# 3-D आकृतियों का दृश्यांकन

6
CHAPTER

## सूची

- 2D आकृतियाँ (समतल आकृतियाँ)
- 3D आकृतियाँ (ठोस)
- जाल
- विभिन्न 3D आकृतियाँ बनाने के लिए जाल
- समतल सतह पर ठोस बनाना

## ➢ 2D आकृतियाँ (समतल आकृतियाँ)

वे आकृतियाँ जो दो विमाओं (लम्बाई एवं चौड़ाई) के द्वारा बनाई जा सकती है, 2D-आकृतियाँ या समतल आकृतियाँ या द्विविमीय आकृतियाँ कहलाती है।

त्रिभुज, आयत, वर्ग, वृत्त आदि कागज पर खींचे जा सकते हैं, ये समतल आकृतियाँ हैं।

## ➢ 3D आकृतियाँ (ठोस)

वे आकृतियाँ जैसे घन, घनाभ, बेलन, पिरामिड आदि जिनको तीन विमाओं अर्थात् लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई या गहराई की आवश्यकता होती है, ठोस आकृतियाँ या 3-विमीय आकृतियाँ (3D) कहलाती है।

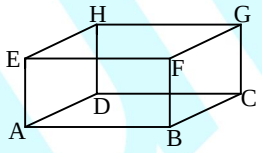
वे पिण्ड जो निश्चित आकृति तथा आकार रखते हैं, ठोस कहलाते हैं। एक ठोस एक निश्चित जगह घेरता है तथा तीन विमायें रखता है।

### ◈ घनाभ

यह माचिस, चॉकबॉक्स, ईंट, टाईल, पुस्तक, अलमारी आदि की आकृति का होता है।

यह आयतों से बना होता है।

**परिभाषा :** छः आयताकार फलकों (सभी समान नहीं) से परिबद्ध ठोस घनाभ कहलाता है। यह तीन विमायें लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई रखता हैं।




**घनाभ के विभिन्न भाग :**

1. **फलक :** एक घनाभ 6 आयताकार फलक रखता है। एक घनाभ के सम्मुख फलक समान होते हैं।

   चित्र में ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, DCGH फलक है।

2. **भुजाएँ (कोर) :** एक घनाभ के दो आसन्न फलक एक रेखा खण्ड में मिलते हैं, जो घनाभ की भुजा कहलाता है।

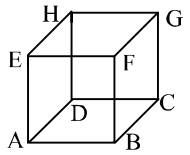
   एक घनाभ 12 भुजाएँ रखता हैं। चित्र में AB, BC, CD, DA, EF, GH, FG, EH, CG, BF, AE, DH भुजाऐं हैं।

3. **शीर्ष :** एक घनाभ की तीन भुजाएँ एक बिन्दु पर मिलती है जो शीर्ष कहलाता है। एक घनाभ 8 शीर्ष रखता है। चित्र में 8 शीर्ष A, B, C, D, E, F, G, H हैं।

### ◈ घन

यह शुगर लम्प, पाँसा आदि के आकार का होता है। एक पाँसा वर्गाकार फलकों से बना होता है।

**परिभाषा :** एक घनाभ जिसकी लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई सभी समान हो, घन कहलाता है। एक घन की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई बराबर होती है।



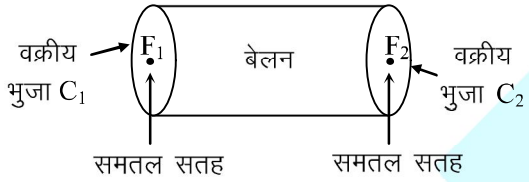

**घन के विभिन्न भाग :**

1. **फलक :** एक घन छः वर्गाकार फलक रखता है। चित्र में ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, DCGH फलक है।
2. **भुजाएँ :** एक घन 12 भुजाएँ रखता है। चित्र में 12 भुजाऐं AB, BC, CD, DA, EF, GH, FG, EH, CG, BF, AE, DH है।
3. **शीर्ष :** एक घन 8 शीर्ष रखता है। 8 शीर्ष A, B, C, D, E, F, G, H है।

### ◈ बेलन

एक ठोस आकृति जिसमें शिखर एवं तल दोनों वृत्ताकार होते है जबकि शेष सतह वक्रीय होती है।

