परिमेय संख्या

6 CHAPTER

सूची

- परिभाषा
- परिमेय संख्याओं की समानता
- परिमेय संख्याओं की तुलना
- परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण
- दी गई दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्या
- परिमेय संख्याओं पर संक्रिया
- संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं का गुणन

➤ परिभाषा

एक परिमेय संख्या वह संख्या है जो $\frac{p}{q}$ रूप की हो, जहाँ p, q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है।

p अंश (N^r) कहलाता है तथा q हर (D^r) कहलाता है।

◈ परिणाम :

चूँकि प्रत्येक संख्या 1 से विभाजित होती है, अतः हम कह सकते है कि :

(i) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक परिमेय संख्या है, परन्तु प्रत्येक परिमेय संख्या एक प्राकृत संख्या होना आवश्यक नही है।

उदाहरणार्थ, $3 = \frac{3}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$, $9 = \frac{9}{1}$ आदि। परन्तु, $\frac{7}{9}, \frac{11}{13}, \frac{5}{7}$ परिमेय संख्याए है किन्तु प्राकृत संख्याए नही है।

(ii) शून्य एक परिमेय संख्या है क्योंकि $\left(0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = ...\right)$

(iii) प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है, परन्तु प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्णांक नही हो सकती।

उदाहरणार्थ, $\frac{-2}{1}, \frac{-5}{1}, \frac{0}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{1}$ आदि सभी परिमेय संख्याए है परन्तु परिमेय संख्याऐं जैसे $\frac{3}{2}, \frac{-5}{2}$, आदि पूर्णांक नहीं है।

(iv) परिमेय संख्याऐं धनात्मक तथा ऋणात्मक हो सकती है।

उदाहरणार्थ : $\frac{2}{3}, \frac{-7}{-8}, \frac{8}{11}, \frac{-9}{-3}$ आदि धनात्मक परिमेय संख्याए है तथा $\frac{-2}{3}, \frac{7}{-8}, \frac{-8}{11}, \frac{11}{-20}$ आदि ऋणात्मक परिमेय संख्याए है।

(v) प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या शून्य से बड़ी होती है।

(vi) प्रत्येक ऋणात्मक परिमेय संख्या शून्य से छोटी होती है।

(vii) प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या प्रत्येक ऋणात्मक परिमेय संख्या से बड़ी होती है।

(viii) प्रत्येक ऋणात्मक परिमेय संख्या प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या से छोटी होती है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 निम्नलिखित प्रत्येक परिमेय संख्या का अंश लिखो तथा ज्ञात कीजिए कि कौनसी धनात्मक तथा ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

(i) $\frac{-1}{-2}$ (ii) $\frac{-3}{5}$ (iii) $\frac{7}{-5}$

Sol. (i) $\frac{-1}{-2}$ में अंश –1 है। यह एक धनात्मक परिमेय संख्या है।

(ii) अंश –3 है तथा ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

(iii) अंश 7 है तथा ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

Ex.2 निम्नलिखित प्रत्येक परिमेय संख्या का हर लिखो :

(i) $\frac{-8}{3}$ (ii) $\frac{5}{-2}$ (iii) $\frac{5}{4}$

Sol. हर क्रमशः 3, –2, 4 है।

◈ तुल्य परिमेय संख्याए :

∵ परिमेय संख्या भिन्न–भिन्न अंश एवं हर के साथ लिखी जा सकती है।

उदाहरणार्थ :

$\frac{-5}{7}=\frac{-5\times 2}{7\times 2}=\frac{-10}{14}$ $\therefore \frac{-5}{7},\frac{-10}{14}$ के समान है।

$\frac{-5}{7}=\frac{-5\times 3}{7\times 3}=\frac{-15}{21}$ $\frac{-5}{7},\frac{-15}{21}$ के समान है

$\frac{-5}{7}=\frac{-5\times -1}{7\times -1}=\frac{5}{-7}$ $\frac{-5}{7},\frac{5}{-7}$ के समान है

ऐसी परिमेय संख्याएं जो एक दूसरे के समान हो, एक दूसरे के तुल्य कहलाती है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.3 $\frac{-5}{6}$ को अंश –15 की परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करो।

Sol. $\frac{-5}{6}$ के अंश एवं हर दोनों को 3 से गुणा करने पर हम पाते है कि $\frac{-5}{6}=\frac{(-5)\times 3}{6\times 3}=\frac{-15}{18}$

इसलिए, अभीष्ट परिमेय संख्या $\frac{-15}{18}$ है।

Ex.4 $\frac{2}{5}$ को तुल्य रूप में लिखो ताकि अंश –56 के बराबर हो।

Sol. $\frac{2}{5}$ के अंश एवं हर दोनों को –28 से गुणा करने पर हम पाते है कि $\frac{2\times(-28)}{5\times(-28)}=\frac{-56}{-140}$.

◈ परिमेय संख्या का लघुत्तम रूप :

एक परिमेय संख्या लघुत्तम रूप में कहलाती है यदि अंश एवं हर 1 के अतिरिक्त और कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं रखते।

❖ उदाहरण ❖

Ex.5 निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को लघुत्तम रूप में लिखो :

(i) $\frac{-36}{180}$ (ii) $\frac{-64}{256}$

Sol. (i) यहाँ 36 एवं 180 का म.स.प. (HCF) 36 है, इसलिए हम $\frac{-36}{180}$ के अंश एवं हर को 36 से विभाजित करने पर पाते है कि $\frac{-36\div 36}{180\div 36}=\frac{-1}{5}$

अतः $\frac{-36}{180}$ का लघुत्तम रूप $\frac{-1}{5}$ है।

(ii) यहाँ 64 एवं 256 का म.स.प. (HCF) 64 है।

$\frac{-64}{256}$ के अंश एवं हर को 64 से विभाजित करने पर

$\frac{-64\div 64}{256\div 64}=\frac{-1}{4}$

अतः $\frac{-64}{256}$ का लघुत्तम रूप $\frac{-1}{4}$ है।

◈ परिमेय संख्या का मानक रूप :

एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ इसके मानक रूप में कहलाती है यदि

(i) इसका हर ‘q’ धनात्मक है।

(ii) अंश एवं हर 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ट गुणनखण्ड नही रखते हैं।

उदाहरणार्थ : $\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{5}{7}$ आदि।

❖ उदाहरण ❖

Ex.6 परिमेय संख्या $\frac{5}{-7}$ को धनात्मक हर के रूप में लिखो।

Sol. $\frac{5}{-7} = \frac{5 \times (-1)}{(-7) \times (-1)} = \frac{-5}{7}$

जो कि अभीष्ट उत्तर है।

Ex.7 परिमेय संख्या $\frac{14}{-21}$ को मानक रूप में लिखो।

Sol. दी गई परिमेय संख्या $\frac{14}{-21}$ है।

1. इसका हर ऋणात्मक है। अंश एवं हर को –1 से गुणाकर इसे धनात्मक में बदलते है अर्थात्

$$\frac{14}{-21} = \frac{14 \times (-1)}{(-21) \times (-1)} = \frac{-14}{21}$$

2. **14** एवं **21** का महत्तम उभयनिष्ठ भाजक **7** है। अंश एवं हर दोनों को 7 से विभाजित करने पर

$$\frac{-14}{21} = \frac{(-14) \div 7}{21 \div 7} = \frac{-2}{3}$$

जो कि अभीष्ट उत्तर है।

Ex.8 $\frac{-144}{-504}$ को मानक रूप में व्यक्त करो।

Sol. लघुत्तम रूप में बदलने के लिए अंश एवं हर दोनो को 144 एवं 504 के महत्तम उभयनिष्ट भाजक अर्थात् 72 से विभाजित करने पर

$\frac{144 \div 72}{504 \div 72} = \frac{2}{7}$ जो कि अभीष्ट उत्तर है।

Ex.9 x का मान ज्ञात कीजिए जबकि :

(i) $\frac{-1}{5} = \frac{8}{x}$ (ii) $\frac{-48}{x} = 2.$

Sol. (i) दिया है कि, $\frac{-1}{5} = \frac{8}{x}$, वज्रगुणन से, हम पाते है कि

$(-1) \times x = 5 \times 8$

$\Rightarrow -x = 40$

दोनों पक्षों को (–1) से गुणा करने पर

$(-x) \times (-1) = 40 \times (-1)$

$x = -40.$

(ii) दिया है कि $\frac{-48}{x} = 2$ या $\frac{-48}{x} = \frac{2}{1}$, वज्र गुणन से हम पाते है कि

$-48 \times 1 = 2 \times x$ या $x = \frac{-48}{2} = -24.$

➤ परिमेय संख्याओं की समानता

विधि-1 : यदि दो या अधिक परिमेय संख्याए समान मानक रूप रखती है, तो हम कहते है कि दी गई परिमेय संख्याए समान है।

Ex.10 क्या परिमेय संख्याए $\frac{8}{-12}$ तथा $\frac{-50}{75}$ समान है ?

Sol. पहले हम दी गई इन परिमेय संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करेंगे।

प्रथम परिमेय संख्या $\frac{8}{-12}$ है।

(i) अंश एवं हर दोनों को –1 से गुणा करने पर

$$\frac{8}{-12} = \frac{8 \times (-1)}{(-12) \times (-1)} = \frac{-8}{12}$$

(ii) अंश एवं हर दोनों को 8 एवं 12 के महत्तम उभयनिष्ठ भाजक अर्थात् 4 से विभाजित करने पर

$$\frac{8}{-12} = \frac{(-8) \div 4}{12 \div 4} = \left[\frac{-2}{3}\right]$$

पुनः द्वितीय परिमेय संख्या $\frac{-50}{75}$ है।

(i) हर धनात्मक है।

(ii) अंश एवं हर दोनों को 50 एवं 75 के महत्तम उभयनिष्ठ भाजक अर्थात 25 से विभाजित करने पर

$$\frac{-50}{75} = \frac{(-50) \div 25}{75 \div 25} = \left[\frac{-2}{3}\right]$$

स्पष्टतया, दोनों परिमेय संख्याए समान मानक रूप रखती है।

अतः $\frac{8}{-12} = \frac{-50}{75}$

विधि-2 : इस विधि में दो परिमेय संख्याओं की समानता जाँचने के लिए, माना $\frac{a}{b}$ एवं $\frac{c}{d}$ हम निम्न वज्र गुणन विधि का उपयोग करते है।

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ तो } a \times d = b \times c$$

यदि a × d = b × c, तो हम कहते है कि दो परिमेय संख्याए $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ समान है।

