त्रिभुज एवं इसके गुणधर्म

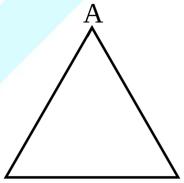
4 CHAPTER

सूची

- त्रिभुज
- त्रिभुज का अन्तः व बाह्य भाग
- त्रिभुज के प्रकार
- त्रिभुज का कोण योग गुणधर्म
- त्रिभुज की माध्यिका तथा शीर्षलम्ब
- त्रिभुज का बाह्य कोण
- त्रिभुज असमिका
- पाइथागोरस प्रमेय

➤ त्रिभुज

तीन रेखाखण्डों द्वारा तीन असंरेखीय बिन्दुओं को मिलाने पर निर्मित ज्यामितीय आकृति त्रिभुज कहलाता है।



त्रिभुज ABC में :

भुजाऐं : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

शीर्ष : A, B एवं C

कोण : $\angle BAC$ या $\angle CAB$, $\angle ABC$ या $\angle CBA$ और $\angle ACB$ या $\angle BCA$.

एक त्रिभुज को चिन्ह 'Δ' द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

तीन कोणों व तीन भुजाओं को एक साथ लेने पर एक त्रिभुज के छः अवयव या छः भाग कहलाते हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 क्या तीन संरेखीय बिन्दु A, B व C एक त्रिभुज निर्मित करते है ?

Sol. नहीं, तीन संरेखीय बिन्दु एक रेखा निर्मित करते है।

Ex.2 ΔLMN के लिए, निम्न के नाम ज्ञात कीजिये?

(a) $\angle M$ की सम्मुख भुजा

(b) भुजा LM का सम्मुख कोण

(c) भुजा NL का सम्मुख शीर्ष.

(d) शीर्ष N की सम्मुख भुजा

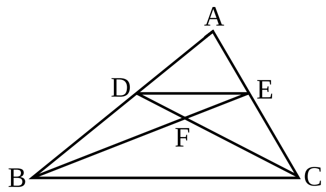
Sol. (a) $\angle M$ की सम्मुख भुजा LN है।

(b) भुजा LM का सम्मुख कोण $\angle N$ है।

(c) भुजा NL का सम्मुख शीर्ष M है।

(d) शीर्ष N की सम्मुख भुजा LM है।

Ex.3 निम्न आकृति में कितने भिन्न त्रिभुज है ? प्रत्येक का नाम बताइए।



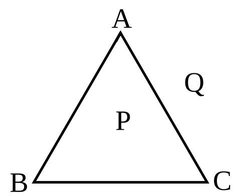
Sol. $\Delta ABC, \Delta ADE, \Delta ABE, \Delta ADC, \Delta BFC, \Delta BFD, \Delta BDE, \Delta CEF, \Delta CED, \Delta DEF, \Delta BCD, \Delta BEC$.

अतः दी गई आकृति में 12 भिन्न त्रिभुज है।

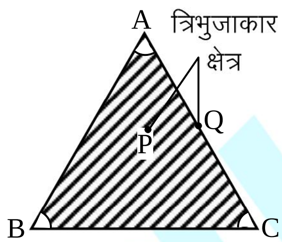
➤ त्रिभुज का अन्तः तथा बाह्य भाग

एक त्रिभुज का अन्तः ΔABC द्वारा परिबद्ध समतल का क्षेत्र होता है।

यहाँ, ΔABC के अन्तः में बिन्दु P स्थित है।

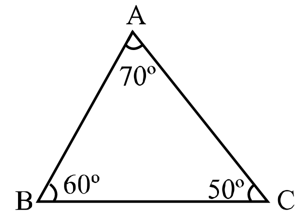
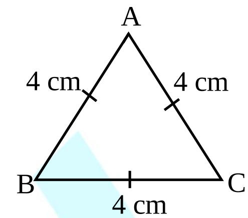
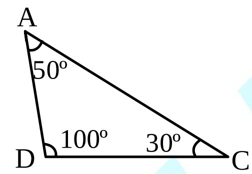
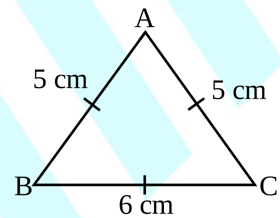
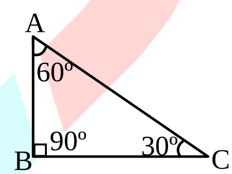
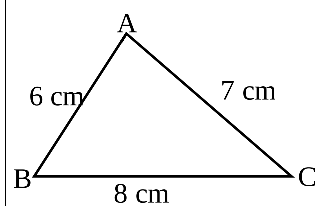


एक त्रिभुज का बाह्य समतल का वह क्षेत्र होता है जो ΔABC की परिसीमा द्वारा परिबद्ध नहीं होता या बाहर की ओर होता है। आकृति में, बिन्दु Q त्रिभुज ΔABC के बाहर स्थित है।



