आँकड़ों का निरूपण

5
CHAPTER

सूची

- आँकड़े
- आँकड़ो के प्रकार
- कुछ पद
- बारम्बारता बंटन सारणी
- केन्द्रीय प्रवृत्ति एवं इसके प्रकार
- सारणीबद्ध आँकड़ो का समान्तर माध्य
- माध्यिका
- बहुलक
- बार (आयत) आलेख
- द्विबार (द्विआयत) आलेख
- प्रायिकता

➢ आँकड़े

तथ्यों का संग्रह जो विशेष प्रयोजन के लिए संख्यात्मक रूप में व्यक्त किये गये हैं, **आँकड़े** कहलाते हैं या उपयुक्त जानकारी तथा तथ्य आँकड़े कहलाते हैं ।

उदाहरण के लिए ,

1.	दो कारों की दुर्घटना में कुछ व्यक्ति मर गए	दो कारों की दुर्घटना में तीन व्यक्ति मर गए
2.	सचिन ने आज के मैच में अधिकतम रन बनाए।	सचिन ने आज के मैच में 190 रन बनाए

➢ आँकड़ो के प्रकार

(i) प्राथमिक आँकड़े (Primary Data)

(ii) द्वितीयक आँकड़े (Secondary Data)

(iii) यथाप्राप्त (अवर्गीकृत) आँकड़े (Raw Data)

(iv) वर्गीकृत आँकड़े (Grouped Data)

◈ **प्राथमिक आँकड़े :** प्रेक्षक के द्वारा एकत्रित आँकड़े **प्राथमिक आँकड़े** कहलाते हैं ।

◈ **द्वितीयक आँकड़े:** द्वितीयक आँकड़े प्रेक्षक के द्वारा एकत्रित नही किये जाते हैं। यह प्रकाशित या अप्रकाशित स्त्रोतों से प्राप्त होते हैं।

नोट: प्राथमिक आँकड़े, द्वितीयक आँकड़ो से अधिक विश्वसनीय होते हैं चूँकि प्रेक्षक के द्वारा एकत्रित सूचनाए अन्य व्यक्ति (प्रेक्षक के अतिरिक्त) के द्वारा एकत्रित सूचनाओं की तुलना में अधिक सही (सच्ची) होती है।

◈ **यथा प्राप्त आँकड़े:** वे आँकड़े जो विशेष प्रयोजन के लिए एकत्रित किये जाते हैं तथा जैसे के जैसे ही (बिना किसी व्यवस्था के) रख दिये जाते हैं, यथा प्राप्त आँकड़े कहलाते हैं ।

◈ **वर्गीकृत आँकड़े:** यदि आँकड़ो का निरूपण किसी समूह के रूप में हो तो ये वर्गीकृत आँकड़े कहलाते हैं।

उदाहरण के लिए : 5, 7, 9, 11, 11, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 29, 30.

वर्गीकृत रूप में : 0 – 10, 10 – 20, 20 – 30, आदि।

प्रत्येक समूह वर्ग कहलाता है।

➢ कुछ पद

❖ **समूह (Array) :** आँकड़ो को सही तरीके से समझने के लिए, हम आँकड़ो को या तो आरोही क्रम या अवरोही में व्यवस्थित करते हैं जो एक समूह (Array) कहलाता है।

❖ **परिसर (Range) :** दिये गए आँकड़ो के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों का अन्तर परिसर कहलाता है। उदाहरणार्थ, 0, 3, 8, 10, 10, 12, 18, 19, 19, 20

अतः परिसर = 20 – 0 = 20

❖ **बारम्बारता (Frequency) :** एक विशेष प्रेक्षण के घटित होने की संख्या इसकी बारम्बारता कहलाती है। यह (f_i) के द्वारा व्यक्त की जाती है ।

❖ **गणना चिन्ह (Tally Marks) :** बारम्बारता संख्याओं के निरूपण के तरीके को गणना चिन्ह कहते हैं ।

एक	|	छः	𝍸 |
दो	||	सात	𝍸 ||
तीन	|||	आठ	𝍸 |||
चार	||||	नौ	𝍸 ||||
पाँच	𝍸	दस	𝍸 𝍸

➢ बारम्बारता बंटन सारणी

यदि हम उपर्युक्त आँकड़ो को प्रत्येक प्रेक्षण की बारम्बारता दर्शाते हुए सारणी के रूप में व्यवस्थित करें, तो आँकड़ो का सारणी के रूप में निरूपण बारम्बारता बंटन तथा सारणी बारम्बारता सारणी कहलाती है ।

❖ उदाहरण ❖

Ex. 1 एक कस्बे के 20 परिवारों में बच्चो की संख्या नीचे दी गई है :