Ex.11 परिमेय संख्याऐं $\frac{-7}{21}$ तथा $\frac{3}{-9}$ की समानता की जाँच करो।

Sol. दी गई परिमेय संख्याए $\frac{-7}{21}$ तथा $\frac{3}{-9}$ है।

वज्र गुणन से, हम पाते है कि

$(-7) \times (-9) = 21 \times 3$

अर्थात् $63 = 63$

स्पष्टतया, दोनों पक्ष समान है।

इस प्रकार, हम कह सकते है कि $\frac{-7}{21} = \frac{3}{-9}$

➤ परिमेय संख्याओं की तुलना

◈ **भिन्नों की तुलना :** दो असमान भिन्नों की तुलना करने के लिए हम प्रत्येक भिन्न को अन्य समान भिन्न के रूप में लिखते है ताकि दोनों भिन्न समान हर रखती हो। तब बड़े अंश वाली भिन्न बड़ी होगी।

उदाहरणार्थ : $\frac{7}{6}$ एवं $\frac{5}{8}$ की तुलना करने के लिए 6 एवं 8 का L.C.M. ज्ञात करते है (यह 24 है) तथा

$$\frac{7}{6} = \frac{7 \times 4}{6 \times 4} = \frac{28}{24}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$$

चूंकि $\frac{28}{24} > \frac{15}{24}$ (चूंकि 28 > 15)

$\Rightarrow \frac{7}{6} > \frac{5}{8}$

$\frac{a}{b}$ एवं $\frac{c}{d}$ के तुलना की लघु विधि है कि $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$
यदि ad > bc, $\frac{7}{6} > \frac{5}{8}$ चूंकि $(7 \times 8 > 6 \times 5)$

दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए हम उनके ऋणात्मक चिन्ह को छोड़ते हुए तुलना करते है तथा फिर क्रम को उल्टा कर देते है।

उदाहरण के लिए,

$\frac{-9}{13}$ तथा $\frac{-5}{3}$,

पहले हम $\frac{9}{13}$ तथा $\frac{5}{3}$ की तुलना करते है

$\frac{9}{13} < \frac{5}{3}$ $(\because 9 \times 3 < 13 \times 5 \Rightarrow 27 < 65)$

तथा निष्कर्ष है कि $\frac{-9}{13} > \frac{-5}{3}$

नोट : प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या ऋणात्मक परिमेय संख्या से बड़ी होती है।

◈ **पूर्णांकों की तुलना :** दिये गये पूर्णांको की तुलना के लिए यहाँ दो विधियाँ है :

(i) दो पूर्णांको को संख्या रेखा पर बिन्दुओं (माना A एवं B) से निरूपित कीजिए। दायीं ओर स्थित बिन्दु बड़ा होगा।

(ii) पूर्णांको को हम अपरिमित रूप से कई पूर्णांको के आरोही क्रम में लिखते है।

…–5,–4,–3,–2,–1,0,+1,+2,+3,+4,+5,…

स्पष्टतया, प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक (+1, +2, +3, +4) प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक(…–4, –3, –2, –1) तथा 0 से बड़ा होता है।

प्रत्येक अऋणात्मक पूर्णांक अर्थात् पूर्ण संख्या (0, +1, +2, +3, +….) प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक (…–3, –2, –1,…) से बड़ी होती है।

माना x एवं y पूर्णांक है तथा यदि $x > y \Rightarrow -x < -y$
जैसे $8 > 5 \Rightarrow -8 < -5$.

❖ उदाहरण ❖

Ex.12 दो परिमेय संख्याओं $\frac{5}{-12}$ तथा $\frac{-4}{9}$ में से कौनसी बड़ी है?

Sol. दी गई परिमेय संख्याए $\frac{5}{-12}$ तथा $\frac{-4}{9}$ है या $\frac{-5}{12}$ तथा $\frac{-4}{9}$

अब, हम परिमेय संख्याओं $\frac{-5}{12}$ तथा $\frac{-4}{9}$ को उभयनिष्ठ हर के रूप में लिखते है

$\frac{-5}{12} = \frac{(-5)\times 9}{12\times 9} = \frac{-45}{108}$ ($\frac{-4}{9}$ के हर से गुणा करने पर)

पुनः, $\frac{-4}{9} = \frac{(-4)\times 12}{9\times 12} = \frac{-48}{108}$ ($\frac{-5}{12}$ के हर से गुणा करने पर)

चूंकि $-48 < -45$, अतः

$\frac{-48}{108} < \frac{-45}{108}$ या $\frac{-4}{9} < \frac{-5}{12}$ या $\frac{-4}{9} < \frac{5}{-12}$

Ex.13 परिमेय संख्याओं $\frac{-7}{10}, \frac{5}{-8}, \frac{3}{-4}$ को आरोही क्रम में व्यवस्थित करो।

Sol. दी गई परिमेय संख्याए है :

$$\frac{-7}{10}, \frac{5}{-8}, \frac{3}{-4}$$

धनात्मक हरो के साथ दी गई परिमेय संख्याए है

$$\frac{-7}{10}, \frac{-5}{8}, \frac{-3}{4}$$

अब हम इन संख्याओं को उभयनिष्ठ हर के रूप में बदलेंगे।

इसके लिए, हम **10, 8** एवं **4** का LCM लेते है। LCM 40 है।

इसलिए, $\frac{-7}{10} = \frac{-7\times 4}{10\times 4} = \frac{-28}{40}$

$$\frac{-5}{8} = \frac{-5\times 5}{8\times 5} = \frac{-25}{40}$$

$$\frac{-3}{4} = \frac{-3\times 10}{4\times 10} = \frac{-30}{40}$$

इन संख्याओं के अंशो की तुलना करने पर हम पाते है कि $-30 < -28 < -25$.

अत: आरोही क्रम है :

$$\frac{-30}{40} < \frac{-28}{40} < \frac{-25}{40}$$

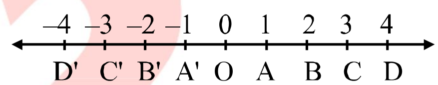
या $\frac{-3}{4} < \frac{-7}{10} < \frac{-5}{8}$

या $\frac{3}{-4} < \frac{-7}{10} < \frac{5}{-8}$.

➤ परिमेय संख्याओ का संख्या रेखा पर निरूपण

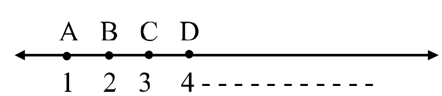
हम जानते है कि प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं तथा पूर्णाको को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। एक पूर्णाक को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए, हम एक रेखा खींचते है तथा इस पर एक बिन्दु O चुनकर '0' से निरूपित करते है।

इस बिन्दु **'O'** को हम अन्य किसी और वर्णाक्षर से भी निरूपित कर सकते है। फिर संख्या रेखा पर O के दोनों तरफ समान दूरी पर बिन्दु चिन्हित करते है। माना चित्रानुसार O के दायीं तरफ A, B, C, D बिन्दु है तथा बायीं तरफ A', B', C', D' बिन्दु है।

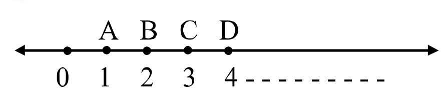


O के बायीं ओर के बिन्दु अर्थात् A', B', C', D', आदि ऋणात्मक पूर्णाको –1, –2, –3, –4 को निरूपित करते है जबकि **O** के दायीं ओर के बिन्दु अर्थात् A, B, C, D आदि धनात्मक पूर्णाको 1, 2, 3, 4 आदि को निरूपित करते है। स्पष्ट रूप से बिन्दु A एवं A क्रमशः **O** के विपरीत ओर परन्तु **O** से समान दूरी पर पूर्णाको 1 एवं – 1 को निरूपित करते है। संख्या रेखा पर B एवं B' ; C एवं C' तथा अन्य बिन्दुओं के लिए भी ऐसा सत्य है।

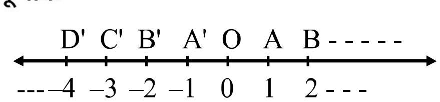
(1) प्राकृत संख्याए



(2) पूर्ण संख्याए



(3) पूर्णांक



ऋणात्मक संख्याए शून्य (0) के बायीं ओर तथा धनात्मक संख्याए दायी ओर है।

∵ ऋणात्मक संख्याए धनात्मक संख्याओं से छोटी होती है।

∴ यदि हम संख्या रेखा पर दायीं ओर से बायीं ओर चले तो हमें छोटी संख्याए प्राप्त होती है।

तथा OA = 1 की 0 से दूरी

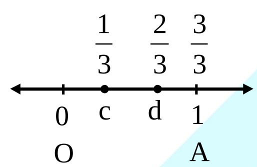
OD′ = –4 की 0 से दूरी

D'A = –4 एवं 1 के मध्य दूरी, आदि

(4) परिमेय संख्याए

(a) यदि $N^r < D^r$: रेखा खण्ड OA (अर्थात् 0 एवं 1 के मध्य दूरी) को हम हर (D^r) के बराबर, भागों में विभाजित करते है।

उदाहरण : $\frac{1}{3}$ एवं $\frac{2}{3}$ =



∵ हर 3 है, अतः OA को हम बिन्दुओं c एवं d के द्वारा तीन समान भागों में विभाजित करते है।

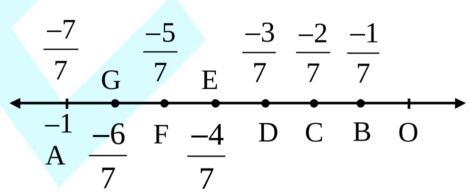
$\therefore\ c=\frac{1}{3},\ d=\frac{2}{3}$ तथा $A=\frac{3}{3}=1$

उदाहरण : $\frac{-1}{7}$ तथा $\frac{-4}{7}$

∵ हर 7 है।

∴ OA को हम B, C, D, E, F, G के द्वारा 7 समान भागों में विभाजित करते है। अतः ये बिन्दु क्रमशः $\frac{-1}{7},\frac{-2}{7},\frac{-3}{7},\frac{-4}{7},\frac{-5}{7},\frac{-6}{7},\frac{-7}{7}$ निरूपित करते है।

∴ B से $\frac{-1}{7}$ एवं E से $\frac{-4}{7}$ निरूपित है।

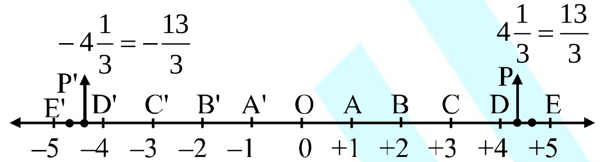


(b) यदि $N^r > D^r$

❖ उदाहरण ❖

Ex.14 $\frac{13}{3}$ तथा $-\frac{13}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करो।

Sol.



