7
CHAPTER

सरल समीकरण

सूची

- परिभाषा
- रैखिक समीकरण
- समीकरण का हल
- जाँच एवं त्रुटि विधि के द्वारा रैखिक समीकरण का हल
- समीकरण के हल के लिए नियमबद्ध विधि
- पक्षान्तरण
- समीकरणों के अनुप्रयोग

➢ परिभाषा

समानता का एक कथन जिसमें एक या अधिक चर उपस्थित हो, समीकरण कहलाता है।

उदाहरण के लिए :

क्रमांक	कथन	समीकरण
(i)	एक संख्या x में 7 की वृद्धि करने पर 15 प्राप्त होता है	$x + 7 = 15$
(ii)	9 एक संख्या x से 3 अधिक है	$9 - x = 3$
(iii)	एक संख्या x का 4 गुना 24 है	$4x = 24$
(iv)	एक संख्या y को 5 से विभाजित करने पर 7 आता है	$\frac{y}{5} = 7$
(v)	संख्या x तथा संख्या y के दोगुने का योगफल 12 है	$x + 2y = 12$

स्पष्टतया, उपरोक्त कथनों में से प्रत्येक कथन एक या अधिक चरो को रखने वाला समानता का कथन है। इस प्रकार,उनमें से प्रत्येक एक समीकरण है।

(i) से (iv) तक की प्रत्येक समीकरण केवल एक अज्ञात (अर्थात् चर) रखती है, जबकि समीकरण (v) दो अज्ञात, x एवं y रखती है।

➢ रैखिक समीकरण

एक समीकरण जिसमें उपस्थित चरों की अधिकतम घात 1 हो, रैखिक समीकरण कहलाती है। स्पष्टतया, एक समीकरण में समानता का चिन्ह इसको दो भागों में विभाजित करता है, जो बायाँ पक्ष तथा दायाँ पक्ष कहलाते हैं जिन्हें क्रमशः LHS तथा RHS के द्वारा लिखा जाता है।

➢ समीकरण का हल

एक संख्या जिसको एक समीकरण में चर के स्थान पर प्रतिस्थापित करने पर LHS = RHS बनाती है, तब यह समीकरण सन्तुष्ट होना कहलाता है तथा वह संख्या समीकरण का हल या मूल कहलाती है।

समीकरण को हल करने पर समीकरण के मूल प्राप्त होते हैं।

➢ जाँच एवं त्रुटि विधि के द्वारा रैखिक समीकरण का हल

इस विधि में, हम समीकरण के मूल का अनुमान लगाते हैं। हम चरो के कई मान जाँचते है तथा प्रत्येक स्थिति में LHS तथा RHS के मान ज्ञात करते हैं। जब चर के एक विशेष मान के लिए LHS = RHS हो, हम कह सकते हैं कि यह समीकरण का एक मूल है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 समीकरण $4x = 12$ का हल जाँच एवं त्रुटि विधि के द्वारा ज्ञात कीजिए।

Sol. हम x के कई मान जाँचते है तथा LHS एवं RHS के मान ज्ञात करते हैं। हम रूक जाते हैं जब x के एक विशेष मान के लिए LHS = RHS हो

x	LHS	RHS
1	$4 \times 1 = 4$	12
2	$4 \times 2 = 8$	12
3	$4 \times 3 = 12$	12

$\therefore$ $x = 3$ दी गई समीकरण का हल है

Ex.2 समीकरण $3x - 5 = 7 - x$ को जाँच एवं त्रुटि विधि के द्वारा हल कीजिए।

Sol. हम x के कई मान जाँचते हैं तथा LHS एवं RHS के मान ज्ञात करते हैं। हम रूक जाते हैं जब x के एक विशेष मान के लिए LHS = RHS हो।

x	LHS	RHS
1	$3 \times 1 - 5 = -2$	$7 - 1 = 6$
2	$3 \times 2 - 5 = 1$	$7 - 2 = 5$
3	$3 \times 3 - 5 = 4$	$7 - 3 = 4$