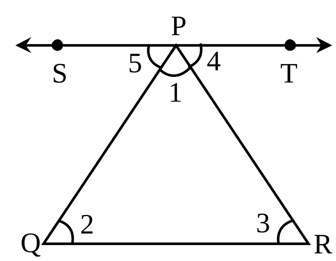
ΔABC के अन्तः (आकृति में छायांकित भाग P द्वारा दर्शाया गया है) का ΔABC की परिसीमा पर स्थित बिन्दुओं के साथ होना (बिन्दु Q द्वारा दर्शाएनुसार) त्रिभुजाकार क्षेत्र ABC कहलाता है।

➤ त्रिभुज के प्रकार

कोण पर आधारित	भुजाओं पर आधारित
1. न्यूनकोण त्रिभुज : एक त्रिभुज जिसके सभी कोण न्यून हो अर्थात् 90^o से कम हो।	**1. समबाहु त्रिभुज :** एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाऐं एक दूसरे के समान हो।
	
2. अधिककोण त्रिभुज : एक त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक हो अर्थात् 90^o से अधिक हो।  एक त्रिभुज में एक अधिक कोण से ज्यादा नहीं हो सकते।	**2. समद्विबाहु त्रिभुज :** एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाऐं एक दूसरे के समान हो। 
3. समकोण त्रिभुज : एक त्रिभुज जिसका एक कोण 90^o हो तथा अन्य दो न्यूनकोण जिनका योग 90^o हो।  समकोण की सम्मुख भुजा कर्ण कहलाती है तथा अन्य दो भुजाऐं समकोण त्रिभुज का पाद कहलाती है।	**3. विषमबाहु त्रिभुज :** एक त्रिभुज जिसमें सभी भुजाऐं असमान हो। 

➤ त्रिभुज का कोण योग गुणधर्म

एक त्रिभुज के कोणों का योग 180^o या दो समकोण होता है।



दिया है : एक त्रिभुज PQR है।

सिद्ध करना है : $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$

अर्थात् एक त्रिभुज के सभी कोणों का योग 180^o होता है।

रचना : P से, एक रेखा ST ; QR के समान्तर खींचिए।

उपपत्ति : ST $\parallel$ QR तथा अनुप्रस्थ PQ इन्हें काटती है।

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 5$ (एकान्तर कोण) …(1)

पुनः ST $\parallel$ QR तथा अनुप्रस्थ PR इन्हें काटती है।

$\therefore \quad \angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोण) …(2)

(1) व (2), को जोड़ने पर

$\angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4$ …(3)

अब समीकरण (3) के दोनों ओर $\angle 1$ जोड़ने पर,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$

(as $\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180^o$)

नोट :

(i). समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^o होता है।

(ii) एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।

(iii) एक विषमबाहु त्रिभुज में सभी कोण असमान होते हैं।

(iv) एक त्रिभुज में एक समकोण से अधिक नहीं हो सकते।

(v) एक त्रिभुज में एक अधिक कोण से अधिक नहीं हो सकते।

(vi) एक समकोण त्रिभुज में, दो न्यूनकोणों का योग 90^o होता है।

(vii) एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाईयों का योग त्रिभुज का परिमाप कहलाता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.4 त्रिभुजों को विषमबाहु, समद्विबाहु या समबाहु त्रिभुजों में वर्गीकृत कीजिए यदि उनकी भुजाऐं निम्न है:

(i) 2 cm, 3 cm, 2 cm (ii) 2 cm, 2 cm, 2 cm

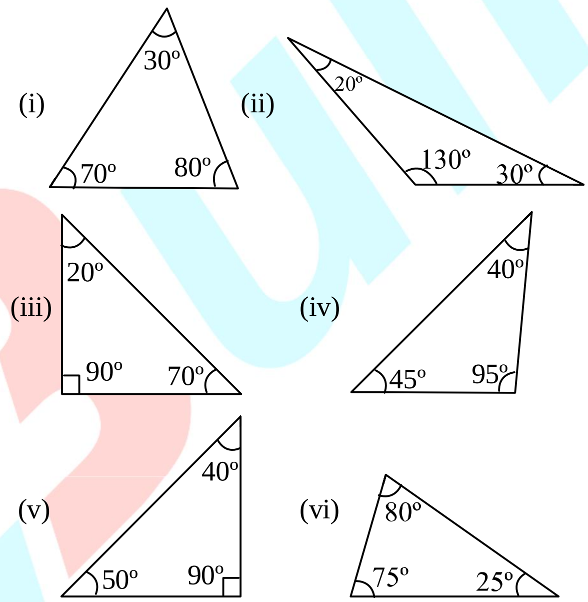
(iii) 3 cm, 6 cm, 4 cm

Sol. (i) इसकी दो भुजाऐं समान है, अतः यह समद्विबाहु त्रिभुज है।

(ii) इसकी सभी भुजाऐं समान है, अतः यह समबाहु त्रिभुज है।

(iii) इसकी सभी भुजाऐं असमान है अतः यह विषमबाहु त्रिभुज है।

Ex. 5 निम्न त्रिभुजों को उनके कोणों के अनुसार वर्गीकृत कीजिए :