2, 2, 3, 2, 1, 3, 3, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 2

इस सूचना को बारम्बारता बंटन सारणी में निरूपित करो ।

Sol. आँकड़ो को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

$\underbrace{1,1,1,1,1,}_{5\ \text{बार}}\underbrace{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,}_{10\ \text{बार}}\underbrace{3,3,3,3,3,}_{5\ \text{बार}}$

बच्चो की संख्या	गणना चिन्ह	परिवारों की संख्या
1	𝍸	5
2	𝍸 𝍸	5 + 5 = 10
3	𝍸	5
	कुल	20

Ex. 2 एक घनाकार पाँसे के छः फलकों पर 1 से 6 तक अंक या डॉट, प्रत्येक फलक पर एक अंक, अंकित है। 25 उछालों में प्राप्त अंक 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 5, 4, 6, 6, 6, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 5, 5, 6, 2, 1 तथा 3 है। उपर्युक्त अंको के लिए बारम्बारता सारणी बनाओं ।

Sol. आँकड़ो को निम्नानुसार आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर :

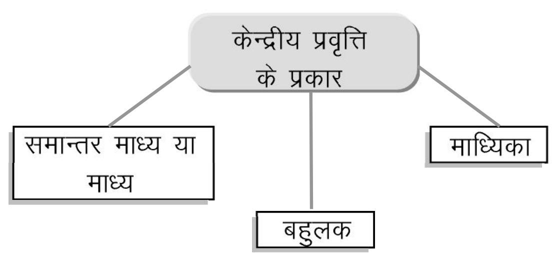
$\underbrace{1,1,1,1,1,}_{5\ \text{बार}}\ \underbrace{2,2,2,2,2}_{5\ \text{बार}}\ \underbrace{3,3,3,3}_{4\ \text{बार}}\ \underbrace{4,4,4}_{3\ \text{बार}}\ \underbrace{5,5,5,5}_{4\ \text{बार}}\ \underbrace{6,6,6,6}_{4\ \text{बार}}$

बारम्बारता बंटन सारणी निम्न है :

अंक	गणना चिन्ह	बारम्बारता
1	𝍸	5
2	𝍸	5
3	||||	4
4	|||	3
5	||||	4
6	||||	4
	कुल	25

➢ केन्द्रीय प्रवृत्ति एवं इसके प्रकार

औसत, एक संख्या है जो दिये गए आँकड़ो की केन्द्रीय प्रवृत्ति को प्रदर्शित करते हैं या दर्शाते हैं ।



◈ **समान्तर माध्य :**

माध्य

$= \dfrac{\text{दिये गये प्रेक्षणों का योगफल}(\Sigma x)}{\text{दिये गये प्रेक्षणों की संख्या (n)}}$

❖ उदाहरण ❖

Ex.3 एक शहर में वर्ष के पिछले छः महिनों के दौरान मापा गया अधिकतम तापमान नीचे दिया गया है। अधिकतम तापमान का माध्य ज्ञात करो ।

माह	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
अधिकतम तापमान (ºC में)	42	40	40	37	29	22

Sol. कुल तापमान = 42 + 40 + 40 + 37 + 29 + 22 = 210

महिनों की संख्या = 6

$\therefore$ समान्तर माध्य = $\dfrac{\text{तापमान का योग}}{\text{महिनों की संख्या}}$

$= \dfrac{210}{6} = 35$

इस प्रकार, औसत या माध्य तापमान = 35ºC

Ex.4 एक कक्षा के 50 विद्यार्थियों का औसत या माध्य वजन 30 kg है। विद्यार्थियों का कुल वजन ज्ञात कीजिए ।

Sol. $\because$ माध्य = $\dfrac{\text{कुल वजन}}{\text{विद्यार्थियों की संख्या}}$

या माध्य × विद्यार्थियों की संख्या = कुल वजन

दिये गए आँकड़ो के लिए

विद्यार्थियों की संख्या = 50

औसत या माध्य वजन = 32 kg

सूत्र से हम पाते हैं कि

कुल वजन = (32 × 50) kg

= 1600 kg

Ex.5 दो बल्लेबाजों के द्वारा उनके पिछले पाँच मैचों में बनाए गए रन निम्नानुसार है :

बल्लेबाज-I	81	75	71	69	74
बल्लेबाज-II	12	81	5	105	117

कौन अच्छा खेलता है ?