$\therefore$ $x = 3$ दी गई समीकरण का हल है।

Ex.3 समीकरण $\frac{1}{3}y + 5 = 8$ को जाँच एवं त्रुटि विधि के द्वारा हल कीजिए।

Sol. हम अनुमान लगाते हैं एवं y के कई मान जाँचते हैं तथा प्रत्येक स्थिति में LHS एवं RHS के मान ज्ञात करते हैं। हम रूक जाते हैं जब y के एक विशेष मान के लिए, LHS = RHS हो।

y	LHS	RHS
3	$\frac{1}{3} \times 3 + 5 = 6$	8
6	$\frac{1}{3} \times 6 + 5 = 7$	8
9	$\frac{1}{3} \times 9 + 5 = 8$	8

इस प्रकार, जब $y = 9$, हम पाते हैं कि :

LHS = RHS

$\therefore$ $y = 9$ दी गई समीकरण का हल है।

➢ समीकरण के हल के लिए नियमबद्ध विधि

हम निम्नलिखित नियमों का पालन करते हैं :

नियम (i) : हम समीकरण के दोनो पक्षों में समान संख्या जोड़ सकते हैं

नियम (ii) : हम समीकरण के दोनों पक्षो से समान संख्या घटा सकते हैं।

नियम (iii) : हम समीकरण के दोनो पक्षो को समान अशून्य संख्या से गुणा कर सकते हैं।

नियम (iv) : हम समीकरण के दोनों पक्षो में समान अशून्य संख्या का भाग दे सकते हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.4 समीकरण $x - 5 = 7$ को हल करो तथा परिणाम की जांच करो।

Sol. $x - 5 = 7$

$\Rightarrow$ $x - 5 + 5 = 7 + 5$ [दोनों पक्षों में 5 जोड़ने पर]

$\Rightarrow$ $x = 12$

अतः, $x = 12$ दी गई समीकरण का हल है।

जाँच : दी गई समीकरण में $x = 12$ रखने पर हम पाते हैं कि LHS = $12 - 5 = 7$ तथा RHS = 7.

$\therefore$ जब $x = 12$, LHS = RHS

Ex.5 समीकरण $8 + x = 3$ को हल करो तथा परिणाम की जाँच करो।

Sol. $8 + x = 3$

$\Rightarrow$ $8 + x - 8 = 3 - 8$

[दोनों पक्षों में से 8 घटाने पर]

$\Rightarrow$ $x + 8 - 8 = 3 - 8$ [$\because 8 + x = x + 8$]

$\Rightarrow x = -5$

अतः $x = -5$ दी गई समीकरण का हल है

जाँच : दी गई समीकरण में $x = -5$ रखने पर, हम पाते हैं कि LHS = $8 - 5 = 3$ तथा RHS = 3

$\therefore$ जब $x = -5$, LHS = RHS

Ex.6 समीकरण $8x = 24$ को हल करो तथा परिणाम की जाँच करो।

Sol. $8x = 24$

$\Rightarrow \frac{8x}{8} = \frac{24}{8}$ [दोनों पक्षो को 8 से विभाजित करने पर]

$\Rightarrow x = 3$

$\Rightarrow x = 3$ दी गई समीकरण का हल है

जाँच : दी गई समीकरण में $x = 3$ रखने पर

हम पाते हैं कि LHS $= 8 \times 3 = 24$ तथा RHS $= 24$

$\therefore$ जब $x = 3$, LHS = RHS

Ex.7 समीकरण $\frac{2}{3}x = 18$ को हल करो तथा परिणाम की जाँच करो।

Sol. $\frac{2}{3}x = 18 \Rightarrow \frac{2}{3}x \times \frac{3}{2} = 18 \times \frac{3}{2}$

[दोनो पक्षो को $\frac{3}{2}$ से गुणा करने पर]

$\Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times x = 27 \Rightarrow x = 27$

$\therefore x = 27$ दी गई समीकरण का हल है

जाँच : दी गई समीकरण में $x = 27$ रखने पर हम पाते हैं कि LHS $= \frac{2}{3} \times 27 = 18$ तथा RHS $= 18$

$\therefore$ जब $x = 27$, : LHS = RHS

➢ पक्षान्तरण

हम जानते हैं कि समीकरण के दोनों पक्षो में एक संख्या जोड़ी या घटाई जा सकती है। अतः, समीकरण $x - 4 = 5$ के लिए, हम लिख सकते हैं कि

$x - 4 + 4 = 5 + 4 \Rightarrow x = 5 + 4$

इसी प्रकार, समीकरण $x + 5 = 3$ के लिए हम लिख सकते हैं कि $x + 5 - 5 = 3 - 5 \Rightarrow x = 3 - 5$.