Sol. (i) इस त्रिभुज के सभी कोण न्यून है अतः यह न्यूनकोण त्रिभुज है।

(ii) इस त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण (130°) है अतः यह अधिककोण त्रिभुज है।

(iii) इस त्रिभुज का एक कोण समकोण हैं अतः यह समकोण त्रिभुज है।

(iv) इस त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण (95°) है, अतः यह अधिककोण त्रिभुज है।

(v) इस त्रिभुज का एक कोण समकोण (90°) है अतः यह समकोण त्रिभुज है।

(vi) इसके सभी कोण न्यून है अतः यह न्यूनकोण त्रिभुज है।

Ex. 6 त्रिभुजों को न्यूनकोण, अधिककोण या समकोण में वर्गीकृत कीजिए जिनके कोण निम्न है :

(i) 50°, 40°, 90° (ii) 120°, 30°, 30°

(iii) 70°, 60°, 50°

Sol. (i) इसका एक कोण समकोण है अतः यह समकोण त्रिभुज है।

(ii) इसका एक कोण अधिककोण है अतः यह अधिकोण त्रिभुज है।

(iii) इसके सभी कोण न्यून है अतः यह न्यूनकोण त्रिभुज है।

Ex.7 विषमबाहु, समद्विबाहु या समबाहु त्रिभुजों को उनकी दी गई भुजाओं के अनुसार वर्गीकृत कीजिए :

(a) 3.5 cm, 4 cm, 4 cm (b) 6 cm, 7 cm, 9 cm

(c) 6.2 cm, 6.2 cm, 6.2 cm

Sol. (a) इसकी दो भुजाऐं समान हैं अतः यह समद्विबाहु त्रिभुज है।

(b) इसकी सभी भुजाऐं भिन्न हैं अतः यह विषमबाहु त्रिभुज है।

(c) इसकी सभी भुजाऐं समान हैं अतः यह समबाहु त्रिभुज है।

Ex.8 त्रिभुजों को न्यूनकोण, अधिककोण या समकोण त्रिभुज में वृर्गीकृत कीजिए यदि कोण निम्न है :

(a) $60^o, 30^o, 90^o$

(b) $120^o, 40^o, 20^o$

(c) $60^o, 60^o, 60^o$

Sol. (a) इसका एक कोण 90^o है अतः यह समकोण त्रिभुज है।

(b) इसका एक कोण (90^o) से अधिक (120^o) है अतः यह अधिककोण त्रिभुज है।

(c) इसका प्रत्येक कोण 60^o है, अतः यह समबाहु त्रिभुज है।

Ex.9 एक त्रिभुज के दो कोण 70^o व 30^o हैं तो तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।

Sol. माना PQR एक त्रिभुज इस प्रकार है कि $\angle P = 70^o$, $\angle Q = 30^o$ तब तीसरा कोण R होगा।

$\therefore \angle P + \angle Q + \angle R = 180^o$

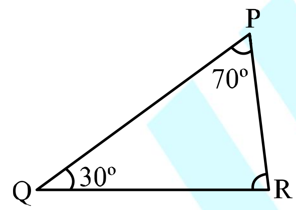
(त्रिभुज का कोण योग गुणधर्म)

$70^o + 30^o + \angle R = 180^o$

$100^o + \angle R = 180^o$

$\angle R = 180^o - 100^o$

$\Rightarrow \angle R = 80^o$



Ex.10 एक त्रिभुज का एक कोण 70^o है तथा अन्य दो कोण समान है ; दोनों कोण ज्ञात कीजिए।

Sol. माना एक त्रिभुज PQR इस प्रकार है कि :

$\angle P = 70^o$ व $\angle Q = \angle R = x$ (माना)

अतः $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^o$

(Δ का कोण योग गुणधर्म)

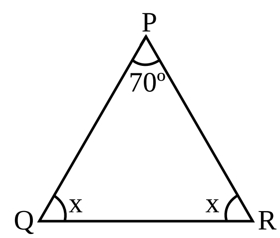
$70^o + x + x = 180^o$

$2x = 180^o - 70^o$

$2x = 110^o$

$x = \frac{110^o}{2}$

$x = 55^o$



अतः शेष दो कोणों में से प्रत्येक 55^o है।

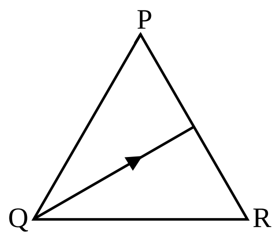
Ex.11 ज्ञात कीजिए :