Sol. बल्लेबाज-I के रनों का समान्तर माध्य

$= \dfrac{81+75+71+69+74}{5}$

$= \dfrac{370}{5} = 74$

बल्लेबाज-II के रनों का समान्तर माध्य

$= \dfrac{12+81+5+105+117}{5} = \dfrac{320}{5} = 64$

बल्लेबाज-I के रनों का माध्य (औसत) बल्लेबाज-II के रनों के माध्य (औसत) से अधिक है। अतः बल्लेबाज-I अच्छा खेलता है।

नोट : तुलना करने के लिए औसत या माध्य उपयोगी होता है।

➤ सारणी बद्ध आँकड़ो का समान्तर माध्य

माना $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; n प्रक्षेण है तथा $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ क्रमशः उनकी बारम्बारताएँ हैं।

प्रेक्षण (x_i)	बारम्बारता (f_i)	$x_i \times f_i$
x_1	f_1	x_1f_1
x_2	f_2	x_2f_2
⋮	⋮	⋮
x_n	f_n	x_nf_n
कुल	$\Sigma f_i = N$	$\Sigma x_i f_i$

माध्य $= \dfrac{(f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_nx_n)}{(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n)}$

(Σ सिग्मा कहलाता है जो योग को दर्शाता है)

या $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i)}{(N)}$ यहाँ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

❖ उदाहरण ❖

Ex.6 50 खिलाड़ियों की आयु (वर्षों में) नीचे दी गई है :

आयु (वर्षों में)	24	25	26	27	28
खिलाड़ियों की संख्या	14	15	3	10	8

माध्य आयु ज्ञात कीजिए।

Sol.

वर्षों में आयु (x_i)	खिलाड़ियों की संख्या (f_i)	$x_i \times f_i$
24	14	336
25	15	375
26	3	78
27	10	270
28	8	224
कुल	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma x_i y_i = 1283$

माध्य $= \dfrac{\Sigma(x_i f_i)}{\Sigma f_i} = \dfrac{1283}{50}$

माध्य = 25.66

➤ माध्यिका

केन्द्रीय प्रवृति ज्ञात करने की दूसरी विधि माध्यिका कहलाती है।

◈ **परिभाषा :** माध्यिका दिये गए आँकड़ों का वह मान है जो इनको ठीक दो भागों में बाँटता है।

◈ **विधि :** आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते है। माना प्रेक्षणों की कुल संख्या *n* है।

स्थिति I : जब n विषम है

$\Rightarrow$ माध्यिका $= \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद

❖ उदाहरण ❖

Ex.7 आँकड़ों 34, 46, 56, 27, 28, 35, 45 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

Sol. आँकड़ों को आरोही क्रम मे व्यस्थित करने पर

27, 28, 34, $\boxed{35,}$ 45, 46, 56

यहाँ, n = 7(जो विषम है)

$\therefore$ माध्यिका $= \left(\dfrac{7+1}{2}\right)$ वाँ पद

$= \left(\dfrac{8}{2}\right)$ वाँ पद = 4था पद

= 35 (4था पद)

माध्यिका = 35

स्थिति II : जब n सम है

$\Rightarrow$ माध्यिका $= \dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\dfrac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

Ex.8 8 विद्यार्थियों का वजन (kg में)

30, 42, 24, 37, 21, 25, 38, 31 है। माध्यिका ज्ञात करो।

Sol. वजन को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, हम पाते है कि 21, 24, 25, **30, 31**, 37, 38, 42

n = 8 (सम)

$\therefore$ माध्यिका $= \dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\dfrac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{\left(\dfrac{8}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\dfrac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{4\text{था पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{30+31}{2} = \dfrac{61}{2}$

माध्यिका वजन = 30.5 kg

Ex.9 निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए :

97, 93, 67, 100, 95, 98, 94

Sol. आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

67, 93, 94, 95, 97, 98, 100

प्रेक्षणों की संख्या = 7 (विषम)

मध्य संख्या चौथी है

∴ माध्यिका = चौथी संख्या = 95

माध्यिका ज्ञात करने के लिए कार्यविधि

पद :

(i) आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करो।

(ii) आँकड़ों की संख्या की गणना करो।

(iii) यदि यह विषम है, तो एक मध्य मान प्रेक्षित करो तथा इसे माध्यिका के रूप में लिखों तथा यदि यह सम है, तो दो मध्य मान प्रेक्षित करो तथा माध्यिका निम्न सूत्र के द्वारा ज्ञात करो :

$$\text{माध्यिका} = \frac{\text{मध्य मानों का योगफल}}{2}$$

Ex.10 5 संख्याओं का माध्य 25 दिया गया है। यदि चार संख्याए 16, 26, 20, 32 है, तो पाँचवी संख्या ज्ञात करो।

Sol. माना पाँचवी संख्या x है।

तब संख्याओं का योगफल

= 16 + 26 +20 +32 + x

= 94 + x

$$\text{अब, माध्य} = \frac{\text{संख्याओं का योगफल}}{5}$$

∴ 5 × माध्य = संख्याओं का योगफल

अर्थात्, 5 × 25 = 94 + x

या 125 = 94 + x

⇒ x = 125 – 94 = 31

इस प्रकार, पाँचवीं संख्या 31 है।

Ex.11 नीचे दिये गए आँकड़ों में प्रेक्षक के द्वारा एक संख्या छूट (लुप्त) गई है :