एक रेखा *l* खीचों तथा इस पर शून्य चिन्हित करो।

$$\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}=4+\frac{1}{3} \quad \text{तथा} \quad \frac{-13}{3}=-\left(4+\frac{1}{3}\right)$$

अब, O से O के दायीं ओर OA, AB, BC, CD तथा DE इस प्रकार चिन्हित करो कि

OA = AB = BC = CD = DE = 1 इकाई

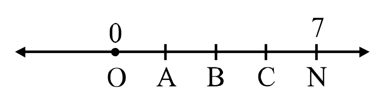
स्पष्ट रूप से,

बिन्दु A,B,C,D,E क्रमशः परिमेय संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5 को निरूपित करते है।

चूंकि यहाँ हमारे पास 4 पूर्ण इकाईयाँ तथा पाँचवी इकाई के भाग है, अतः पाँचवी इकाई DE को 3 समान भागों में विभाजित करते है। इन 3 भागों में से 1 भाग लेते है। तब बिन्दु P संख्या रेखा पर संख्या $\frac{13}{3}$ का निरूपण है। इसी प्रकार, O के बायीं ओर 4 पूर्ण इकाई लम्बाईया लेते है तथा पाँचवी इकाई D'E' को 3 समान भागो में विभाजित करते है। इन तीन समान भागों में से 1 भाग लेते है। इस प्रकार P' परिमेय संख्या $-\frac{13}{3}$ को निरूपित करता है।

Ex.15 परिमेय संख्या $\frac{7}{4}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करो।

Sol. माना N संख्या रेखा पर पूर्णांक 7 को निरूपित करने वाला बिन्दु है तथा O के दायी ओर स्थित है। रेखा खण्ड ON को चार ($\frac{7}{4}$ के हर) समान भागों (पैमाने की सहायता से) में विभाजित करते है। माना A, B, C चित्रानुसर विभाजन के बिन्दु है।



तब OA = AB = BC = CN

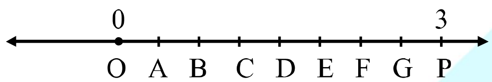
अतः बिन्दु A परिमेय संख्या $\frac{7}{4}$ को निरूपित करता है।

इसीप्रकार $\frac{-7}{4}$ संख्या रेखा पर 'O' के बायीं ओर निरूपित की जा सकती है।

Ex.16 संख्या रेखा खींचो तथा निम्न परिमेय संख्याओं को इस पर निरूपित करो :

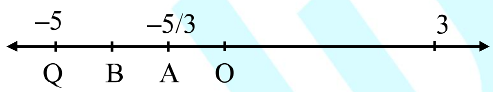
(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $-\frac{5}{3}$

Sol. (i) $\frac{3}{8}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए, पहले हम एक रेखा खींचते है तथा इस पर '0' (शून्य) को निरूपित करने के लिए बिन्दु O चिन्हित करते है। चित्रानुसार संख्या रेखा पर धनात्मक पूर्णांक 3 को निरूपित करने के लिए बिन्दु P लेते है।



अब रेखाखण्ड OP को 8 समान भागों में विभाजित करते है। माना A एवं B विभाजन के बिन्दु है ताकि OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GP है। निर्माण से OA, OP का $\frac{1}{8}$ है। अतः A परिमेय संख्या $\frac{3}{8}$ को निरूपित करता है।

(ii)



➤ दी गई दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्या

यदि x एवं y कोई दो परिमेय संख्याए इस प्रकार है कि $x < y$, तब $x < \frac{x+y}{2} < y$ या यह परिमेय संख्या $\frac{x+y}{2}$, x एवं y के मध्य स्थित है।

नोट : किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमित परिमेय संख्याए होती है। किन्ही दो असमान परिमेय संख्याओं के मध्य एक परिमेय संख्या हमेशा होती है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.17 $\frac{1}{2}$ एवं $\frac{1}{3}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्याए लिखो।

Sol. $\frac{1}{2}$ एवं $\frac{1}{3}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्याए ज्ञात करने के लिए 2 एवं 3 का उच्च उभयनिष्ट गुणज लेते है जो 36 है। तब $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{12} = \frac{12}{36}$ तथा $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{18}{18} = \frac{18}{36}$

अतः $\frac{1}{2}$ एवं $\frac{1}{3}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्याऐं $\frac{13}{36}, \frac{14}{36}, \frac{15}{36}, \frac{16}{36}$ तथा $\frac{17}{36}$ है।

Ex.18 निम्नलिखित प्रारूप में तीन और संख्याए लिखो :

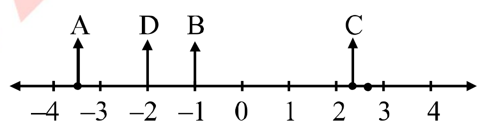
$$\frac{-2}{5}, \frac{-4}{10}, \frac{-6}{15}, \frac{-8}{20}, ...$$

Sol. $\frac{-4}{10} = \frac{-2\times 2}{5\times 2}$, $\frac{-6}{15} = \frac{-2\times 3}{5\times 3}$, $\frac{-8}{20} = \frac{-2\times 4}{5\times 4}$

इस प्रकार, हम इन संख्याओं में प्रारूप का पता लगाते है। अन्य संख्याए होगी

$$\frac{-2\times 5}{5\times 5} = \frac{-10}{25}, \frac{-2\times 6}{5\times 6} = \frac{-12}{30}, \frac{-2\times 7}{5\times 7} = \frac{-14}{35}.$$

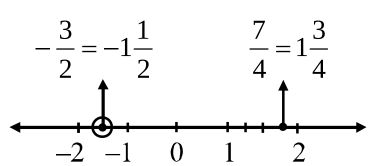
Ex.19 निम्न चित्र में A, B, C, D के द्वारा व्यक्त परिमेय संख्याए लिखो।



Sol. $A \to -3\frac{1}{2}$, $B \to -1$, $C \to 2\frac{1}{3}$, $D \to -2$.

Ex.20 $\frac{-3}{2}, \frac{+7}{4}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करो।

Sol. हम लिख सकते है $\frac{-3}{2} = -\left(1+\frac{1}{2}\right), \frac{7}{4} = \left(1+\frac{3}{4}\right)$



Ex.21 धनात्मक एवं ऋणात्मक परिमेय संख्याए बताईए :

$\frac{7}{8}, \frac{5}{-4}, \frac{-8}{3}, \frac{-5}{-7}, \frac{-3}{8}, \frac{7}{-4}, \frac{-1}{-22}, \frac{-9}{+4}.$

Sol. ऋणात्मक परिमेय संख्याए

$= \frac{5}{-4}, \frac{-8}{3}, \frac{-3}{8}, \frac{7}{-4}, \frac{-9}{4}.$

धनात्मक परिमेय संख्याए $= \frac{7}{8}, \frac{-5}{-7}, \frac{-1}{-22}$

Ex.22 $\frac{-2}{-5}, \frac{2}{16}, \frac{64}{-128}$ को मानक रूप में व्यक्त करो।

Sol. $\frac{-2}{-5} = \frac{-2\times -1}{-5\times -1} = \frac{2}{5}$

$\frac{2}{16} = \frac{2\div 2}{16\div 2} = \frac{1}{8}$ ($\because$ 2 एवं 16 का H.C.F.= 2)

$\frac{64}{-128} = \frac{64\div(-64)}{(-128)\div(-64)} = \frac{-1}{2}$

($\because$ 64 एवं 128 का H.C.F = 64)

Ex.23 निम्नलिखित के तुल्य दो परिमेय संख्याए लिखो

(i) $\frac{-8}{9}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{5}{-6}$ (iv) $\frac{-3}{7}$

Sol. (i) $\frac{-8}{9}$ के तुल्य परिमेय संख्याए $\frac{-16}{18}, \frac{-24}{27}$ आदि है

(ii) $\frac{2}{11}$ के तुल्य परिमेय संख्याऐं $\frac{4}{22}, \frac{6}{33}$ आदि है

(iii) $\frac{5}{-6}$ के तुल्य परिमेय संख्याऐं $\frac{10}{-12}, \frac{15}{-18}$ आदि है

(iv) $\frac{-3}{7}$ के तुल्य परिमेय संख्याएं $\frac{-6}{14}, \frac{-9}{21}$ आदि है

Ex.24 खाली बॉक्सो में >, < या = में से सही संकेत भरो :

(i) 0 ☐ $\frac{8}{9}$ (ii) 2 ☐ $\frac{-4}{7}$

(iii) 0 ☐ $+\frac{1}{7}$

Sol. (i) 0 [<] $\frac{8}{9}$ (ii) 2 [>] $\frac{-4}{7}$

(iii) 0 [<] $+\frac{1}{7}$

Ex.25 $\frac{1}{4}$ एवं $\frac{1}{5}$ के मध्य दो परिमेय संख्याए ज्ञात करो।

Sol. $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{5}$ के मध्य दो परिमेय संख्याए अर्थात्

$\frac{5}{20}, \frac{4}{20}$ के मध्य दो परिमेय संख्याऐं अर्थात्

$\frac{50}{200}, \frac{40}{200}$ के मध्य दो परिमेय संख्याऐं अर्थात्

$\frac{41}{200}, \frac{42}{200}, \ldots\ldots, \frac{49}{200}$ (कोई दो)

Ex.26 निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही तथा अवरोही क्रम में लिखो :

$\frac{-6}{5}, \frac{1}{5}, \frac{0}{5}, \frac{-3}{-5}.$

Sol. आरोही क्रम : $\frac{-6}{5}, \frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-3}{-5}.$

अवरोही क्रम : $\frac{-3}{-5}, \frac{1}{5}, \frac{0}{5}, \frac{-6}{5}.$

Ex.27 $\frac{-2}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

Sol. दी गई परिमेय संख्याए $\frac{-2}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ है।

तब $\frac{-2}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ के मध्य एक परिमेय संख्या निम्न विधि से ज्ञात की जा सकती है :

(दो परिमेय संख्याओं का योग) ÷ 2

$\left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{4}\right) \div 2 = \left(\frac{-8+3}{12}\right) \div 2 = \frac{-5}{12} \div 2$

$= \frac{-5}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{-5\times 1}{12\times 2} = \frac{-5}{24}$