(i) ΔPQR के शीर्ष Q की सम्मुख भुजा

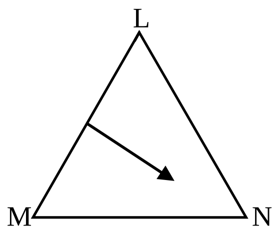
(ii) ΔLMN की भुजा LM का सम्मुख कोण

(iii) ΔRST की भुजा RT का सम्मुख शीर्ष

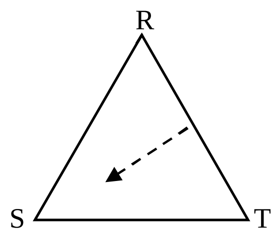
Sol. (i) शीर्ष Q की सम्मुख भुजा PR है।



(ii) भुजा LM का सम्मुख कोण $\angle N$ है।



(iii) ΔRST की भुजा RT का सम्मुख शीर्ष S है।



Ex.12 नीचे प्रत्येक में तीन कोण दिए गए है। दर्शाइए किस स्थिति में त्रिभुज के कोण सम्भव होंगे:

(i) 53°, 73°, 83° (ii) 59°, 12°, 109°

(iii) 45°, 45°, 90° (iv) 30°, 120°, 30°

Sol. (i) $53° + 73° + 83° = 209° > 180°$

अतः संभव नहीं है।

(ii) $59° + 12° + 109° = 180°$

अतः संभव है।

(iii) $45° + 45° + 90° = 180°$

अतः संभव है।

(iv) $30° + 120° + 30° = 180°$

अतः संभव है।

Ex.13 एक त्रिभुज के तीन कोण एक दूसरे के समान है। प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए ?

Sol. माना प्रत्येक कोण $x°$ का है। तब, कोण योग गुणधर्म से

$x + x + x = 180°$

$\Rightarrow 3x = 180°$

$\Rightarrow x = 60°$

अतः प्रत्येक कोण की माप 60° है।

Ex.14 एक त्रिभुज के कोण 2 : 3 : 4 अनुपात में है, कोण ज्ञात कीजिए।

Sol. त्रिभुज के कोणों के मध्य दिया अनुपात

= 2 : 3 : 4

माना कोण 2x, 3x व 4x हैं।

चूंकि Δ के कोणों का योग 180° होता है।

$\therefore 2x + 3x + 4x = 180°$

$\Rightarrow 9x = 180°$

$\Rightarrow x = \frac{180°}{9} = 20°$

अतः कोण 2x, 3x व 4x अर्थात्

$2 \times 20°, 3 \times 20°, 4 \times 20°$

$\Rightarrow$ 40°, 60° व 80° हैं।

Ex.15 ΔABC में, यदि $\angle A = 2\angle B$ व $\angle C = 3\angle B$ है, तो ΔABC के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

Sol. ΔABC में

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\Rightarrow 2\angle B + \angle B + 3\angle B = 180°$

$\Rightarrow 6\angle B = 180°$

$\Rightarrow \angle B = \frac{180°}{6} = 30°$

$\Rightarrow \angle B = 30°$

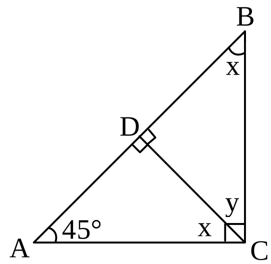
अब, $\angle A = 2\angle B = 2 \times 30° = 60°$ एवं

$\angle C = 3\angle B = 3 \times 30° = 90°$

अतः, $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$ एवं $\angle C = 90°$.

Ex.16 आकृति में $CD \perp AB$ तथा $\angle A = 45°$ है तो $\angle ADC$, $\angle CDB$, $\angle ABC$, $\angle DCB$ व $\angle DCA$ ज्ञात कीजिये।

Sol.



चूंकि CD ⊥ AB

$\therefore \angle ADC = \angle CDB = 90°$

अब ΔADC में,

$\angle ADC + \angle DAC + \angle DCA = 180°$

(त्रिभुज का कोण योग गुणधर्म)

$90° + 45° + z = 180°$

$\Rightarrow z = 180° - 135° = 45°$

$\therefore \angle y = 90° - 45° \Rightarrow \angle y = 45°$

ΔACB में

$\angle A + 90° + \angle x = 180°$

$45° + 90° + \angle x = 180°$

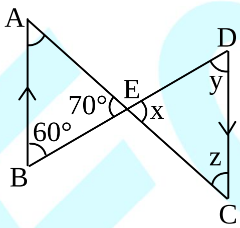
$135° + \angle x = 180°$

$\angle x = 180° - 135° = 45°$

अतः, x = 45°, y = 45° तथा z = 45° .