18, 16, 37, 40, 28, 20, ..., 35

यदि आँकड़ों की माध्यिका 26 है, तो लुप्त संख्या ज्ञात करो।

Sol. दिये गए आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर हम पाते है कि

16, 18, 20, 28, 35, 37, 40

यहाँ लुप्त संख्या को सम्मिलित करने पर 8 संख्याए है।

परन्तु माध्यिका 26 है जो 28 से कम है तथा 8 संख्याओं के लिए, मध्य संख्याए चौथी तथा 5वीं होगी। अतः लुप्त हुई संख्या आवश्यक रूप से चौथे स्थान पर होगी।

$$\text{अब, माध्यिका} = \frac{4th + 5th}{2}$$

$$\text{या} \quad 26 = \frac{\text{लुप्त संख्या} + 28}{2}$$

या 26 × 2 = लुप्त संख्या + 28

या 52 = लुप्त संख्या + 28

या लुप्त संख्या = 52 – 28 = 24

Ex.12 6 के प्रथम पाँच गुणजों की माध्यिका ज्ञात करो।

Sol. 6 के प्रथम पाँच गुणज निम्न है :

6, 12, 18, 24, 30

जो आरोही क्रम में है।

n = 5 (विषम)

$$\text{माध्यिका मान} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{वाँ मान}$$

$$= \left(\frac{5+1}{2}\right) \text{वाँ मान} = \text{3रा मान}$$

माध्यिका मान = 18

➤ बहुलक

यह भी केन्द्रीय प्रवृति के लिए उपयोगी है।

◈ **परिभाषा :** वह प्रेक्षण जिसकी अधिकतम बारम्बारता हो, बहुलक कहलाता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.13 निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य, माध्यिका तथा बहुलक ज्ञात करो। आँकड़ों 3, 11, 7, 5, 17, 11 के लिए सबसे अच्छा औसत चुनो।

Sol. **माध्य :** संख्याओं का योगफल

= 3 + 11 + 7 + 5 + 17 + 11 = 54

$$\text{माध्य} = \frac{\text{आँकडों का योगफल}}{\text{आँकडों की संख्या}} = \frac{54}{6} = 9$$

बहुलक : 11 चूंकि यह दो बार आया है।

∴ बहुलक = 11

माध्यिका :

पद 1 : आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, 3, 5, 7, 11, 11, 17

पद 2 : दो मध्य मान 7 एवं 11 है

$$\therefore \text{ माध्यिका} = \frac{7+11}{2} = 9$$

हम पाते है कि माध्य तथा माध्यिका समान है तथा आँकड़ों के मध्य में स्थित है। बहुलक इन आँकड़ों के लिए उपयुक्त केन्द्रीय मान नहीं है।

Ex.14 संख्याओं 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 8 का बहुलक ज्ञात करो।

Sol.

संख्या	गणना चिन्ह	बारम्बारता
2	||||	4
3	|||	3
4	||	2
5	|||	3
6	||	2
8	||	2

संख्या 2 अधिकतम बारम्बारता (4) रखती है, अतः बहुलक 2 है।

Ex.15 निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए :

2, 5, 4, 7, 5, 5, 8, 12, 8, 9

Sol.

संख्या	गणना चिन्ह	बारम्बारता
2	|	1
4	|	1
5	|||	3
7	|	1
8	||	2
9	|	1
12	|	1

संख्या 5 अधिकतम बारम्बारता 3 रखती है। फलतः दी गई संख्याओं का बहुलक 5 है।

Ex.16 निम्न सारणी कक्षा VII के 40 विद्यार्थियों के द्वारा प्राप्त अंकों को दर्शाती है :

प्राप्तांक	30	25	23	19	17	14
विद्यार्थियों की संख्या	3	2	4	11	13	7

बहुलक ज्ञात करो।

Sol. चूंकि अधिकतम विद्यार्थियों के द्वारा प्राप्त अंक 17 है, अतः दिये गये आँकड़ों का बहुलक 17 है।

Ex.17 15 विद्यार्थियों के द्वारा गणित के टेस्ट में प्राप्तांक (30 में से) निम्न हैं :

20, 19, 12, 25, 24, 23, 20, 25, 20, 16, 9, 20, 15, 10, 5

माध्य, माध्यिका तथा बहुलक ज्ञात करो। क्या वे समान है ?