यह ट्यूब लाईट, ड्रम, वृत्तीय स्तम्भ, वृत्तीय पाईप, वृत्तीय पेन्सिल, मापन जार, सड़क रोलर तथा गैस सिलेण्डर आदि की आकृति का होता है

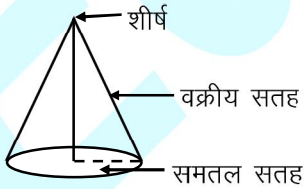



**बेलन के भाग :**

1. बेलन कोई शीर्ष नहीं रखता है।
2. एक बेलन दो वक्रीय भुजाऐं (चित्र में $C_1$ एवं $C_2$) रखता है।
3. एक बेलन एक वक्रीय फलक तथा दो समतल फलक (चित्र में $F_1$ एवं $F_2$) रखता है।

### ◈ शंकु

शंकु एक ठोस आकृति है जो आधार के रूप में समतल वृत्तीय सिरा रखता है तथा सम्पूर्ण पार्श्विक सतह वक्रीय सतह है जो एक बिन्दु में टेपरिंग (tapering) हो जाती है।

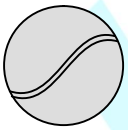



**शंकु के भाग :**

1. शंकु एक शीर्ष रखता है।
2. शंकु एक वक्रीय भुजा रखता है।
3. शंकु एक वक्रीय फलक तथा एक समतल फलक रखता है।

### ◈ गोला

एक ठोस (3-D) आकृति जो केवल वक्रीय सतह रखती है, गोला कहलाती है।



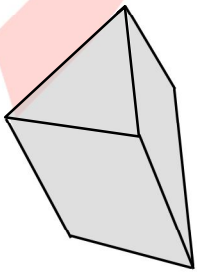
**गोले के भाग**

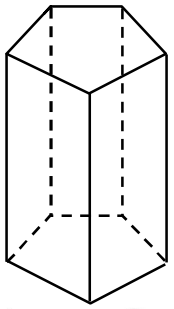
1. गोला कोई शीर्ष नहीं रखता है।
2. गोला कोई भुजा नहीं रखता है।
3. गोला एक वक्रीय सतह रखता है।

### ◈ प्रिज्म

प्रिज्म एक ठोस है जिसके आधार समान बहुभुज फलक (त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज आदि) है तथा अन्य फलक आयत है।

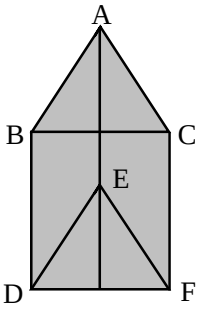
याद रखिये कि यदि प्रिज्म का आधार पंचभुज है, तब प्रिज्म पंचभुजाकार प्रिज्म कहलाता है।


प्रिज्म


पंचभुजाकार प्रिज्म

### ◈ त्रिभुजाकार प्रिज्म

एक त्रिभुजाकार प्रिज्म दो त्रिभुजों प्रत्येक सिरे पर एक तथा तीन आयतों से बना होता है। रिज् (ridge) टेन्ट त्रिभुजाकार प्रिज्म का एक उदाहरण है।




त्रिभुजाकार प्रिज्म

**त्रिभुजाकार प्रिज्म के भाग :**

**1.** यह 6 शीर्ष A, B, C, D, E तथा F रखता है।

**2.** यह 9 भुजाऐं रखता है। भुजाऐं AB, BC, AC, DE, EF, FD, BD, CF तथा AE है।

**3.** यह 5 फलक रखता है। चित्र में ABC, DEF, ABDE, AEFC, BDFC फलक है।

**नोट :**

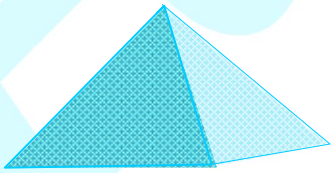
घन तथा घनाभ क्रमशः वर्गाकार प्रिज्म तथा आयताकार प्रिज्म भी कहलाते हैं।