इन दोनों स्थितियों में, हम देखते हैं कि इस संक्रिया के बाद, संख्या समीकरण के दूसरे पक्ष में स्थित है परन्तु विपरीत चिन्ह् के साथ। अतः आप सीधे, पद का चिन्ह् बदल सकते हो तथा इसे समीकरण के एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जा सकते हो। यह **पक्षान्तरण** कहलाता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.8 समीकरण $3x + 5 = 13 - x$ को हल करो तथा परिणाम की जाँच करो।

Sol. $3x + 5 = 13 - x \Rightarrow 3x + x = 13 - 5$

[$-x$ का LHS में तथा $+5$ का RHS में पक्षान्तरण से]

$\Rightarrow 4x = 8$

$\Rightarrow \frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$ [दोनों पक्षों में 4 का भाग देने पर]

$\Rightarrow x = 2$

$\therefore x = 2$ दी गई समीकरण का हल है

जाँच : दी गई समीकरण में $x = 2$ रखने पर, हम पाते हैं कि

LHS $= 3 \times 2 + 5 = 11$ तथा RHS $= 13 - 2 = 11$

$\therefore$ LHS = RHS, जब $x = 2$.

Ex.9 हल करो : $x - 7 = 5 + \frac{x}{2}$ तथा परिणाम की जाँच करो।

Sol. $x - 7 = 5 + \frac{x}{2} \Rightarrow x - \frac{x}{2} = 5 + 7$

[$\frac{x}{2}$ का LHS तथा -7 का RHS में पक्षान्तरण से]

$\Rightarrow \frac{x}{2} = 12$

$\Rightarrow \frac{x}{2} \times 2 = 12 \times 2$

[दोनो पक्षों को 2 से गुणा करने पर]

$\Rightarrow x = 24$ दी गई समीकरण का हल है।

जाँच : दी गई समीकरण में $x = 24$ रखने पर, हम पाते हैं कि

LHS $= (24 - 7) = 17$

तथा RHS $= \left(5 + \frac{1}{2} \times 24\right) = 17$.

$\therefore$ LHS = RHS, जब $x = 24$

Ex.10 हल करो : $3(x + 3) - 2(x - 1) = 5(x - 5)$.

तथा परिणाम की जाँच करो।

Sol. $3(x + 3) - 2(x - 1) = 5(x - 5)$

$\Rightarrow 3x + 9 - 2x + 2 = 5x - 25$

[कोष्ठकों को हटाने पर]

$\Rightarrow$ $x + 11 = 5x - 25$

$\Rightarrow$ $x - 5x = -25 - 11$

[5x का LHS तथा 11 का RHS में पक्षान्तरण से]

$\Rightarrow$ $-4x = -36$

$\Rightarrow$ $x = 9$ [दोनों पक्षों में –4 का भाग देने पर]

$\therefore$ $x = 9$ दी गई समीकरण का हल है।

जाँच : दी गई समीकरण में $x = 9$ रखने पर, हम पाते हैं कि

$LHS = 3(9 + 3) - 2(9 - 1) = (3 \times 12 - 2 \times 8) = 36 - 16 = 20$

$RHS = 5(9 - 5) = 5 \times 4 = 20$

$\therefore$ LHS = RHS, जब $x = 9$.