अतः, $\frac{-2}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ के मध्य परिमेय संख्या $\frac{-5}{24}$ है।

Ex.28 $\frac{-7}{6}$ तथा $\frac{-6}{7}$ के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात करो।

Sol. (दो परिमेय संख्याओं का योग) ÷ 2

$$\left[\frac{-7}{6}+\left(\frac{-6}{7}\right)\right]\div 2=\left(\frac{-49+(-36)}{42}\right)\div 2$$

[6 तथा 7 का LCM 42 है]

$$=\left(\frac{-49-36}{42}\right)\div 2=\frac{-85}{42}\div 2=\frac{-85}{42}\times\frac{1}{2}=\frac{-85}{84}.$$

अतः $\frac{-7}{6}$ तथा $\frac{-6}{7}$ के मध्य एक परिमेय संख्या $\frac{-85}{84}$ है।

Ex.29 $\frac{-3}{11}$ तथा $\frac{8}{11}$ के मध्य दस परिमेय संख्याए ज्ञात कीजिए।

Sol. हम जानते है कि

$-3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8$

यह हमें –3 तथा 8 के मध्य 10 पूर्णांक देता है।

अतः $\frac{-2}{11},\frac{-1}{11},0,\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11},\frac{6}{11},\frac{7}{11}$ दस अभीष्ट परिमेय संख्याए है।

➤ परिमेय संख्याओं पर संक्रिया

परिमेय संख्याओं पर चार मूलभूत संक्रियाए है :

(i) योग (ii) व्यवकलन (iii) गुणा (iv) भाग

(i) योग : यदि दो परिमेय संख्याओं को जोड़ा जाता है, तो पहले हम उनमें से प्रत्येक को धनात्मक हर की परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करते है।

यहाँ दो सम्भावनाए हैं :

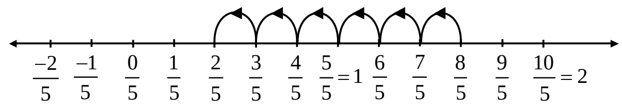
(1) या तो वे समान हर रखती है, या

(2) वे भिन्न–भिन्न हर रखती है।

◈ समान हर वाली परिमेय संख्याए :

माना हमें $\frac{8}{5}$ तथा $\frac{-6}{5}$ को जोड़ना है।

संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करने पर



यहाँ, दो क्रमागत बिन्दुओं के मध्य दूरी $\frac{1}{5}$ है। $\frac{-6}{5}$ के लिए $\frac{8}{5}$ के बायीं ओर 6 पद चलने पर हम $\frac{2}{5}$ पर पहुँचते है।

अतः $\frac{8}{5}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\frac{8+(-6)}{5}=\frac{2}{5}$

❖ उदाहरण ❖

Ex.30 $\frac{-5}{9}$ तथा $\frac{-17}{9}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. दी गई परिमेय संख्याए $\frac{-5}{9}$ तथा $\frac{-17}{9}$ है।

इन दोनों संख्याओं को जोड़ने पर, हम पाते है कि

$$\frac{(-5)}{9}+\frac{(-17)}{9}=\frac{(-5)+(-17)}{9}=\frac{-22}{9}$$

Ex.31 $\frac{-23}{28}$ तथा $\frac{5}{-28}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. पहले हम $\frac{5}{-28}$ को धनात्मक हर की परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करेंगे।

अतः $\frac{5\times(-1)}{(-28)\times(-1)}=\frac{-5}{28}$

अब, $\frac{-23}{28}+\left(\frac{-5}{28}\right)=\frac{-23}{28}-\frac{5}{28}$

[चूंकि (+) × (–) = –]

$$=\frac{-23-5}{28}=\frac{-28}{28}=-1$$

◈ भिन्न-भिन्न हरों वाली परिमेय संख्याओं का योग :

इस स्थिति में, हम दी गई परिमेय संख्याओं को उभयनिष्ठ हर के रूप में परिवर्तित करते है तथा फिर जोड़ते है।

Ex.32 $\frac{8}{-5}$ तथा $\frac{4}{-3}$ का योगफल ज्ञात करो।

Ex.28 $\frac{-7}{6}$ तथा $\frac{-6}{7}$ के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात करो।

Sol. (दो परिमेय संख्याओं का योग) ÷ 2

$$\left[\frac{-7}{6}+\left(\frac{-6}{7}\right)\right]\div 2=\left(\frac{-49+(-36)}{42}\right)\div 2$$

[6 तथा 7 का LCM 42 है]

$$=\left(\frac{-49-36}{42}\right)\div 2=\frac{-85}{42}\div 2=\frac{-85}{42}\times\frac{1}{2}=\frac{-85}{84}.$$

अतः $\frac{-7}{6}$ तथा $\frac{-6}{7}$ के मध्य एक परिमेय संख्या $\frac{-85}{84}$ है।

Ex.29 $\frac{-3}{11}$ तथा $\frac{8}{11}$ के मध्य दस परिमेय संख्याए ज्ञात कीजिए।

Sol. हम जानते है कि

$-3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8$

यह हमें –3 तथा 8 के मध्य 10 पूर्णांक देता है।

अतः $\frac{-2}{11},\frac{-1}{11},0,\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11},\frac{6}{11},\frac{7}{11}$ दस अभीष्ट परिमेय संख्याए है।

➤ परिमेय संख्याओं पर संक्रिया

परिमेय संख्याओं पर चार मूलभूत संक्रियाए है :

(i) योग (ii) व्यवकलन (iii) गुणा (iv) भाग

(i) योग : यदि दो परिमेय संख्याओं को जोड़ा जाता है, तो पहले हम उनमें से प्रत्येक को धनात्मक हर की परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करते है।

यहाँ दो सम्भावनाए हैं :

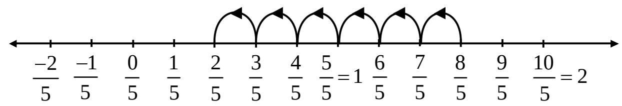
(1) या तो वे समान हर रखती है, या

(2) वे भिन्न–भिन्न हर रखती है।

◈ समान हर वाली परिमेय संख्याए :

माना हमें $\frac{8}{5}$ तथा $\frac{-6}{5}$ को जोड़ना है।

संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करने पर



यहाँ, दो क्रमागत बिन्दुओं के मध्य दूरी $\frac{1}{5}$ है। $\frac{-6}{5}$ के लिए $\frac{8}{5}$ के बायीं ओर 6 पद चलने पर हम $\frac{2}{5}$ पर पहुँचते है।

अतः $$\frac{8}{5}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\frac{8+(-6)}{5}=\frac{2}{5}$$

❖ उदाहरण ❖

Ex.30 $\frac{-5}{9}$ तथा $\frac{-17}{9}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. दी गई परिमेय संख्याए $\frac{-5}{9}$ तथा $\frac{-17}{9}$ है।

इन दोनों संख्याओं को जोड़ने पर, हम पाते है कि

$$\frac{(-5)}{9}+\frac{(-17)}{9}=\frac{(-5)+(-17)}{9}=\frac{-22}{9}$$

Ex.31 $\frac{-23}{28}$ तथा $\frac{5}{-28}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. पहले हम $\frac{5}{-28}$ को धनात्मक हर की परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करेंगे।

अतः $$\frac{5\times(-1)}{(-28)\times(-1)}=\frac{-5}{28}$$

अब, $$\frac{-23}{28}+\left(\frac{-5}{28}\right)=\frac{-23}{28}-\frac{5}{28}$$

[चूंकि (+) × (–) = –]

$$=\frac{-23-5}{28}=\frac{-28}{28}=-1$$

◈ भिन्न-भिन्न हरों वाली परिमेय संख्याओं का योग :

इस स्थिति में, हम दी गई परिमेय संख्याओं को उभयनिष्ठ हर के रूप में परिवर्तित करते है तथा फिर जोड़ते है।

Ex.32 $\frac{8}{-5}$ तथा $\frac{4}{-3}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. दी गई परिमेय संख्याए $\frac{8}{-5}$ तथा $\frac{4}{-3}$ है।

स्पष्ट रूप से वे भिन्न–भिन्न हर रखती है। यहाँ, पहले हम दी गई परिमेय संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करते है।

अर्थात् $\frac{8}{-5} = \frac{8\times(-1)}{(-5)\times(-1)} = \frac{-8}{5}$

तथा $\frac{4}{-3} = \frac{4\times(-1)}{(-3)\times(-1)} = \frac{-4}{3}$

अब $\frac{8}{-5} + \frac{4}{-3} = \frac{(-8)}{5} + \frac{(-4)}{3}$

समान हरों मे बदलने पर

$$\frac{-8}{5} = \frac{(-8)\times 3}{5\times 3} = \frac{-24}{15}$$

तथा $\frac{-4}{3} = \frac{(-4)\times 5}{3\times 5} = \frac{-20}{15}$

अतः $\frac{-8}{5} + \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{-24}{15} + \left(\frac{-20}{15}\right)$

$= \frac{(-24)+(-20)}{15} = \frac{-44}{15}$

जो कि अभीष्ट उत्तर है।

Ex.33 योगफल ज्ञात करो : $\frac{8}{10}, 3$

Sol. हम 3 को $\frac{3}{1}$ लिख सकते है।

$\frac{3}{1}$ के अंश तथा हर दोनों को 10 से गुणा करने पर

हम पाते है कि $\frac{3}{1} = \frac{3\times 10}{1\times 10} = \frac{30}{10}$

इसलिए $\frac{8}{10} + 3 = \frac{8}{10} + \frac{3}{1} = \frac{8}{10} + \frac{30}{10}$

$= \frac{8+30}{10} = \frac{38}{10} = \frac{19}{5}$

जो कि अभीष्ट उत्तर है।

Ex.34 सरल कीजिए : $\frac{4}{3} + \frac{3}{5} + \frac{-2}{5} + \frac{-11}{3}$

Sol. $\frac{4}{3} + \frac{3}{5} + \frac{-2}{5} + \frac{-11}{3} = \left(\frac{4}{3} + \frac{-11}{3}\right) + \left(\frac{3}{5} + \frac{-2}{5}\right)$

$= \frac{4-11}{3} + \frac{3-2}{5} = \frac{-7}{3} + \frac{1}{5} = \frac{-7\times 5}{3\times 5} + \frac{1\times 3}{5\times 3}$

(समान हर में परिवर्तित करने पर)