### ◈ पिरामिड

पिरामिड एक ठोस है जिसका आधार समतल सरल रेखीय आकृति है तथा जिसके पार्श्व फलक त्रिभुजाकार है जो आधार की सतह के बाहर एक उभयानिष्ठ शीर्ष रखते है। यह आकृति सामान्यतः मिस्त्र की पुरा आकृतियों में पाई जाती है।

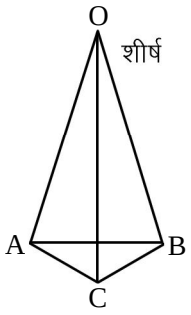
### ◈ त्रिभुजाकार पिरामिड

एक त्रिभुजाकार पिरामिड (चतुष्फलक) एक ठोस है जो एक त्रिभुजाकार आधार पर खड़ा रहता है। यह एक बिन्दु में टेपर (tapers) होता है जो पिरामिड का शीर्ष कहलाता है। एक पिरामिड त्रिभुजाकार पिरामिड कहलाता है यदि इसका आधार एक त्रिभुज है।

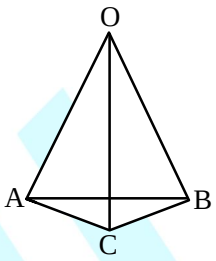


पिरामिड

एक त्रिभुजाकार पिरामिड जिसमें सभी फलक बराबर होते हैं, चतुष्फलक कहलाता है।




त्रिभुजाकार पिरामिड



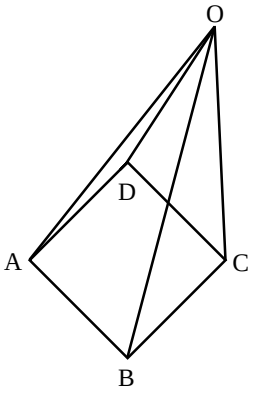

चतुष्फलक

**त्रिभुजाकार पिरामिड के भाग :**

1. यह 4 शीर्ष (चित्र में A, B, C, O) रखता है।
2. यह छः भुजाऐं रखता है। चित्र में भुजाऐं AB, BC, AC, OA, OC, OB है।
3. यह 4 त्रिभुजाकार फलक रखता है। चित्र में ABC, OAB, OCB, OAC फलक है।

### ◈ वर्गाकार पिरामिड

एक वर्गाकार पिरामिड एक ठोस है जो एक वर्गाकार आधार पर खड़ा होता है। इसके पार्श्व फलक त्रिभुजाकार हैं जो एक उभयनिष्ठ शीर्ष रखते हैं जो पिरामिड का शीर्ष कहलाता है।

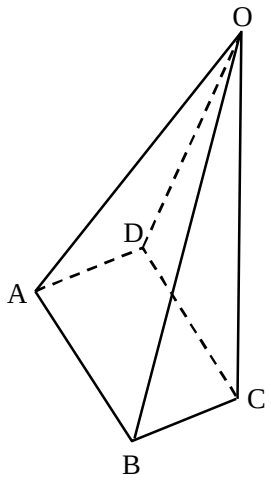



**वर्गाकार पिरामिड के भाग :**

1. यह 5 शीर्ष रखता है। चित्र में, शीर्ष O, A, B, C तथा D है।
2. यह 8 भुजाएँ रखता है। चित्र में भुजाएँ OA, OD, OC, OB, AB, BC, CD, AD है।
3. यह 5 फलक रखता है। चित्र में, 4 त्रिभुजाकार फलक तथा 1 वर्गाकार फलक है जो OAB, OBC, OAD, OCD तथा ABCD है।

### ◈ आयताकार पिरामिड

एक आयताकार पिरामिड एक ठोस है जो एक आयताकार आधार पर खड़ा होता है। यह भी एक बिन्दु में टेपर (tapers) होता है। इसके पार्श्व फलक त्रिभुजाकार है जो एक उभयनिष्ठ शीर्ष रखते हैं जो पिरामिड का शीर्ष कहलाता है।




**आयताकार पिरामिड के भाग :**

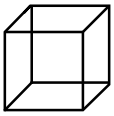
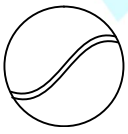
1. यह 5 शीर्ष रखता है। 2. यह 8 भुजाएँ रखता है।
3. यह 5 फलक रखता है।