Ex.17 आकृति में AB ∥ DC तो x, y व z के मान ज्ञात कीजिये।

Sol.



$\angle DEC = \angle AEB$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\Rightarrow x = 70°$ व

$\angle ABE = \angle EDC$

[$\because$ AB ∥ DC, $\therefore$ एकान्तर कोण समान होते है]

$\Rightarrow y = 60°$

अब ΔDEC में,

$x + y + z = 180°$

[Δ के अन्तःकोणों का योग 180° होता है]

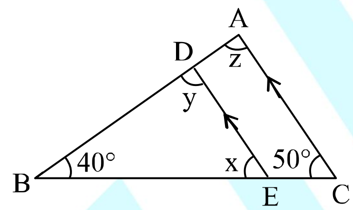
$\Rightarrow 70° + 60° + z = 180°$

$\Rightarrow z = 180° - 30° \Rightarrow z = 50°$

अतः, x = 70°, y = 60° व z = 50°

Ex.18 आकृति में, DE ∥ AC, यदि ∠B = 40° व ∠C = 50° है तो x, y व z ज्ञात कीजिए।

Sol.



ΔABC में,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

[एक त्रिभुज में सभी अन्तः कोणों का योग 180° होता है]

$\Rightarrow z + 40° + 50° = 180°$

$\Rightarrow z = 90°$

अब ΔBDE में,

$y = z = 90°$

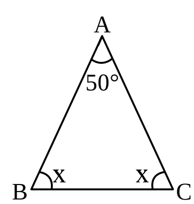
[$\because$ AC ∥ DE $\therefore$ संगत कोण समान होते है]

तथा $x = \angle ACB = 50°$

अतः, x = 50°, y = 90° व z = 90°.

Ex.19 ΔABC का एक कोण 50° है तथा आकृति में अन्य दो कोण समान है तो प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।

Sol.



माना $\angle A = 50°$ व $\angle B = \angle C = x$

हम जानते है Δ में कोणों का योग 180° होता है।

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\Rightarrow 50° + x + x = 180°$

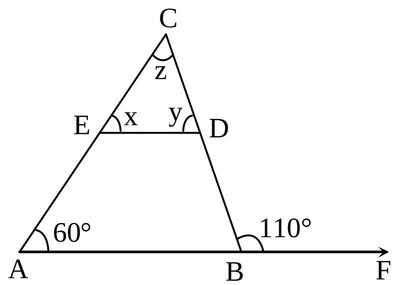
$\Rightarrow 2x = 180° - 50° = 130°$

$\Rightarrow x = \frac{130°}{2} = 65°$

अतः प्रत्येक समान कोणों की माप 65° है।

Ex.20 आकृति ΔABC में, DE || AB है, तो x, y व z के मान ज्ञात कीजिए।

Sol.



चूंकि DE || AB, अतः,

$\angle CED = \angle CAB$ [संगत कोण]

$\Rightarrow x = 60°$ ...... (i)

व $\angle CDE = \angle DBA$ ...... (ii)

[संगत कोण]

परन्तु $\angle DBA + \angle DBF = 180°$ [रेखीय युग्म]

$\Rightarrow \angle DBA + 110° = 180°$

$\Rightarrow \angle DBA = 180° - 110° = 70°$

$\angle DBA = 70°$, (ii) में रखने पर,

$\angle CDE = 70°$ $\Rightarrow y = 70°$

ΔDBE में,

$x + y + z = 180°$

[एक त्रिभुज के अन्तः कोणों का योग 180° होता है]

$\Rightarrow 60° + 70° + z = 180°$

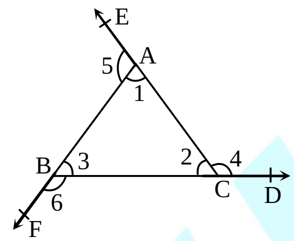
$\Rightarrow 130° + z = 180°$

$\Rightarrow z = 180° - 130° = 50°$

अतः, $x = 60°$, $y = 70°$ व $z = 50°$

Ex.21 प्रदर्शित कीजिए कि एक त्रिभुज के बाह्य कोणों का योग 360° होता है।

Sol. माना आकृति में दर्शाएनुसार ABC एक त्रिभुज है।



अन्तः कोणों को संख्याओं 1, 2 व 3 द्वारा जबकि बाह्य कोणों को संख्याओं 4, 5 व 6 द्वारा अंकित कीजिए।

∵ $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ [रेखीय युग्म] ....(i)

$\angle 3 + \angle 6 = 180°$ [रेखीय युग्म] ......(ii)

$\angle 5 + \angle 1 = 180°$ [रेखीये युग्म] ...... (iii)

समी. (i) को (ii) व (iii) में जोड़ने पर,

$\angle 2 + \angle 4 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 5 + \angle 1 = 540°$

$\Rightarrow \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 540°$

$\Rightarrow \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + 180° = 540°$

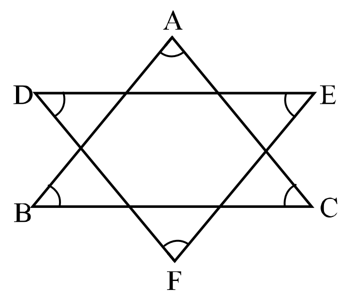
[∵ $\angle 1$, $\angle 2$ व $\angle 3$; ΔABC के अन्तः कोण है (∴ योग 180°) होगा]

$\Rightarrow \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 540° - 180° = 360°$.