$= \frac{-35}{15} + \frac{3}{15} = \frac{-32}{15}.$

Ex.35 $\frac{7}{9}$ तथा $\frac{-5}{9}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. $\frac{7}{9} + \left(\frac{-5}{9}\right) = \frac{7+(-5)}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}.$

> यदि परिमेय संख्या का हर ऋणात्मक है, तो पहले हम इसे (हर) धनात्मक बनाते है तथा फिर जोड़ते है।

Ex.36 $\frac{6}{-5}$ तथा $\frac{4}{5}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. $\frac{6}{-5} + \frac{4}{5} = \frac{-6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{-6+4}{5} = \frac{-2}{5}.$

Ex.37 $\frac{-8}{5}$ तथा $\frac{-5}{3}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. 5 तथा 3 का LCM 15 है,

$\frac{-8}{5} = \frac{-8\times 3}{5\times 3} = \frac{-24}{15}$

$\Rightarrow \frac{-5}{3} = \frac{-5\times 5}{3\times 5} = \frac{-25}{15}$

अतः $\frac{-8}{5} + \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{-24}{15} + \left(\frac{-25}{15}\right) = \frac{-24-25}{15}$

$\frac{-8}{5} + \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{-49}{15}$

Note : परिमेय संख्याओं का योगफल संवृत (योग भी परिमेय होता है) क्रमविनिमेय (a + b = b + a) तथा साहचर्य (a + (b + c)) = ((a + b) + c) होता है।

◈ **योज्य प्रतिलोम :**

एक परिमेय संख्या की ऋणात्मक संख्या दी गई संख्या का योज्य प्रतिलोम कहलाता है।

परिमेय संख्या	योज्य प्रतिलोम
$\frac{x}{y}$	$\frac{-x}{y}$
$\frac{-3}{7}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{13}{17}$	$\frac{-13}{17}$

नोट : केवल शून्य एक ऐसी परिमेय संख्या है जो इसकी सम ऋणात्मक या योज्य प्रतिलोम है।

(ii) व्यवकलन : यदि हम एक परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम तथा अन्य परिमेय संख्या को जोड़ते हैं तो यह दो परिमेय संख्याओं का व्यवकलन कहलाता है। अतः व्यवकलन योग की प्रतिलोम संक्रिया है तथा पद योग को व्यवकलन के लिए ऋणात्मक लेते हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.38 $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$ का मान ज्ञात करो।

Sol. $\frac{2}{3}$ + $\frac{4}{5}$ का योज्य प्रतिलोम

$$= \frac{2}{3}+\left(\frac{-4}{5}\right)=\frac{2\times5}{3\times5}+\left(\frac{-4\times3}{5\times3}\right)$$

$$= \frac{10}{15}+\frac{-12}{15}=\frac{10+(-12)}{15}$$

$$= \frac{-2}{5}.$$

Ex.39 $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{3}\right)$ का मान ज्ञात करो।

Sol. $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{3}\right)$ का योज्य प्रतिलोम

$$= \frac{2}{7}+\frac{5}{3}$$

$$= \frac{2\times3}{7\times3}+\frac{5\times7}{3\times7}$$

$$= \frac{6}{21}+\frac{35}{21}=\frac{6+35}{21}=\frac{41}{21}.$$

Ex.40 $\frac{-3}{7}$ में से $\frac{-5}{8}$ घटाओं।

Sol. दी गई परिमेय संख्याए $\frac{-5}{8}$ तथा $\frac{-3}{7}$ है।

इसलिए,

$$\frac{-3}{7}-\left(\frac{-5}{8}\right)=\frac{-3}{7}+\frac{5}{8}$$

$$=\frac{-24}{56}+\frac{35}{56}=\frac{-24+35}{56}=\frac{11}{56}$$

Ex.41 सरल कीजिए : $\frac{1}{6}+\frac{-2}{5}-\frac{-2}{15}$

Sol. यहाँ,

$$\frac{1}{6}+\frac{-2}{5}-\frac{-2}{15}=\frac{1}{6}-\frac{2}{5}+\frac{2}{15}$$

$$\left[\because\ -\left(\frac{-2}{15}\right)=\frac{2}{15}\right]$$

$$= \frac{1\times5-2\times6+2\times2}{30}\quad \text{[LCM of 6, 5, 15 is 30]}$$

$$= \frac{5-12+4}{30}=\frac{9-12}{30}=\frac{-3}{30}=\frac{-1}{10}$$

Ex.42 $\frac{-5}{8}$ में कौनसी संख्या जोड़ी जाए ताकि योगफल $\frac{5}{9}$ हो ?

Sol. $\frac{5}{9}$ में से $\frac{-5}{8}$ घटाने पर अभीष्ट संख्या प्राप्त होगी।

अतः, $\frac{5}{9}-\left(\frac{-5}{8}\right)=\frac{5}{9}+\frac{5}{8}=\frac{5\times8+5\times9}{72}$

$$=\frac{40+45}{72}=\frac{85}{72}$$

इसलिए, अभीष्ट संख्या $\frac{85}{72}$ है।

Ex.43 $\frac{-5}{33}$ प्राप्त करने के लिए $\frac{27}{11}$ में से कौनसी संख्या घटाई जानी चाहिए ?

Sol. दी गई संख्या तथा अभीष्ट संख्या का अन्तर = $\frac{-5}{33}$

दी गई संख्या = $\frac{27}{11}$

इसलिए, $\frac{27}{11}-\frac{-5}{33}=\frac{27}{11}+\frac{5}{33}$

$=\frac{27\times 3+5\times 1}{33}=\frac{81+5}{33}=\frac{86}{33}$

अतः, अभीष्ट संख्या $\frac{86}{33}$ है।

Ex.44 दो परिमेय संख्याओं का योगफल $\frac{-3}{5}$ है। यदि उनमें से एक संख्या $\frac{-9}{10}$ है तो दूसरी संख्या ज्ञात करो।

Sol. दिया है कि संख्याओ का योगफल = $\frac{-3}{5}$

एक संख्या = $\frac{-9}{10}$

दूसरी संख्या = संख्याओ का योगफल – एक संख्या

$=\frac{-3}{5}-\frac{-9}{10}=\frac{-3}{5}+\frac{9}{10}$

$=\frac{-3\times 2+9\times 1}{10}$

$=\frac{-6+9}{10}=\frac{3}{10}$

अतः, अभीष्ट संख्या $\frac{3}{10}$ है।

(iii) गुणा :

(a) माना $\frac{a}{b}$ तथा c दो परिमेय संख्याए है, तब $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$

उदाहरण : $\frac{-5}{7}$ एवं 9 का गुणनफल ज्ञात करो।

$\frac{-5}{7}\times 9=\frac{-5}{7}\times\frac{9}{1}=\frac{-5\times 9}{7\times 1}=\frac{-45}{7}$

(b) जब हम दो परिमेय संख्याओं को गुणा करते है :

अर्थात् $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}=\frac{ac}{bd}$

उदाहरण : $\frac{1}{2}\times\frac{-3}{4}=\frac{1\times(-3)}{2\times 4}=\frac{-3}{8}$

(i) दो परिमेय संख्याओं को गुणा करने पर हम परिणाम भी परिमेय संख्या ही प्राप्त करते है।

जैसे : $\frac{-3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{-3\times 5}{4\times 7}=\frac{-15}{28}$ (संवृत गुणधर्म)

(ii) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$ (क्रमविनिमेय अर्थात् क्रम बदलने पर भी परिणाम समान रहता है)

(iii) $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{5}$ (साहचर्य)

(iv) यदि 0 को किसी भी परिमेय संख्या से गुणा किया जाए, तो परिणाम हमेशा शून्य ही होता है। जैसे :

(a) $0\times\frac{4}{5}=\frac{0\times 4}{5}=\frac{0}{5}=0$

(b) $\frac{-2}{3}\times 0=\frac{-2\times 0}{3}=\frac{0}{3}=0$

(iv) भाग :

(a) माना $\frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है तब इसका व्युत्क्रम $\frac{b}{a}$ होगा।

(i) एक परिमेय संख्या का इसके व्युत्क्रम से गुणनफल हमेशा 1 होता है।

उदाहरण के लिए,

(a) $\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=1$ (b) $\frac{-3}{8}\times\frac{-8}{3}=1$

(ii) शून्य का कोई व्युत्क्रम नहीं होता है चूंकि 0 $\left(\frac{0}{1}\right)$ का व्युत्क्रम $\frac{1}{0}$ है (जो कि परिभाषित नही है)

(iii) एक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम उस परिमेय संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम कहलाता है।

(iv) केवल 1 तथा –1 परिमेय संख्याए ऐसी है जो उनकी अपनी व्युत्क्रम है।

1 का व्युत्क्रम = $\frac{1}{1}=1.$

–1 का व्युत्क्रम = $\frac{1}{-1}=-1$

(v) एक धनात्मक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम धनात्मक होता है तथा ऋणात्मक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम ऋणात्मक होता है।

एक परिमेय संख्या को दूसरी परिमेय संख्याओं से विभाजित करने के लिए हम परिमेय संख्या को दूसरी परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते है अर्थात् $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$

$= \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ का व्युत्क्रम $= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

उदाहरण के लिए, $\frac{5}{-6} \div \frac{-3}{+2}$

$\frac{5}{-6} \div \frac{-3}{2} = \frac{5}{-6} \times \left(\frac{-3}{2}\right)$ का व्युत्क्रम

$= \frac{5}{-6} \times \frac{+2}{-3}$

$= \frac{5 \times 2}{-6 \times (-3)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$

(vi) शून्य में किसी भी परिमेय संख्या का भाग देने पर हमेशा शून्य ही प्राप्त होता है।

उदाहरण के लिए, $0 \div \frac{2}{5} = 0$; $0 \div \frac{-3}{8} = 0$

नोट :

(i) जब एक परिमेय संख्या (शून्य के अतिरिक्त) को अन्य परिमेय संख्या (0 के अतिरिक्त) से विभाजित किया जाता है तो भागफल हमेशा एक परिमेय संख्या होती है। (भाग के अन्तर्गत संवृत)

अर्थात् $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{ad}{bc}\right)$ भी एक परिमेय संख्या है।

(ii) किसी भी परिमेय संख्या का स्वयं से विभाजन, भागफल 1 देता है।

उदाहरण के लिए, $\frac{4}{5} \div \frac{4}{5} = 1.$

(iii) जब एक परिमेय संख्या को 1 से विभाजित करते है, तो भागफल स्वयं वह परिमेय संख्या ही होती है।