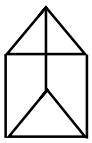
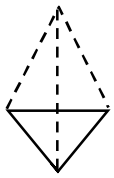
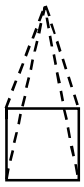
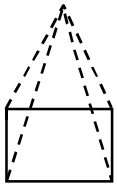
**नोट :**

(i) एक पिरामिड का नाम इसके अत्रिभुजाकार फलक की आकृति के अनुसार होता है।

(ii) एक पिरामिड (त्रिभुजाकार, आयताकार, वर्गाकार, पंचभुजाकार आदि) के सभी पार्श्व फलक त्रिभुजाकार होते हैं।

**निम्न सारणी उपरोक्त सभी प्रक्षेणों का सारांश देती है :**

| ठोस | नाम | शीर्षों की संख्या | भुजाओं की संख्या | फलकों की संख्या |
|---|---|---|---|---|
| | घनाभ | 8 | 12 | 6 |
|  | घन | 8 | 12 | 6 |
| | बेलन | – | 2 | 3 |
| | शंकु | 1 | 1 | 2 |
|  | गोला | – | – | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  | त्रिभुजाकार प्रिज्म | 6 | 9 | 5 |
|  | त्रिभुजाकार पिरामिड | 4 | 6 | 4 |
|  | वर्गाकार पिरामिड | 5 | 8 | 5 |
|  | आयताकार पिरामिड | 5 | 8 | 5 |

## ➢ जाल

एक जाल (Net) 2-D में अस्थिपंजर या कंकाल का खाका बनाने का तरीका है जिसको मोड़ने पर परिणाम 3-D आकृति होगी।

**या**

3-D आकृति का जाल वह आकृति है जिसको कागज या कार्डबोर्ड के समतल टुकड़ों में काटा जा सकता है तथा मोड़ने पर 3D-आकृति बन जाती है।

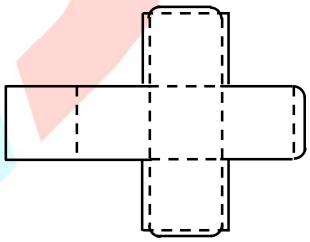
**या**

एक ठोस आकृति को मूल आकृति की कुछ भुजाओं को काटकर तथा इन्हें खोलकर समतल आकृति में बदला जा सकता है। ऐसी समतल आकृति ठोस का जाल कहलाती है।

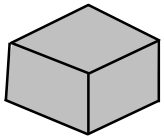
## ➢ विभिन्न 3-D आकृतियाँ बनाने के लिए जाल