Ex.22 आकृति को देखकर

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ ज्ञात कीजिए।

Sol.



हम जानते है कि एक त्रिभुज के अन्तः कोणों का योग 180° होता है।

∴ ΔABC में,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ .....(i)

इसी प्रकार, ΔDEF में,

$\angle D + \angle E + \angle F = 180°$ .....(ii)

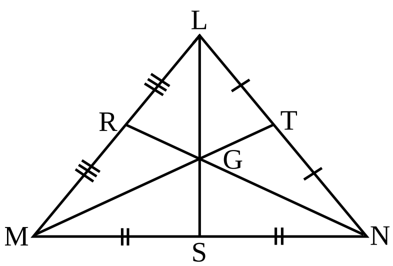
समी.(i) व (ii) को जोड़ने पर,

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 360°$.

त्रिभुज की माध्यिका

एक रेखाखण्ड जो त्रिभुज के एक शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाता है, त्रिभुज की माध्यिका कहलाता है।

उदाहरण के लिए, माना ΔLMN है। माना S ; MN का मध्य बिन्दु है, तो रेखाखण्ड LS, शीर्ष L को इसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाता है।



रेखाखण्ड LS ; ΔLMN की माध्यिका कहलाता है।

इसी प्रकार, RN व MT भी ΔLMN की माध्यिकाऐं है।

नोट :

(i) एक त्रिभुज में तीन माध्यिकाऐं होती है।

(ii) सभी तीनों माध्यिकाऐं एक बिन्दु G पर मिलती है (त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है) अर्थात् किसी त्रिभुज की सभी माध्यिकाऐं संगामी होती है।

(iii) त्रिभुज का केन्द्रक सदैव त्रिभुज के अन्दर स्थित होता है।

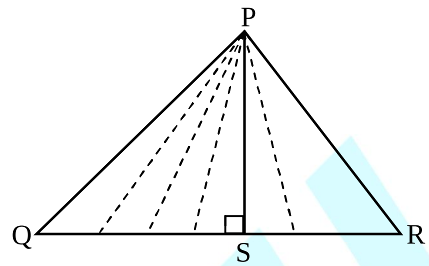
(iv) त्रिभुज का केन्द्रक प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 अनुपात में विभाजित करता है।

(v) एक समबाहु त्रिभुज की माध्यिकाऐं लम्बाई में समान होती है।

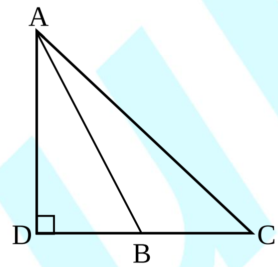
त्रिभुज का शीर्षलम्ब

त्रिभुज का शीर्षलम्ब त्रिभुज के शीर्ष से खींचा गया रेखाखण्ड है जो सम्मुख भुजा को रखने वाली रेखा के लम्बवत् होता है।

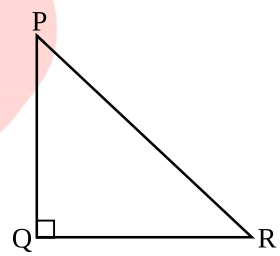
(i) आकृति में PS, भुजा QR पर शीर्षलम्ब है।



(ii) AD शीर्षलम्ब है जहाँ D आकृति में BC पर स्थित लम्ब का पाद है।



(iii) आकृति में भुजा PQ, समकोण त्रिभुज ΔPQR के आधार QR पर स्वंय एक शीर्षलम्ब है।

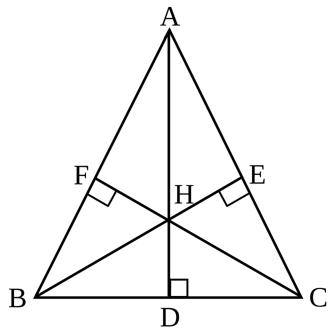


Note :

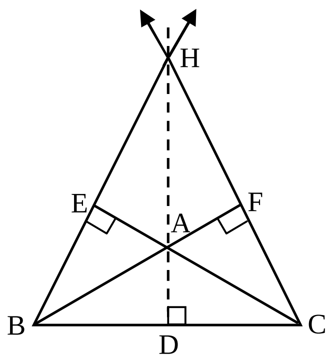
(i) एक त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब होते है।