Ex.11 हल करो : $\frac{x}{8} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6} - 2$ तथा परिणाम की जाँच करो।

Sol. प्रत्येक पद को 24 (8, 2 एवं 6 के LCM से) से गुणा करने पर दी गई समीकरण होगी :

$3x - 12 = 4x - 48$

$\Rightarrow$ $3x - 4x = -48 + 12$

[4x का LHS में तथा –12 का RHS में पक्षान्तरण से]

$\Rightarrow$ $-x = -36$

$\Rightarrow$ $x = 36$

$\therefore x = 36$ दी गई समीकरण का हल है।

जाँच : दी गई समीकरण में $x = 36$ रखने पर, हम पाते हैं कि

$$LHS = \left(\frac{36}{8} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{36-4}{8}\right) = \frac{32}{8} = 4$$

तथा $$RHS = \left(\frac{36}{6} - 2\right) = (6 - 2) = 4$$

$\therefore$ LHS = RHS, जब $x = 36$.

➢ समीकरणों के अनुप्रयोग

यदि संख्याओं पर एक समस्या दी गई है, तो पहले हम इसे समीकरण में रूपान्तरित करेंगे तथा फिर इसे हल करेंगे।

❖ उदाहरण ❖

Ex.12 यदि एक संख्या के तीन गुने में से 5 घटाया जाता है, तो परिणाम 16 आता है। संख्या ज्ञात करो।

Sol. माना अभीष्ट संख्या x है, तब

$3x - 5 = 16$

$\Rightarrow$ $3x = 16 + 5$

[– 5 को RHS में पक्षान्तरित करने पर]

$\Rightarrow$ $3x = 21$

$\Rightarrow$ $x = 7$[दोनो पक्षों को 3 से विभाजित करने पर]

फलतः, अभीष्ट संख्या 7 है।

Ex.13 दो संख्याए ज्ञात करो जो इस प्रकार है कि एक संख्या दूसरी संख्या से 9 अधिक है तथा उनका योगफल 81 है।

Sol. माना छोटी संख्या x है

तब, दूसरी संख्या = (x + 9)

$\therefore$ $x + (x + 9) = 81$

$\Rightarrow 2x + 9 = 81$

$\Rightarrow 2x = 81 - 9$

[9 को RHS में पक्षान्तरित करने पर]

$\Rightarrow$ $2x = 72$

$\Rightarrow$ $x = 36$ [दोनो पक्षों में 2 का भाग देने पर]

फलतः एक संख्या = 36 तथा दूसरी संख्या

$= (36 + 9) = 45$.

Ex.14 एक आयताकार खेत की लम्बाई इसकी चौड़ाई की दुगुनी है। यदि खेत का परिमाप 228 मीटर है, तो खेत की विमाए ज्ञात करो

Sol. माना खेत की चौड़ाई x मीटर है, तब

इसकी लम्बाई = 2x मीटर

$\therefore$ खेत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

$= 2(2x + x)$ मीटर $= 6x$ मीटर

अतः, $6x = 228 \Rightarrow x = \frac{228}{6}$

[दोनो पक्षों में 6 का भाग देने पर]

$\Rightarrow x = 38$

फलत, खेत की चौड़ाई = 38 मीटर तथा

खेत की लम्बाई $= (2 \times 38)$ मीटर = 76 मीटर

Ex.15 मोना के पिताजी की आयु मोना की आयु से तिगुनी है। 12 वर्ष बाद उनकी आयु उनकी पुत्री की आयु से दोगुनी होगी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात करो।

Sol. माना मोना की वर्तमान आयु x वर्ष है

तब, उसके पिताजी की वर्तमान आयु = 3x वर्ष

12 वर्ष बाद मोना की आयु = (x + 12) वर्ष

12 वर्ष बाद मोना के पिताजी की आयु = (3x + 12) वर्ष

$\therefore \quad 3x + 12 = 2(x + 12)$

$\Rightarrow \quad 3x + 12 = 2x + 24$

$\Rightarrow \quad 3x - 2x = 24 - 12$

[2x को LHS तथा 12 को RHS में पक्षान्तरित करने पर]

$\Rightarrow \quad x = 12$

$\therefore$ मोना की वर्तमान आयु = 12 वर्ष

तथा उसके पिताजी की वर्तमान आयु

$= (3 \times 12)$ वर्ष = 36 वर्ष