट्रेस प्रतिकोपी पूर्ण रुप से मूलभूत आकृति को ढक लेती है, रुक जाते है।

अब एक चांदा रखते है जिसमें इसका शून्य X पर है तथा बिन्दुवत् रेखा द्वारा बनाये गये कोण को मापते है। (एक रेखा आकृति पर तथा अन्य रेखा ट्रेस प्रतिकोपी पर है)

हम पाते है कि इस प्रकार बनाया गया कोण का माप 60° है जैसा चित्र में दिखाया है



इसी प्रकार दुबारा X के संगत घूमाते हैं तथा दो बिन्दुवत् रेखाओं के मध्य बने कोण को मापते है, जबकि मूलभूत आकृत्ति तथा ट्रेस प्रतिकॉपी दुबारा समान दिखाई देवें।

हम पाते है कि कोण का माप 120° है।

अर्थात् हमें X के संगत 120° – 60° = (60°) के घूर्णन के बाद समान आकृति प्राप्त होती है

तथा यह एक पूर्ण घूर्णन तक छः बार होगा। इस प्रकार, बिन्दु X के संगत् आकृत्ति की घूर्णन सममिति का क्रम 6 है।

इसी प्रकार, पूर्ण घूमाव का कोण = 360°

मूलभूत आकृति तथा ट्रेस प्रतिकॉपी के प्रथम बार ढक लेने के बाद कोण = 60°

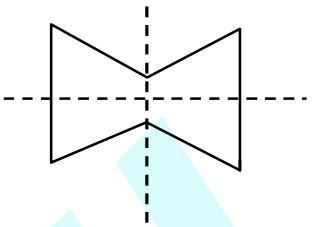
तथा $\frac{360°}{60°} = 6 =$ घूर्णन क्रम

Note :

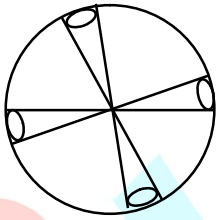
कुछ आकृत्तियॉ दोनों (रेखा सममिति तथा घूर्णन सममिति) रखती है

Ex.

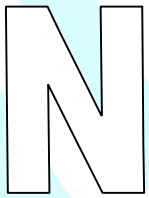
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

चित्र संख्या	रेखा सममिति	सममिति के रेखाओं की संख्या	घूर्णन सममिति	घूर्णन सममिति का क्रम
(i)	हां	1	हां	1
(ii)	हां	2	हां	2
(iii)	हां	4	हां	4
(iv)	नहीं	0	हां	2

याद रखने के महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. एक आकृति रेखा सममिति रखती है यदि यहाँ पर न्यूनतम एक रेखा जिसके संगत जब आकृति को मोड़ा जाता है, तो आकृति के दो भाग संपाती होते हैं।
2. एक बहुभुज समान भुजायें तथा समान कोण रखते हैं, सम बहुभुज कहलाता है।
3. एक सम बहुभुज कई सममिति की रेखाऐं रखता है, जितनी यह भुजायें रखता है।
4. प्रत्येक सम बहुभुज कई सममिति की रेखाऐं रखता है जितनी यह भुजायें रखता है।

सम बहुभुज	सममिति की रेखाओं की संख्या
समषट्भुज	6
समपंचभुज	5
वर्ग	4
समबाहु त्रिभुज	3

5. यदि, एक घूर्णन के बाद, एक प्रेक्षण (वस्तु) ठीक समान दिखती है, हम कहेंगे कि यह एक घूर्णन सममिति रखता है।
6. एक सम्पूर्ण घूमाव में, एक वस्तु जितनी बाद ठीक समान रूप की दिखाई देती है, घूर्णन सममिति का क्रम कहते हैं।
7. कुछ आकृतियाँ केवल एक रेखा सममिति रखती है, कुछ केवल घूर्णन सममिति रखते हैं तथा कुछ दोनों रखते हैं।
8. प्रत्येक वस्तु 1 क्रम का घूर्णन सममिति रखता है जैसे यह 360° पर घुमाने के बाद समान स्थिति प्राप्त करता है। (एक सम्पूर्ण घूर्णन में)।