Sol. जैसा कि हम जानते है, कि

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योगफल}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{20+19+12+25+24+23+20+25+20+16+9+20+15+10+5}{15}$$

$$= \frac{263}{15}$$

माध्य = 17.54

अब दिये गए अंकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

5, 9, 10, 12, 15, 16, 19, **20**, 20, 20, 20, 23, 24, 25, 25

n = 15 (विषम)

$$\text{माध्यिका} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{वाँ पद}$$

$= \left(\frac{15+1}{2}\right)$वाँ पद

= 8वाँ पद

माध्यिका अंक = 20

बहुलक :

अंक	गणना चिन्ह	बारम्बारता
5	|	1
9	|	1
10	|	1
12	|	1
15	|	1
16	|	1
19	|	1
20	||||	4
23	|	1
24	|	1
25	||	2

संख्या 20 अधिकतम बारम्बरता अर्थात् 4 रखती है, अतः बहुलक अंक = 20

➤ बार (आयत) आलेख

एक आयत आलेख संख्यात्मक आँकड़ों का एकसमान चौड़ाई के कई बारो (आयतो) के द्वारा चित्रण निरूपण है जो क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रूप से उनके मध्य समान दूरी पर खड़े है।

पद :

(i) एक आलेख पेपर पर क्षैतिज रेखा तथा ऊर्ध्वाधर रेखा क्रमशः OX एवं OY खींचो जो क्रमशः X-अक्ष तथा Y-अक्ष कहलाती है।

(ii) X-अक्ष के अनुदिश समान दूरी (अन्तराल) पर बिन्दु अंकित करो। इन बिन्दुओं के नीचे आँकड़ो का नाम लिखों जिनके मान अंकित करने है।

(iii) एक उपयुक्त पैमाना मानो। इस पैमाने के अनुसार दिये गए संख्यात्मक मानो के लिए बारो की ऊँचाई ज्ञात करो।

(iv) पद (ii) में लिए गए बिन्दुओं से Y-अक्ष के समान्तर इन ऊँचाईयों को चिन्हित करो।

(v) पद (iv) में चिन्हित ऊँचाईयों के लिए X-अक्ष पर समान चौड़ाई के बार खीचो। बारों का केन्द्र X-अक्ष पर अंकित बिन्दु होने चाहिए। ये बार दिये गए संख्यात्मक आँकड़ों को दर्शाते है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.18 राजू एक सप्ताह में 2 p.m. पर निम्नानुसार तापमान मापता है :

दिन	सोम	मंगल	बुध	गुरू	शुक्र	शनि	रवि
तापमान (ºC)	30	25	35	30	20	38	28

उपरोक्त आँकड़ों के लिए बार आलेख बनाओ।

Sol. हम निम्न पदों के अनुसार बार आलेख बनाऐंगे :

(i) एक ग्राफ पेपर लेंगे तथा दो लम्बवत् रेखाए OX व OY खीचेंगे।

(ii) OX के अनुदिश "दिनों के नाम" तथा OY के अनुदिश " ºC में तापमान " अंकित करेंगे।

(iii) OX के अनुदिश, प्रत्येक बार के लिए उपयुक्त चौड़ाई का चयन करेंगे।

(iv) OY के अनुदिश, एक उयुक्त पैमाना लेंगे तथा सेल्सियस में तापमान अंकित करेंगे।

यहाँ, 1 बड़ा भाग = 10ºC

(v) विभिन्न बारों की ऊँचाईओं की निम्नानुसार गणना करेंगे :

(a) सोमवार के लिए बार की ऊँचाई

$= \frac{1}{10} \times 30 = 3$ बड़े भाग

(b) मंगलवार के लिए बार की ऊँचाई

$= \frac{1}{10} \times 25 = 2.5$ बड़े भाग

(c) बुधवार के लिए बार की ऊँचाई

$= \frac{1}{10} \times 35 = 3.5$ बड़े भाग

(d) गुरूवार के लिए बार की ऊँचाई

$= \frac{1}{10} \times 30 = 3$ बड़े भाग

(e) शुक्रवार के लिए बार की ऊँचाई

$= \frac{1}{10} \times 20$

= 2 बड़े भाग

(f) शनिवार के लिए बार की ऊँचाई

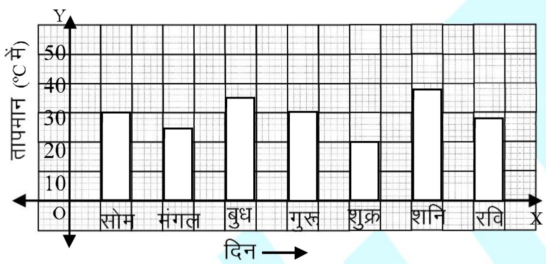
$= \frac{1}{10} \times 38$

= 3.8 बड़े भाग

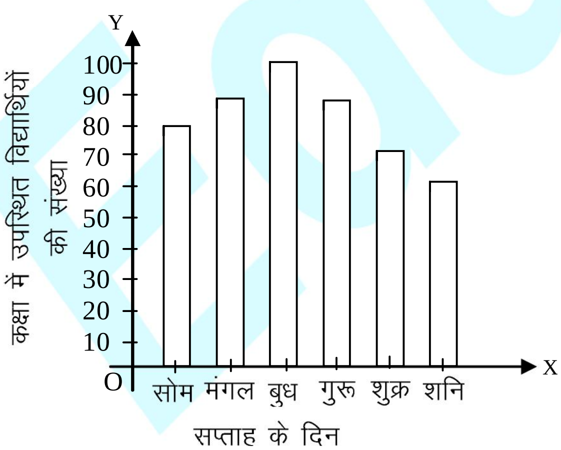
(g) रविवार के लिए बार की ऊँचाई

$= \frac{1}{10} \times 28$

= 2.8 बड़े भाग



Ex.19 दिये गए बार आलेख के लिए निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