### ◈ घन का जाल

निम्न चित्र एक घन का जाल है जो छः वर्गो से बना है



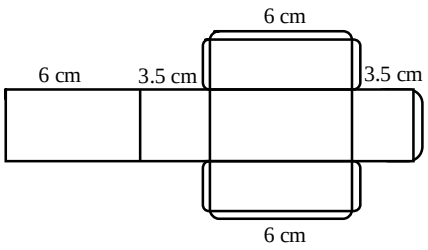
घन का जाल



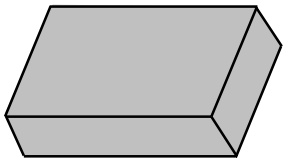
घन

### ◈ घनाभ का जाल

नीचे दी गई आकृति घनाभ का जाल है। यह सर्वांगसम आयत के दो युग्म रखती है।



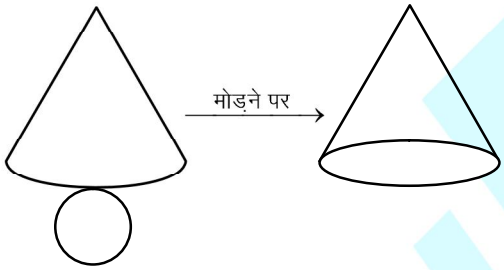

घनाभ का जाल



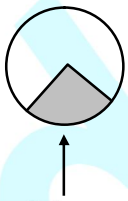
घनाभ

### ◈ शंकु का जाल

नीचे दी गई आकृति शंकु का जाल है। यह वृत्त खण्ड को काटने से प्राप्त होता है



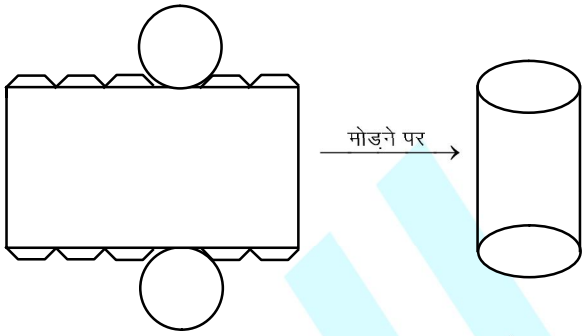

शंकु का जाल शंकु



शंकु की पार्श्विक सतह का जाल

### ◈ बेलन का जाल

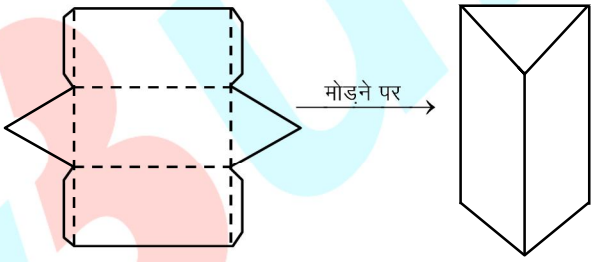
नीचे बेलन का जाल दिया गया है। यह एक आयत तथा दो सर्वांगसम वृत्त रखता है जिनकी परिधि आयत की लम्बाई के बराबर है।




बेलन का जाल बेलन

### ◈ त्रिभुजाकार प्रिज्म का जाल

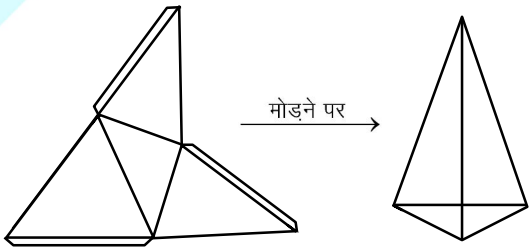
नीचे दिया गया चित्र त्रिभुजाकार प्रिज्म का जाल है। जाल तीन आयत तथा दो समबाहु त्रिभुज रखता है।




त्रिभुजाकार प्रिज्म का जाल त्रिभुजाकार प्रिज्म

### ◈ त्रिभुजाकार पिरामिड का जाल

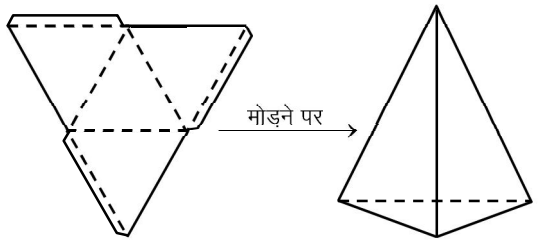
यह जाल चार त्रिभुज रखता है जिनमें से तीन समान समद्विबाहु त्रिभुज है तथा एक समबाहु त्रिभुज है।




त्रिभुजाकार पिरामिड का जाल त्रिभुजाकार पिरामिड

### ◈ चतुष्फलक का जाल

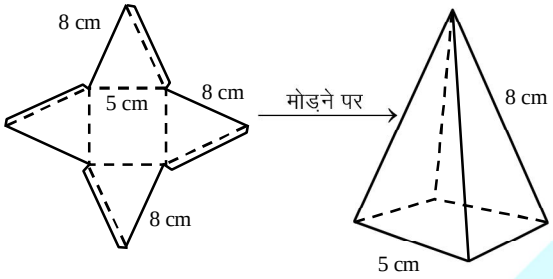
यह बनाने के लिए किसी भी माप का एक समबाहु त्रिभुज बनाओ। फिर आन्तरिक डॉटेड त्रिभुज बनाने के लिए इन भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाओ।




चतुष्फलक का जाल  चतुष्फलक

### ◈ वर्गाकार पिरामिड का जाल

यह जाल एक वर्ग रखता है जिसकी प्रत्येक भुजा पर एक समद्विबाहु त्रिभुज होता है।




वर्गाकार पिरामिड का जाल  वर्गाकार पिरामिड

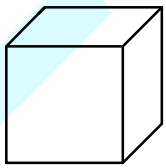
## ➤ समतल सतह पर ठोस बनाना

जब हम ठोस आकृति को बनाते हैं तो त्रिविम में प्रकट करने के लिए आकृति का कुछ रूप परिवर्तित हो जाता है चूंकि आकृति बनाने के लिए हमारी सतह कागज है जो समतल है। यह दृश्य भ्रम है। यहा 3-D आकृतियाँ बनाने की दो विधियाँ है :