(ii) सभी तीनों शीर्षलम्ब एक बिन्दु H पर मिलते है (त्रिभुज का लम्बकेन्द्र कहलाता है)।

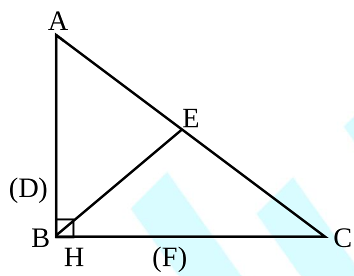
(iii) त्रिभुज का लम्बकेन्द्र, त्रिभुज के अन्दर [आकृति (i)], त्रिभुज के बाहर [आकृति (ii)] तथा त्रिभुज पर [आकृति (iii)] पर स्थित हो सकता है



(i)



(ii)



(iii)

◈ लम्बकेन्द्र

एक त्रिभुज के शीर्षलम्बों का संगामी बिन्दु त्रिभुज का लम्बकेन्द्र है।

नोट :

1. चूंकि एक त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी है, अतः त्रिभुज का लम्बकेन्द्र बनाने के लिए इसके दो शीर्षलम्बों को खींचना पर्याप्त है।

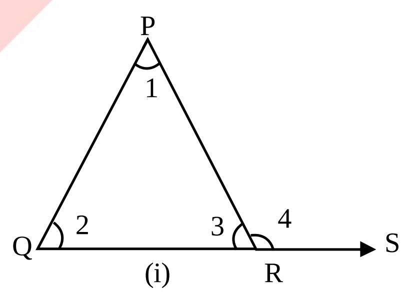
2. यद्यपि त्रिभुज का शीर्षलम्ब एक रेखाखण्ड है परन्तु उनके संगामी गुणधर्म के कथन में, शीर्षलम्ब का अर्थ शीर्षलम्ब (रेखाखण्ड) को अन्तर्विष्ट करने वाली रेखा है।

शीर्षलम्ब के गुणधर्म	**लम्बकेन्द्र के गुणधर्म**
1. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षलम्ब समान होते है।	**1.** एक न्यूनकोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर स्थित होता है।
2. शीर्षलम्ब समबाहु त्रिभुज के आधार को विभाजित करता है।	**2.** एक समकोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र वह शीर्ष होता है जो समकोण बनाता है।
3. एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं पर डाले गये शीर्षलम्ब समान होते है।	**3.** अधिककोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र त्रिभुज के बाहर स्थित होता है।

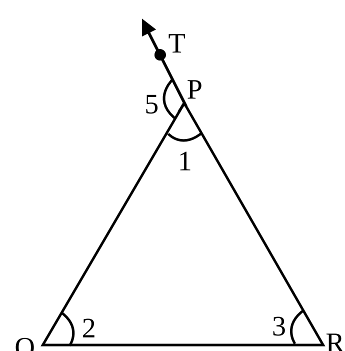
➢ त्रिभुज का बाह्य कोण

यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाया जाता है तो बाह्य निर्मित कोण दो अन्तः सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।

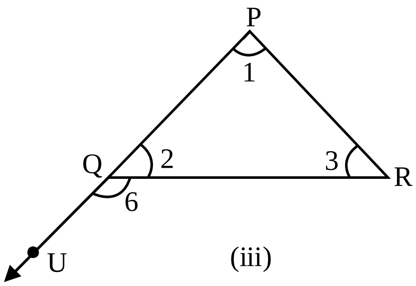
माना एक त्रिभुज PQR इस प्रकार है कि इसकी भुजा QR को बढ़ाने पर किरण RS बनती है तो [आकृति (i)] में R पर ΔPQR का बाह्य कोण $\angle PRS(\angle 4)$ है तथा कोण $\angle 1$ व $\angle 2$ इसके दो अन्तः सम्मुख कोण है अर्थात् $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.



(i)



(ii)



(iii)

आकृति (ii) में, ∠5 बिन्दु P पर बाह्य कोण है तथा ∠2 व ∠3 इसके दो सम्मुख कोण अर्थात् ∠5 = ∠2 + ∠3

आकृति (iii) में, ∠6 बिन्दु Q पर बाह्य कोण है तथा ∠1 एवं ∠3 इसके दो अन्तःसम्मुख कोण है अर्थात् ∠6 = ∠1 + ∠3

नोट :

(i) एक त्रिभुज में बाह्य कोण, प्रत्येक अन्तः सम्मुख कोणों से बड़ा होता है।

(ii) बाह्य कोण तथा अन्तः आसन्न कोण एक रेखीय युग्म बनाते है।

(iii) एक त्रिभुज का बाह्य कोण इसके अन्तः सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।

अत निष्कर्ष यह है कि एक समबाहु त्रिभुज में, शीर्षलम्ब तथा माध्किाऐं समान होती हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.23 एक त्रिभुज में कितने शीर्षलम्ब हो सकते हैं ?