(i) बार ग्राफ क्या प्रदर्शित करता है?

(ii) किस दिन कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या न्यूनतम है?

(iii) किस दिन कक्षा में अधिकतम विद्यार्थी उपस्थित हुए ?

(iv) यदि बुधवार को सभी विद्यार्थी उपस्थित हुए, तो कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?

Sol. (i) ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश, वे विद्यार्थी दर्शाये गये है, जो सप्ताह के दिनों में उपस्थित है। अतः बार आलेख सप्ताह के दिनों के दौरान एक कक्षा की उपस्थिति दर्शाता है।

(ii) शनिवार का बार लघुत्तम है, इसलिए न्यूनतम उपस्थिति शनिवार को थी।

(iii) बुधवार का बार उच्चतम है, इसलिए, अधिकतम उपस्थिति बुधवार को थी।

(iv) एक पैमाना लेते है तथा इसे OX रेखा के समान्तर बुधवार के बार के उच्चतम बिन्दु पर रखते है। हम पाते है कि पैमाना OY रेखा को 100 चिन्ह पर स्पर्श करता है। अतः कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या 100 है।

➤ द्विबार (द्विआयत) आलेख

एक द्विबार (द्विआयत) आलेख वह बार (आयत) आलेख है जो आँकड़ों के दो समूहों को एक ही आलेख पर दर्शाते है। प्रत्येक समूह के संगत दो बार आलेख एक दूसरे के बाद खींचे जाते है।

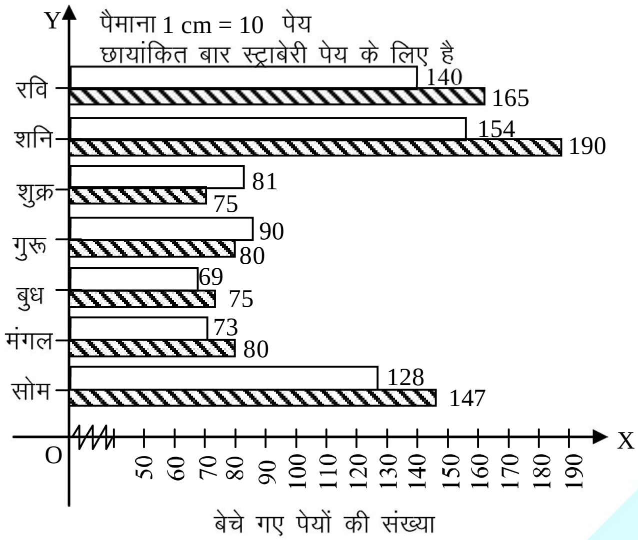
❖ उदाहरण ❖

Ex.20 एक सप्ताह के दिनों में बेचे गए दो प्रकार के पेय पदार्थो की संख्या नीचे दी गई है। आँकड़ों के लिए एक क्षैतिज द्विबार आलेख बनाइये।

दिन	स्ट्राबेरी पेय	चोकोलेट पेय
सोमवार	147	128
मंगलवार	80	73
बुधवार	75	69
गुरूवार	80	90
शुक्रवार	75	81
शनिवार	190	154
रविवार	165	140

दोनों प्रकार के पेयो में औसत भी ज्ञात करो तथा बताओं कि कौनसा पेय अधिक बिका।

Sol. यहाँ OX के अनुदिश एक टूटी हुई रेखा (zig-zag) बनी हुई है जो दर्शाती है कि अंकन 50 से शुरू हुआ है।



अब, बेचे गए स्ट्राबेरी पेय का औसत (माध्य)

$$= \frac{147+80+75+80+75+190+165}{7}$$

$$= \frac{812}{7} = 116 \text{ स्ट्राबेरी पेय}$$

बेचे गए चोकोलेट पेय का औसत (माध्य)

$$= \frac{128+73+69+90+81+154+140}{7}$$

$$= \frac{735}{7} = 105 \text{ चोकोलेट पेय}$$

अतः, बेचे गए स्ट्राबेरी पेय का औसत बेचे गए चोकोलेट पेय के औसत से अधिक है।

Ex.21 एक विशेष दिन विभिन्न शहरों का न्यूनतम एवं अधिकतम तापमान नीचे दिया गया है :