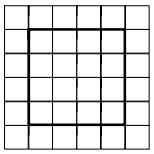
(i) तिर्यक रेखा आकृति  (ii) सममित रेखा आकृति

### ◈ तिर्यक रेखा आकृति

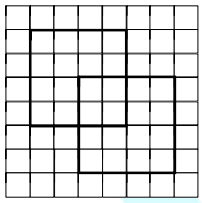
यदि हम आकृति को देखते हैं तो देखने मात्र से हम कह सकते हैं कि यह घन की आकृति है यद्यपि इसकी सभी भुजाऐं समान नहीं है। इस प्रकार की रेखा आकृति जिसके द्वारा हम दिये गये ठोस का विचार प्राप्त करते है, तिर्यक रेखा आकृति कहलाती है।



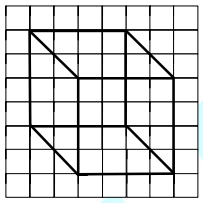
अब हम घन बनाने की तकनीक को सीखते है :



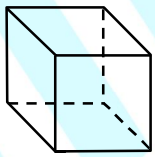
एक वर्ग बनाओ



दूसरा वर्ग बनाओ जहाँ दोनों वर्गो की दो भुजाओं के मध्य बिन्दु सम्पाती हो।

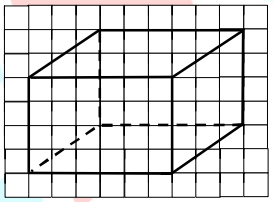


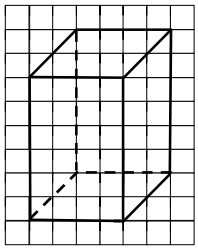
दोनों वर्गो के संगत शीर्षो को मिलाओं



घन

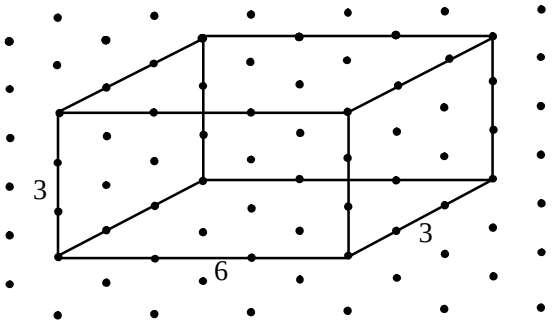
इसी प्रकार, हम वर्गाकार ग्राफ पेपर पर घनाभ बना सकते हैं :





### ◈ सममित रेखा आकृति

सममित पत्रक (शीट) एक विशेष पत्रक है जिस पर समबाहु त्रिभुज के प्रारूप में डॉट बने होते हैं। सममित पत्रक पर हम रेखाआकृति बना सकते हैं जिसमें दिये गये ठोस की माप भी सन्तुष्ट होती है।

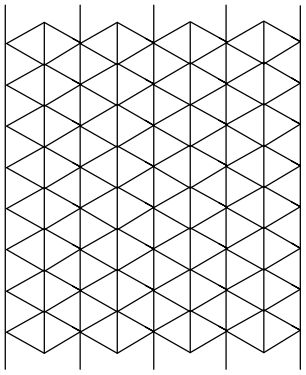



पत्रक पर रेखाऐं तीन दिशाओं में है, जिनमें से प्रत्येक एक विमा को निरूपित करती है। ऊपर तथा नीचे की रेखाऐं ऊर्ध्वाधर विमा (ऊँचाई) को निरूपित करती है। अन्य दो

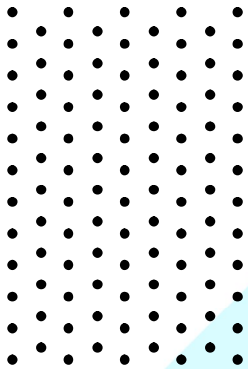
विमाए क्षैतिज विमाओं (लम्बाई तथा चौड़ाई) को निरूपित करती है। इसलिए एक 3-D आकृति बनाने के लिए हम सममित आलेख पत्रक या सममित डॉट पत्रक का उपयोग करते है।