उदाहरण के लिए, $\frac{3}{4} \div 1 = \frac{3}{4}.$

❖ उदाहरण ❖

Ex.45 निम्नलिखित योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{6}{4} + \left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{7}{3} + \frac{3}{7}$

(iii) $\frac{-4}{3} + 0$ (iv) $-3\frac{1}{3} + 2\frac{4}{5}$

(v) $\frac{-4}{19} + \frac{(-3)}{57}.$

Sol. (i) $\frac{6}{4} + \left(\frac{-11}{4}\right) = \frac{6 + (-11)}{4} = \frac{6 - 11}{4} = \frac{-5}{4}.$

(ii) $\frac{7}{3} + \frac{3}{7}$

$\frac{7}{3} = \frac{7 \times 7}{3 \times 7} = \frac{49}{21}$ (3 एवं 7 का L.C.M. = 21)

$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} = \frac{9}{21}$

अतः $\frac{7}{3} + \frac{3}{7} = \frac{49}{21} + \frac{9}{21} = \frac{49 + 9}{21} = \frac{58}{21}.$

वैकल्पिक विधि :

$\frac{7}{3} + \frac{3}{7}$

$= \frac{7 \times (7) + 3 \times (3)}{21}$ ($\because$ 3 एवं 7 का L.C.M. = 21)

$= \frac{49 + 9}{21} = \frac{58}{21}.$

(iii) $\frac{-4}{3} + 0 = \frac{-4}{3} + \frac{0}{3} = \frac{(-4) + 0}{3} = \frac{-4}{3}.$

(iv) $-3\frac{1}{3} + 2\frac{4}{5}$

$= \frac{-10}{3} + \frac{14}{5} = \frac{-10 \times 5 + 14 \times 3}{15}$

($\because$ 3 एवं 5 का LCM = 15)

$= \frac{-50 + 42}{15} = \frac{-8}{15}.$

(v) $\frac{-4}{19} + \frac{(-3)}{57}$

$$= \frac{-4\times3+(-3)\times1}{57} = \frac{-12+(-3)}{57}$$

($\because$ 19 एवं 57 का LCM = 57)

$$= \frac{-12-3}{57} = \frac{-15}{57}.$$

Ex.46 निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5}{24}-\frac{13}{36}$ (ii) $\frac{4}{63}-\left(\frac{-5}{21}\right)$

(iii) $\frac{-7}{13}-\left(\frac{-6}{25}\right)$ (iv) $\frac{-5}{8}-\frac{8}{11}$

(v) $-3\frac{1}{7}-3$

Sol. (i) $\frac{5}{24}-\frac{13}{36} = \frac{5\times(3)-13\times2}{72}$

($\because$ 24 एवं 36 का LCM = 72)

$$= \frac{15-26}{72} = \frac{-11}{72}$$

(ii) $\frac{4}{63}-\left(\frac{-5}{21}\right) = \frac{4}{63}+\frac{5}{21}$

($\because$ 21 एवं 63 का LCM = 63)

$$= \frac{4\times1+5\times3}{63} = \frac{4+15}{63} = \frac{19}{63}.$$

(iii) $\frac{-7}{13}-\left(\frac{-6}{25}\right) = \frac{-7}{13}+\frac{6}{25}$

($\because$ 13 एवं 25 का LCM = 325)

$$= \frac{-7\times25+6\times13}{325} = \frac{-175+78}{325} = \frac{-97}{325}$$

(iv) $\frac{-5}{8}-\frac{8}{11} = \frac{-5\times11-8\times8}{88}$

($\because$ 8 एवं 11 का LCM = 88)

$$= \frac{-55-64}{88} = \frac{-119}{88}$$

(v) $-3\frac{1}{7}-3 = -\frac{22}{7}-\frac{3}{1}$ ($\because$ 7 एवं 1 का LCM = 7)

$$= \frac{-22-3\times7}{7} = \frac{-22-21}{7} = \frac{-43}{7}.$$

Ex.47 निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7}{2}\times\left(\frac{-5}{4}\right)$ (ii) $\frac{7}{10}\times(-9)$

(iii) $\frac{4}{-5}\times\frac{-5}{4}$ (iv) $\frac{4}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$

Sol. (i) $\frac{7}{2}\times\left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{7\times(-5)}{2\times4} = \frac{-35}{8}$

(ii) $\frac{7}{10}\times(-9) = \frac{7}{10}\times\frac{(-9)}{1} = \frac{7\times(-9)}{10\times1} = \frac{-63}{10}$

(iii) $\frac{4}{-5}\times\frac{-5}{4} = \frac{4\times(-5)}{(-5)\times4} = \frac{-20}{-20} = 1$

(iv) $\frac{4}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{4}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{4\times(-2)}{7\times5} = \frac{-8}{35}$

Ex.48 निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-6)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5}\div2$

(iii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$ (iv) $\frac{-2}{8}\div\frac{-2}{8}$

(v) $\left(\frac{-6}{9}\right)\div1$

Sol. (i) $(-6)\div\frac{2}{3} = \frac{-6}{1}\times\frac{3}{2} = \frac{-6\times3}{1\times2} = \frac{-18}{2} = -9$

अतः $(-6)\div\frac{2}{3} = -9.$

(ii) $\frac{-4}{5}\div2 = \frac{-4}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{-4\times1}{5\times2}$

$$= \frac{-2\times1}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{-2}{5}$$

अतः $\frac{-4}{5}\div2 = \frac{-2}{5}.$

(iii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right) = \frac{3}{13}\times\frac{65}{-4} = \frac{3\times65}{13\times(-4)}$

$$= \frac{15}{-4} = \frac{-15}{4}$$

अतः $\frac{3}{13} \div \left(\frac{-4}{65}\right) = \frac{-15}{4}$.

(iv) $\frac{-2}{8} \div \frac{-2}{8} = \frac{-2}{8} \times \frac{8}{-2} = \frac{(-2)\times 8}{8\times(-2)} = \frac{1\times 1}{1\times 1} = 1$

अतः $\frac{-2}{8} \div \frac{-2}{8} = 1$.

(v) $\left(\frac{-6}{9}\right) \div 1 = \left(\frac{-6}{9}\right) \div \frac{1}{1} = \frac{-6}{9} \times \frac{1}{1}$

$= \frac{-6\times 1}{9\times 1} = \frac{-2\times 1}{3\times 1} = \frac{-2}{3}$.

अतः $\left(\frac{-6}{9}\right) \div 1 = \frac{-2}{3}$.

Ex.49 गुणा कीजिए :

(i) $\left(\frac{-8}{25}\right)$ को $\left(\frac{-5}{16}\right)$ से

(ii) $\left(\frac{9}{-11}\right)$ को $\left(\frac{22}{-27}\right)$ से

Sol. (i) $\left(\frac{-8}{25}\right)$ का $\left(\frac{-5}{16}\right)$ से गुणा

$= \frac{-8}{25} \times \frac{-5}{16} = \frac{-8\times -5}{25\times 16} = \frac{40}{400}$

अंश एवं हर दोनों को 40 एवं 400 के महत्तम उभयनिष्ट भाजक से जो 40 है, से भाग देने पर

$= \frac{40 \div 40}{400 \div 40} = \frac{1}{10}$

(ii) $\left(\frac{9}{-11}\right)$ का $\left(\frac{22}{-27}\right)$ से गुणा

$= \frac{9}{-11} \times \frac{22}{-27}$

$= \frac{9\times 22}{-11\times -27} = \frac{198}{297}$

$= \frac{198 \div 99}{297 \div 99} = \frac{2}{3}$

Ex.50 सरल कीजिए : $\left(\frac{-2}{3} \times \frac{9}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{-6}{7}\right)$.

Sol. $\left(\frac{-2}{3} \times \frac{9}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{-6}{7}\right)$

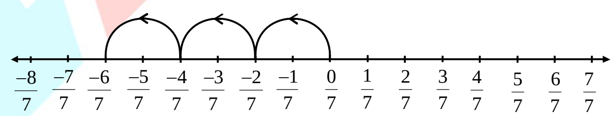
$= \frac{-18}{15} + \left(\frac{-12}{21}\right) = \frac{-18\times 7 + (-12\times 5)}{105}$

$= \frac{-126 + (-60)}{105} = \frac{-126 - 60}{105} = \frac{-186}{105} = \frac{-62}{35}$

➤ परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर गुणन

दो परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर गुणनफल निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है :

जब हम संख्या रेखा पर $\frac{-2}{7}$ को 3 से गुणा करते है, तो इसका अर्थ है कि $\frac{-2}{7}$ का शून्य के बायी ओर 3 उछाल। अब हम $\frac{-6}{7}$ पर पहुँचते है। इस प्रकार, हम $\frac{-2}{7} \times 3 = \frac{-6}{7}$ पाते है, अर्थात $\frac{-2}{7} \times 3 = \frac{-2}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{-2\times 3}{7\times 1} = \frac{-6}{7}$



यह परिणाम पुनः दोहराते है कि दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल परिमेय संख्या होती है जिसका अंश दी गई परिमेय संख्याओ के अंशो का गुणनफल है तथा हर दी गई संख्याओं के हरो का गुणनफल है।

∴ परिमेय संख्या के लिए गुणन संवृत (गुणनफल परिमेय है), क्रमविनिमेय (ab = ba) तथा साहचर्य (a(bc) = (ab)c) है।

EduBull

Sol. दी गई परिमेय संख्याए $\frac{8}{-5}$ तथा $\frac{4}{-3}$ है।

स्पष्ट रूप से वे भिन्न–भिन्न हर रखती है। यहाँ, पहले हम दी गई परिमेय संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करते है।

अर्थात् $\frac{8}{-5}=\frac{8\times(-1)}{(-5)\times(-1)}=\frac{-8}{5}$

तथा $\frac{4}{-3}=\frac{4\times(-1)}{(-3)\times(-1)}=\frac{-4}{3}$

अब $\frac{8}{-5}+\frac{4}{-3}=\frac{(-8)}{5}+\frac{(-4)}{3}$

समान हरों मे बदलने पर

$$\frac{-8}{5}=\frac{(-8)\times 3}{5\times 3}=\frac{-24}{15}$$

तथा $\frac{-4}{3}=\frac{(-4)\times 5}{3\times 5}=\frac{-20}{15}$

अतः $\frac{-8}{5}+\left(\frac{-4}{3}\right)=\frac{-24}{15}+\left(\frac{-20}{15}\right)$