शहर	**तापमान**	
	न्यूनतम	**अधिकतम**
अम्बाला	26ºC	37ºC
चैन्नई	27ºC	36ºC
बेंगलौर	24ºC	28ºC
दिल्ली	28ºC	38ºC
जयपुर	29ºC	39ºC
जम्मू	26ºC	41ºC
भोपाल	25ºC	35ºC

एक ऊर्ध्वाधर द्विबार आलेख बनाओ तथा बार आलेख पर आधारित निम्न प्रश्नों के उत्तर दो :

(i) दिये गए दिन में कौनसे शहर के न्यूनतम एवं अधिकतम तापमानों में अन्तर अधिकतम है ?

(ii) कौनसा शहर सबसे गर्म है तथा कौनसा शहर सबसे ठण्डा है ?

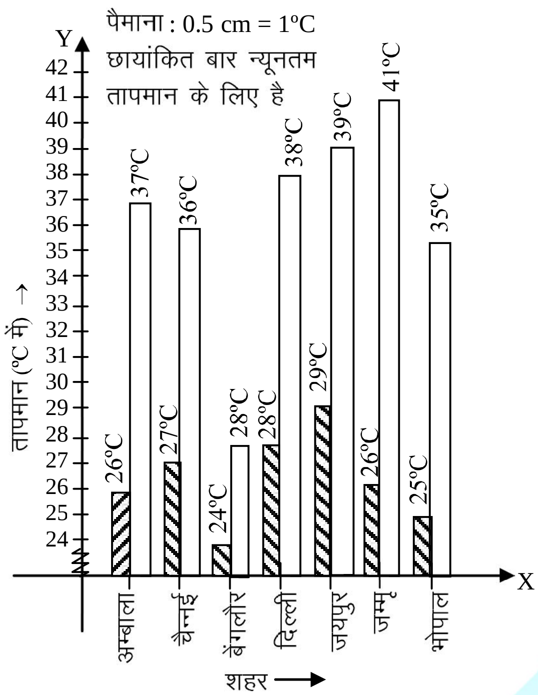
(iii) उस शहर का नाम बताओं जिसके न्यूनतम एवं अधिकतम तापमानों का अन्तर न्यूनतम है।

(iv) दो शहरों के नाम बताओं जहाँ एक शहर का अधिकतम तापमान दूसरे शहर के न्यूनतम तापमान से कम है।

Sol. (i) विभिन्न शहरों के तापमानों में अन्तर :

अम्बाला	(37 – 26)ºC = 11ºC
चैन्नई	(36 – 27)ºC = 9ºC
बेंगलौर	(28 – 24)ºC = 4ºC
दिल्ली	(38 – 28)ºC = 10ºC
जयपुर	(39 – 29)ºC = 10ºC
जम्मू	(41 – 26)ºC = 15ºC
भोपाल	(35 – 25)ºC = 10ºC

∴ अधिकतम अन्तर जम्मू में है।



(ii) सबसे गर्म शहर वह शहर है जिसका अधिकतम तापमान सबसे ज्यादा है अर्थात् जम्मू।

सबसे ठण्डा शहर वह है जिसका न्यूनतम तापमान सबसे कम है अर्थात् बेंगलौर।

(iii) वह शहर जिसके न्यूनतम एवं अधिकतम तापमान में न्यूनतम अन्तर है, बेंगलौर है।

(iv) बेंगलौर का अधिकतम तापमान जयपुर के न्यूनतम तापमान से कम है।

Ex.22 वर्ष 1995, 1996, 1997 तथा 1998 में बेची गई अंग्रेजी एवं हिन्दी की पुस्तके नीचे दी गई है :

वर्ष	1995	1996	1997	1998
अंग्रेजी	350	400	450	620
हिन्दी	500	525	600	650

एक द्विआयत आलेख खींचों तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दो :

(i) किस वर्ष में दोनों भाषाओं की बेची गई पुस्तकों का अन्तर न्यूनतम है ?

(ii) क्या आप कह सकते हो कि अंग्रेजी की पुस्तकों की मांग तेजी से बढ़ी है ?