डॉट पत्रक जिस पर समान दूरियों पर डॉट अंकित होते हैं, 3-D आकृति बनाने के लिए भी प्रयुक्त होता है। ऐसा पत्रक सममित डॉट पत्रक कहलाता है।

नीचे प्रत्येक का नमूना दिया गया है :

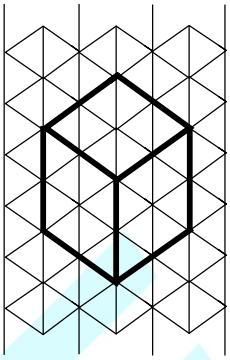


सममित आलेख पत्रक

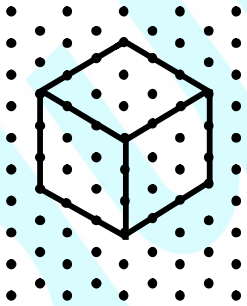


सममित डॉट पत्रक

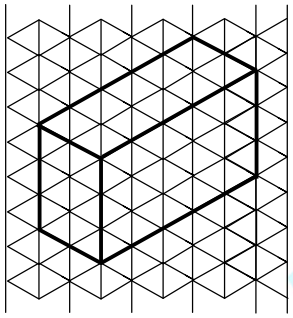
अब हम सममित डॉट पत्रक या सममित आलेख पत्रक का उपयोग कर घन तथा घनाभ बनाते हैं :



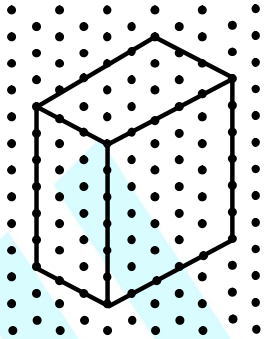
2 इकाई भुजा का घन



3 इकाई भुजा का घन



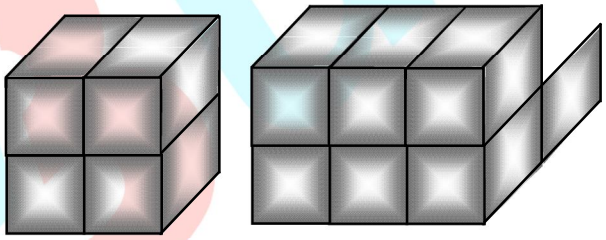
5 इकाई × 2 इकाई × 3 इकाई विमाओं का घनाभ



5 इकाई × 6 इकाई × 3 इकाई विमाओं का घनाभ

सममित पत्रक का उपयोग कर हम अन्य आकृतियाँ भी बना सकते है।

**Ex.1** निम्न चित्रों में, आकृतियों की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई ज्ञात करो :



(i) (ii)

**Sol.** स्पष्ट रूप से चित्र (i) में लम्बाई = 2 इकाई, चौड़ाई = 1 इकाई, ऊँचाई = 2 इकाई।

चित्र (ii) में, लम्बाई = 3 इकाई, चौड़ाई = 2 इकाई, ऊँचाई परिवर्तित है, सामने से यह 2 इकाई है तथा पीछे से यह 1 इकाई है।

## याद रखने के लिए महत्त्वपूर्ण बिन्दु

**1.** वृत्त, वर्ग, आयत, चतुर्भुज एवं त्रिभुज समतल आकृतियों के उदाहरण है तथा घन, घनाभ, गोला, बेलन, शंकु एवं पिरामिड ठोस आकृतियों के उदाहरण है।

**2.** समतल आकृतियाँ द्वि–विमीय (2D) है तथा ठोस आकृतियाँ त्रिविमीय (3D) है।

**3.** एक ठोस का जाल द्विविमीय कटिंग है जिसको मोड़ने पर ठोस आकृति बन जाती है। एक ही ठोस कई प्रकार के जाल रख सकता है।

**4.** एक ठोस आकृति कुछ अदृश्य भाग रख सकती है जो दिखाई नहीं देते है। इन अदृश्य भागों के दृश्याकंन के लिए सावधान रहें।

Edubull