$=\frac{(-24)+(-20)}{15}=\frac{-44}{15}$

जो कि अभीष्ट उत्तर है।

Ex.33 योगफल ज्ञात करो : $\frac{8}{10}, 3$

Sol. हम 3 को $\frac{3}{1}$ लिख सकते है।

$\frac{3}{1}$ के अंश तथा हर दोनों को 10 से गुणा करने पर

हम पाते है कि $\frac{3}{1}=\frac{3\times 10}{1\times 10}=\frac{30}{10}$

इसलिए $\frac{8}{10}+3=\frac{8}{10}+\frac{3}{1}=\frac{8}{10}+\frac{30}{10}$

$$=\frac{8+30}{10}=\frac{38}{10}=\frac{19}{5}$$

जो कि अभीष्ट उत्तर है।

Ex.34 सरल कीजिए : $\frac{4}{3}+\frac{3}{5}+\frac{-2}{5}+\frac{-11}{3}$

Sol. $\frac{4}{3}+\frac{3}{5}+\frac{-2}{5}+\frac{-11}{3}=\left(\frac{4}{3}+\frac{-11}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}+\frac{-2}{5}\right)$

$=\frac{4-11}{3}+\frac{3-2}{5}=\frac{-7}{3}+\frac{1}{5}=\frac{-7\times 5}{3\times 5}+\frac{1\times 3}{5\times 3}$

(समान हर में परिवर्तित करने पर)

$=\frac{-35}{15}+\frac{3}{15}=\frac{-32}{15}.$

Ex.35 $\frac{7}{9}$ तथा $\frac{-5}{9}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. $\frac{7}{9}+\left(\frac{-5}{9}\right)=\frac{7+(-5)}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9}.$

> यदि परिमेय संख्या का हर ऋणात्मक है, तो पहले हम इसे (हर) धनात्मक बनाते है तथा फिर जोड़ते है।

Ex.36 $\frac{6}{-5}$ तथा $\frac{4}{5}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. $\frac{6}{-5}+\frac{4}{5}=\frac{-6}{5}+\frac{4}{5}=\frac{-6+4}{5}=\frac{-2}{5}.$

Ex.37 $\frac{-8}{5}$ तथा $\frac{-5}{3}$ का योगफल ज्ञात करो।

Sol. 5 तथा 3 का LCM 15 है,

$\frac{-8}{5}=\frac{-8\times 3}{5\times 3}=\frac{-24}{15}$

$\Rightarrow \frac{-5}{3}=\frac{-5\times 5}{3\times 5}=\frac{-25}{15}$

अतः $\frac{-8}{5}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{-24}{15}+\left(\frac{-25}{15}\right)=\frac{-24-25}{15}$

$$\frac{-8}{5}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{-49}{15}$$

Note : परिमेय संख्याओं का योगफल संवृत (योग भी परिमेय होता है) क्रमविनिमेय (a + b = b + a) तथा साहचर्य (a + (b + c)) = ((a + b) + c) होता है।

◈ **योज्य प्रतिलोम :**

एक परिमेय संख्या की ऋणात्मक संख्या दी गई संख्या का योज्य प्रतिलोम कहलाता है।

परिमेय संख्या	योज्य प्रतिलोम
$\frac{x}{y}$	$\frac{-x}{y}$
$\frac{-3}{7}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{13}{17}$	$\frac{-13}{17}$

नोट : केवल शून्य एक ऐसी परिमेय संख्या है जो इसकी सम ऋणात्मक या योज्य प्रतिलोम है।

(ii) व्यवकलन : यदि हम एक परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम तथा अन्य परिमेय संख्या को जोड़ते हैं तो यह दो परिमेय संख्याओं का व्यवकलन कहलाता है। अतः व्यवकलन योग की प्रतिलोम संक्रिया है तथा पद योग को व्यवकलन के लिए ऋणात्मक लेते हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.38 $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$ का मान ज्ञात करो।

Sol. $\frac{2}{3}$ + $\frac{4}{5}$ का योज्य प्रतिलोम

$= \frac{2}{3}+\left(\frac{-4}{5}\right)=\frac{2\times5}{3\times5}+\left(\frac{-4\times3}{5\times3}\right)$

$= \frac{10}{15}+\frac{-12}{15}=\frac{10+(-12)}{15}$

$= \frac{-2}{5}.$

Ex.39 $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{3}\right)$ का मान ज्ञात करो।

Sol. $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{3}\right)$ का योज्य प्रतिलोम

$= \frac{2}{7}+\frac{5}{3}$

$= \frac{2\times3}{7\times3}+\frac{5\times7}{3\times7}$

$= \frac{6}{21}+\frac{35}{21}=\frac{6+35}{21}=\frac{41}{21}.$

Ex.40 $\frac{-3}{7}$ में से $\frac{-5}{8}$ घटाओं।

Sol. दी गई परिमेय संख्याए $\frac{-5}{8}$ तथा $\frac{-3}{7}$ है।

इसलिए,

$\frac{-3}{7}-\left(\frac{-5}{8}\right)=\frac{-3}{7}+\frac{5}{8}$

$=\frac{-24}{56}+\frac{35}{56}=\frac{-24+35}{56}=\frac{11}{56}$

Ex.41 सरल कीजिए : $\frac{1}{6}+\frac{-2}{5}-\frac{-2}{15}$

Sol. यहाँ,

$\frac{1}{6}+\frac{-2}{5}-\frac{-2}{15}=\frac{1}{6}-\frac{2}{5}+\frac{2}{15}$

$\left[\because\ -\left(\frac{-2}{15}\right)=\frac{2}{15}\right]$

$= \frac{1\times5-2\times6+2\times2}{30}$ [LCM of 6, 5, 15 is 30]

$= \frac{5-12+4}{30}=\frac{9-12}{30}=\frac{-3}{30}=\frac{-1}{10}$

Ex.42 $\frac{-5}{8}$ में कौनसी संख्या जोड़ी जाए ताकि योगफल $\frac{5}{9}$ हो ?

Sol. $\frac{5}{9}$ में से $\frac{-5}{8}$ घटाने पर अभीष्ट संख्या प्राप्त होगी।

अतः, $\frac{5}{9}-\left(\frac{-5}{8}\right)=\frac{5}{9}+\frac{5}{8}=\frac{5\times8+5\times9}{72}$

$=\frac{40+45}{72}=\frac{85}{72}$

इसलिए, अभीष्ट संख्या $\frac{85}{72}$ है।

Ex.43 $\frac{-5}{33}$ प्राप्त करने के लिए $\frac{27}{11}$ में से कौनसी संख्या घटाई जानी चाहिए ?

Sol. दी गई संख्या तथा अभीष्ट संख्या का अन्तर = $\frac{-5}{33}$

दी गई संख्या = $\frac{27}{11}$

इसलिए, $\frac{27}{11}-\frac{-5}{33}=\frac{27}{11}+\frac{5}{33}$

$=\frac{27\times3+5\times1}{33}=\frac{81+5}{33}=\frac{86}{33}$

अतः, अभीष्ट संख्या $\frac{86}{33}$ है।

Ex.44 दो परिमेय संख्याओं का योगफल $\frac{-3}{5}$ है। यदि उनमें से एक संख्या $\frac{-9}{10}$ है तो दूसरी संख्या ज्ञात करो।

Sol. दिया है कि संख्याओ का योगफल = $\frac{-3}{5}$

एक संख्या = $\frac{-9}{10}$

दूसरी संख्या = संख्याओ का योगफल – एक संख्या

$=\frac{-3}{5}-\frac{-9}{10}=\frac{-3}{5}+\frac{9}{10}$

$=\frac{-3\times2+9\times1}{10}$

$=\frac{-6+9}{10}=\frac{3}{10}$

अतः, अभीष्ट संख्या $\frac{3}{10}$ है।

(iii) गुणा :

(a) माना $\frac{a}{b}$ तथा c दो परिमेय संख्याए है, तब $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$

उदाहरण : $\frac{-5}{7}$ एवं 9 का गुणनफल ज्ञात करो।

$\frac{-5}{7}\times9=\frac{-5}{7}\times\frac{9}{1}=\frac{-5\times9}{7\times1}=\frac{-45}{7}$

(b) जब हम दो परिमेय संख्याओं को गुणा करते है :

अर्थात् $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}=\frac{ac}{bd}$

उदाहरण : $\frac{1}{2}\times\frac{-3}{4}=\frac{1\times(-3)}{2\times4}=\frac{-3}{8}$

(i) दो परिमेय संख्याओं को गुणा करने पर हम परिणाम भी परिमेय संख्या ही प्राप्त करते है।

जैसे : $\frac{-3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{-3\times5}{4\times7}=\frac{-15}{28}$ (संवृत गुणधर्म)

(ii) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$ (क्रमविनिमेय अर्थात् क्रम बदलने पर भी परिणाम समान रहता है)

(iii) $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{5}$ (साहचर्य)

(iv) यदि 0 को किसी भी परिमेय संख्या से गुणा किया जाए, तो परिणाम हमेशा शून्य ही होता है। जैसे :

(a) $0\times\frac{4}{5}=\frac{0\times4}{5}=\frac{0}{5}=0$

(b) $\frac{-2}{3}\times0=\frac{-2\times0}{3}=\frac{0}{3}=0$

(iv) भाग :

(a) माना $\frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है तब इसका व्युत्क्रम $\frac{b}{a}$ होगा।

(i) एक परिमेय संख्या का इसके व्युत्क्रम से गुणनफल हमेशा 1 होता है।

उदाहरण के लिए,

(a) $\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=1$ (b) $\frac{-3}{8}\times\frac{-8}{3}=1$

(ii) शून्य का कोई व्युत्क्रम नहीं होता है चूंकि 0 $\left(\frac{0}{1}\right)$ का व्युत्क्रम $\frac{1}{0}$ है (जो कि परिभाषित नही है)

(iii) एक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम उस परिमेय संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम कहलाता है।

(iv) केवल 1 तथा –1 परिमेय संख्याए ऐसी है जो उनकी अपनी व्युत्क्रम है।

1 का व्युत्क्रम = $\frac{1}{1}=1.$

–1 का व्युत्क्रम = $\frac{1}{-1}=-1$

(v) एक धनात्मक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम धनात्मक होता है तथा ऋणात्मक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम ऋणात्मक होता है।

एक परिमेय संख्या को दूसरी परिमेय संख्याओं से विभाजित करने के लिए हम परिमेय संख्या को दूसरी परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते है अर्थात् $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$

$= \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ का व्युत्क्रम $= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

उदाहरण के लिए, $\frac{5}{-6} \div \frac{-3}{+2}$

$\frac{5}{-6} \div \frac{-3}{2} = \frac{5}{-6} \times \left(\frac{-3}{2}\right)$ का व्युत्क्रम