Sol. हम निम्नलिखित पदों के अनुसार बार आलेख बनाऐंगे:

(a) एक आलेख पेपर लेते है तथा दो लम्बवत् रेखाए OX तथा OY खींचते है।

(b) OX के अनुदिश, वर्ष तथा OY के अनुदिश विषय अंकित करते है।

(c) हम बारो की ऊँचाई निर्धारित करने के लिए उचित पैमाने का चयन करते है। यहाँ हम 1 बड़ा भाग = 100 लेते है।

(d) दोनों विषयों के लिए विभिन्न वर्षो के लिए बार की ऊँचाई की गणना करते है।

वर्ष 1995 के लिए,

अंग्रेजी के लिए बार की ऊँचाई $= \frac{350}{100} = 3.5$ बड़े भाग

हिन्दी के लिए बार की ऊँचाई $= \frac{500}{100} = 5.0$ बड़े भाग

वर्ष 1996 के लिए,

अंग्रेजी के लिए बार की ऊँचाई $= \frac{400}{100} = 4$ बड़े भाग

हिन्दी के लिए बार की ऊँचाई $= \frac{525}{100} = 5.25$ बड़े भाग

वर्ष 1997 के लिए,

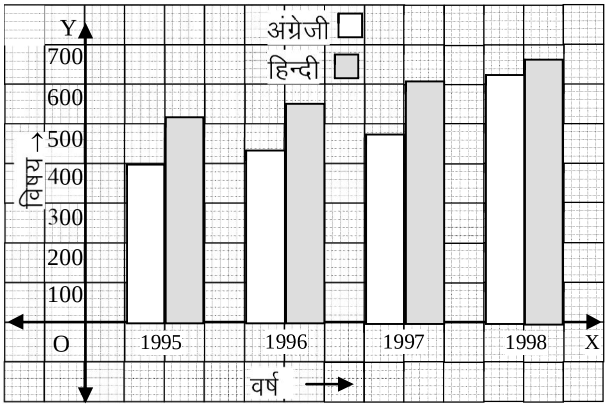
अंग्रेजी के लिए बार की ऊँचाई $= \frac{450}{100} = 4.5$ बड़े भाग

हिन्दी के लिए बार की ऊँचाई $= \frac{600}{100} = 6.0$ बड़े भाग

वर्ष 1998 के लिए,

अंग्रेजी के लिए बार की ऊँचाई $= \frac{620}{100} = 6.2$ बड़े भाग

हिन्दी के लिए बार की ऊँचाई $= \frac{650}{100} = 6.5$ बड़े भाग



(i) वर्ष 1998 में बेची गई दोनों भाषाओं की पुस्तकों का अन्तर न्यूनतम है।

(ii) हाँ, अंग्रेजी की पुस्तकों की मांग तेजी से बढ़ी है।

➤ प्रायिकता

परिभाषा : किसी घटना के घटित होने के अवसरों का मापन 'प्रायिकता' कहलाता है।

प्रायिकता का मापन :

एक निश्चित घटना के घटित होने की प्रायिकता = 1

एक असम्भव स्थिति की प्रायिकता = 0

एक घटना जो घट सकती है या नहीं घट सकती है, की प्रायिकता = 0 एवं 1 के मध्य

◈ आधारभूत पद

अभिप्रयोग : कुछ प्राप्त करने के लिए हमारे द्वारा किये गये क्रियाकलाप जैसे : एक पाँसा फेंकना, एक सिक्का उछालना आदि।

यादृच्छिक अभिप्रयोग : क्रियाकलाप या अभिप्रयोग जिनके परिणाम हमें ज्ञात है परन्तु परिणाम का पूर्वनुमान लगाना सम्भव नहीं है जब अभिप्रयोग किया जाता है। एक सिक्का उछालने या एक पाँसा फेंकने के क्रियाकलाप यादृच्छिक अभिप्रयोग है।

परिणाम : जब एक यादृच्छिक अभिप्रयोग किया जाता है, तो इसका अन्त किसी घटना के सथ होता है। ऐसी एक घटना अभिप्रयोग का परिणाम कहलाता है।

उदाहरणार्थ, माना हम निम्नलिखित अभिप्रयोगो के परिणामों को सूचीबद्ध करते है :

अभिप्रयोग	परिणाम
एक सिक्के की उछाल में	चित्त या पट
एक पाँसे की फेंक में	1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6 डॉट्स उपरि फलक पर
दो सिक्को की एक साथ उछाल में	दो चित्त या दो पट या एक चित्त एवं एक पट
एक व्यस्त सड़क पर ट्रेफिक देखने में	एक दुर्घटना हो सकती है या सभी सावधानीपूर्वक जाते है।

सम्प्रायिक (समसम्भावी) परिणाम :

एक यादृच्छिक अभिप्रयोग में जब सभी परिणामों के घटित होने के समान अवसर हो या वे समान प्रायिकता रखते है, तब परिणाम सम्प्रायिक कहलाते है।

उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के की उछाल में चित्त या पट प्राप्त करना सम्प्रायिक परिणाम है।

अतः प्रत्येक घटित होने के आधे–आधे अवसर रखते है।

या चित्त की प्रायिकता = पट की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$.

(ii) एक पाँसे के उपरिफलक पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 प्राप्त करना सम्प्रायिक परिणाम है। प्रत्येक परिणाम समान अवसर या प्रायिकता रखता है जो $\frac{1}{6}$ है।