$= \frac{5}{-6} \times \frac{+2}{-3}$

$= \frac{5 \times 2}{-6 \times (-3)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$

(vi) शून्य में किसी भी परिमेय संख्या का भाग देने पर हमेशा शून्य ही प्राप्त होता है।

उदाहरण के लिए, $0 \div \frac{2}{5} = 0$; $0 \div \frac{-3}{8} = 0$

नोट :

(i) जब एक परिमेय संख्या (शून्य के अतिरिक्त) को अन्य परिमेय संख्या (0 के अतिरिक्त) से विभाजित किया जाता है तो भागफल हमेशा एक परिमेय संख्या होती है। (भाग के अन्तर्गत संवृत)

अर्थात् $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{ad}{bc}\right)$ भी एक परिमेय संख्या है।

(ii) किसी भी परिमेय संख्या का स्वयं से विभाजन, भागफल 1 देता है।

उदाहरण के लिए, $\frac{4}{5} \div \frac{4}{5} = 1.$

(iii) जब एक परिमेय संख्या को 1 से विभाजित करते है, तो भागफल स्वयं वह परिमेय संख्या ही होती है।

उदाहरण के लिए, $\frac{3}{4} \div 1 = \frac{3}{4}.$

❖ उदाहरण ❖

Ex.45 निम्नलिखित योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{6}{4} + \left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{7}{3} + \frac{3}{7}$

(iii) $\frac{-4}{3} + 0$ (iv) $-3\frac{1}{3} + 2\frac{4}{5}$

(v) $\frac{-4}{19} + \frac{(-3)}{57}.$

Sol. (i) $\frac{6}{4} + \left(\frac{-11}{4}\right) = \frac{6 + (-11)}{4} = \frac{6 - 11}{4} = \frac{-5}{4}.$

(ii) $\frac{7}{3} + \frac{3}{7}$

$\frac{7}{3} = \frac{7 \times 7}{3 \times 7} = \frac{49}{21}$ (3 एवं 7 का L.C.M. = 21)

$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} = \frac{9}{21}$

अतः $\frac{7}{3} + \frac{3}{7} = \frac{49}{21} + \frac{9}{21} = \frac{49 + 9}{21} = \frac{58}{21}.$

वैकल्पिक विधि :

$\frac{7}{3} + \frac{3}{7}$

$= \frac{7 \times (7) + 3 \times (3)}{21}$ ($\because$ 3 एवं 7 का L.C.M. = 21)

$= \frac{49 + 9}{21} = \frac{58}{21}.$

(iii) $\frac{-4}{3} + 0 = \frac{-4}{3} + \frac{0}{3} = \frac{(-4) + 0}{3} = \frac{-4}{3}.$

(iv) $-3\frac{1}{3} + 2\frac{4}{5}$

$= \frac{-10}{3} + \frac{14}{5} = \frac{-10 \times 5 + 14 \times 3}{15}$

($\because$ 3 एवं 5 का LCM = 15)

$= \frac{-50 + 42}{15} = \frac{-8}{15}.$

(v) $\frac{-4}{19} + \frac{(-3)}{57}$

$$= \frac{-4\times3+(-3)\times1}{57} = \frac{-12+(-3)}{57}$$

($\because$ 19 एवं 57 का LCM = 57)

$$= \frac{-12-3}{57} = \frac{-15}{57}.$$

Ex.46 निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5}{24}-\frac{13}{36}$ (ii) $\frac{4}{63}-\left(\frac{-5}{21}\right)$

(iii) $\frac{-7}{13}-\left(\frac{-6}{25}\right)$ (iv) $\frac{-5}{8}-\frac{8}{11}$

(v) $-3\frac{1}{7}-3$

Sol. (i) $\frac{5}{24}-\frac{13}{36} = \frac{5\times(3)-13\times2}{72}$

($\because$ 24 एवं 36 का LCM = 72)

$$= \frac{15-26}{72} = \frac{-11}{72}$$

(ii) $\frac{4}{63}-\left(\frac{-5}{21}\right) = \frac{4}{63}+\frac{5}{21}$

($\because$ 21 एवं 63 का LCM = 63)

$$= \frac{4\times1+5\times3}{63} = \frac{4+15}{63} = \frac{19}{63}.$$

(iii) $\frac{-7}{13}-\left(\frac{-6}{25}\right) = \frac{-7}{13}+\frac{6}{25}$

($\because$ 13 एवं 25 का LCM = 325)

$$= \frac{-7\times25+6\times13}{325} = \frac{-175+78}{325} = \frac{-97}{325}$$

(iv) $\frac{-5}{8}-\frac{8}{11} = \frac{-5\times11-8\times8}{88}$

($\because$ 8 एवं 11 का LCM = 88)

$$= \frac{-55-64}{88} = \frac{-119}{88}$$

(v) $-3\frac{1}{7}-3 = -\frac{22}{7}-\frac{3}{1}$ ($\because$ 7 एवं 1 का LCM = 7)

$$= \frac{-22-3\times7}{7} = \frac{-22-21}{7} = \frac{-43}{7}.$$

Ex.47 निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7}{2}\times\left(\frac{-5}{4}\right)$ (ii) $\frac{7}{10}\times(-9)$

(iii) $\frac{4}{-5}\times\frac{-5}{4}$ (iv) $\frac{4}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$

Sol. (i) $\frac{7}{2}\times\left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{7\times(-5)}{2\times4} = \frac{-35}{8}$

(ii) $\frac{7}{10}\times(-9) = \frac{7}{10}\times\frac{(-9)}{1} = \frac{7\times(-9)}{10\times1} = \frac{-63}{10}$

(iii) $\frac{4}{-5}\times\frac{-5}{4} = \frac{4\times(-5)}{(-5)\times4} = \frac{-20}{-20} = 1$

(iv) $\frac{4}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{4}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{4\times(-2)}{7\times5} = \frac{-8}{35}$

Ex.48 निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-6)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5}\div2$

(iii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$ (iv) $\frac{-2}{8}\div\frac{-2}{8}$

(v) $\left(\frac{-6}{9}\right)\div1$

Sol. (i) $(-6)\div\frac{2}{3} = \frac{-6}{1}\times\frac{3}{2} = \frac{-6\times3}{1\times2} = \frac{-18}{2} = -9$

अतः $(-6)\div\frac{2}{3} = -9.$

(ii) $\frac{-4}{5}\div2 = \frac{-4}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{-4\times1}{5\times2}$

$$= \frac{-2\times1}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{-2}{5}$$

अतः $\frac{-4}{5}\div2 = \frac{-2}{5}.$

(iii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right) = \frac{3}{13}\times\frac{65}{-4} = \frac{3\times65}{13\times(-4)}$

$$= \frac{15}{-4} = \frac{-15}{4}$$

अतः $\frac{3}{13} \div \left(\frac{-4}{65}\right) = \frac{-15}{4}$.

(iv) $\frac{-2}{8} \div \frac{-2}{8} = \frac{-2}{8} \times \frac{8}{-2} = \frac{(-2)\times 8}{8\times(-2)} = \frac{1\times 1}{1\times 1} = 1$

अतः $\frac{-2}{8} \div \frac{-2}{8} = 1$.

(v) $\left(\frac{-6}{9}\right) \div 1 = \left(\frac{-6}{9}\right) \div \frac{1}{1} = \frac{-6}{9} \times \frac{1}{1}$

$= \frac{-6\times 1}{9\times 1} = \frac{-2\times 1}{3\times 1} = \frac{-2}{3}$.

अतः $\left(\frac{-6}{9}\right) \div 1 = \frac{-2}{3}$.

Ex.49 गुणा कीजिए :

(i) $\left(\frac{-8}{25}\right)$ को $\left(\frac{-5}{16}\right)$ से

(ii) $\left(\frac{9}{-11}\right)$ को $\left(\frac{22}{-27}\right)$ से

Sol. (i) $\left(\frac{-8}{25}\right)$ का $\left(\frac{-5}{16}\right)$ से गुणा

$= \frac{-8}{25} \times \frac{-5}{16} = \frac{-8\times -5}{25\times 16} = \frac{40}{400}$

अंश एवं हर दोनों को 40 एवं 400 के महत्तम उभयनिष्ट भाजक से जो 40 है, से भाग देने पर

$= \frac{40\div 40}{400\div 40} = \frac{1}{10}$

(ii) $\left(\frac{9}{-11}\right)$ का $\left(\frac{22}{-27}\right)$ से गुणा

$= \frac{9}{-11} \times \frac{22}{-27}$

$= \frac{9\times 22}{-11\times -27} = \frac{198}{297}$

$= \frac{198\div 99}{297\div 99} = \frac{2}{3}$

Ex.50 सरल कीजिए : $\left(\frac{-2}{3}\times\frac{9}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)$.

Sol. $\left(\frac{-2}{3}\times\frac{9}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)$

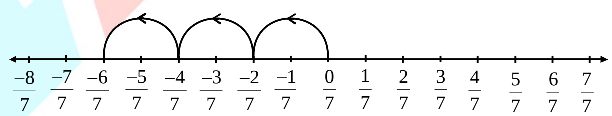
$= \frac{-18}{15} + \left(\frac{-12}{21}\right) = \frac{-18\times 7 + (-12\times 5)}{105}$

$= \frac{-126 + (-60)}{105} = \frac{-126 - 60}{105} = \frac{-186}{105} = \frac{-62}{35}$

➤ परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर गुणन

दो परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर गुणनफल निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है :

जब हम संख्या रेखा पर $\frac{-2}{7}$ को 3 से गुणा करते है, तो इसका अर्थ है कि $\frac{-2}{7}$ का शून्य के बायी ओर 3 उछाल। अब हम $\frac{-6}{7}$ पर पहुँचते है। इस प्रकार, हम $\frac{-2}{7}\times 3 = \frac{-6}{7}$ पाते है, अर्थात $\frac{-2}{7}\times 3 = \frac{-2}{7}\times\frac{3}{1} = \frac{-2\times 3}{7\times 1} = \frac{-6}{7}$



यह परिणाम पुनः दोहराते है कि दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल परिमेय संख्या होती है जिसका अंश दी गई परिमेय संख्याओ के अंशो का गुणनफल है तथा हर दी गई संख्याओं के हरो का गुणनफल है।

∴ परिमेय संख्या के लिए गुणन संवृत (गुणनफल परिमेय है), क्रमविनिमेय (ab = ba) तथा साहचर्य (a(bc) = (ab)c) है।