Sol. एक त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब हो सकते हैं

Ex.24 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) एक त्रिभुज में ________ माध्किाऐं होती है

(ii) एक त्रिभुज की माध्यिकाऐं________ होती है

(iii) वह बिन्दु जहाँ सभी माध्यिकाऐं मिलती है। त्रिभुज का _________ कहलाता है।

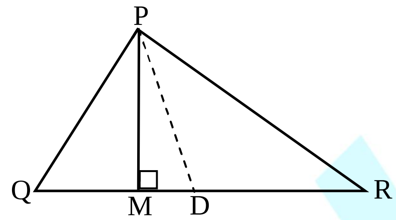
Sol. (i) तीन (ii) संगामी (iii) केन्द्रक

Ex.25 ΔPQR में, D ; $\overline{QR}$ का मध्य बिन्दु है।

(i) PM है ________ (ii) PD है ________

(iii) क्या QM = MR ?

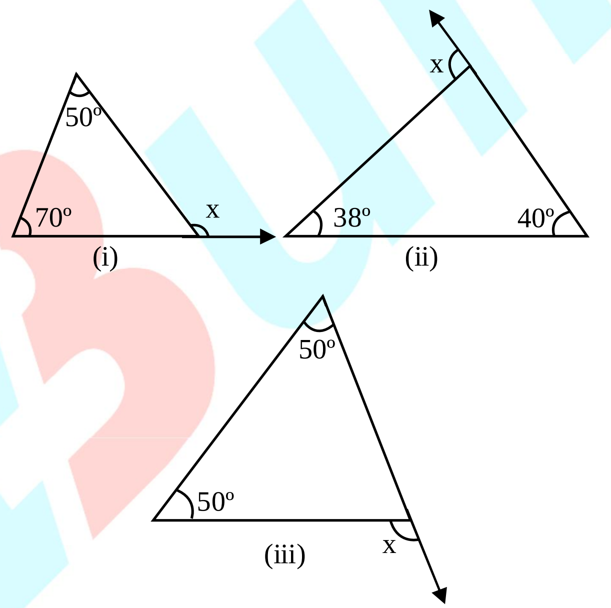
Sol.



(i) PM शीर्षलम्ब है (ii) PD माध्यिका है

(iii) नहीं, QM ≠ MR.

Ex.26 निम्न चित्रों में x का मान ज्ञात कीजिए।



Sol. (i) $\angle x = 50^o + 70^o$

($\because$ बाह्य कोण इसके सम्मुख अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है)

इसलिये, $\angle x = 120^o$

(ii) $\angle x = 38^o + 40^o$

($\because$ बाह्य कोण इसके सम्मुख अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है)

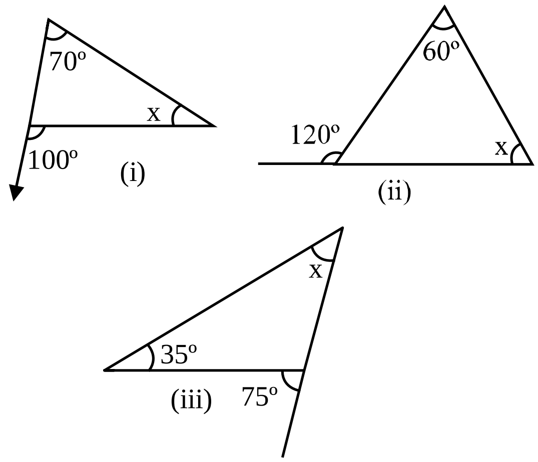
अतः, $\angle x = 78^o$

(iii) $\angle x = 50^o + 50^o$

($\because$ बाह्य कोण इसके सम्मुख अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है)

अतः, $\angle x = 100^o$.

Ex.27 निम्न आकृतियों में अज्ञात अन्तः कोण x का मान ज्ञात कीजिए :



Sol. (i) $100^o = 70^o + x$

($\because$ बाह्य कोण इसके सम्मुख अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है)

$100^o - 70^o = x$

$30^o = x$

अतः, $x = 30^o$

(ii) $120^o = 60^o + x$

($\because$ बाह्य कोण इसके सम्मुख अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है)

$120^o - 60^o = x$

$60^o = x$

अतः, $x = 60^o$

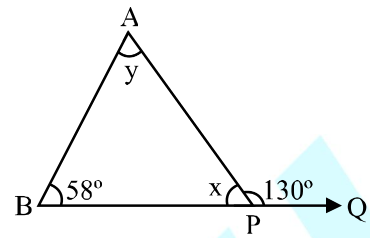
(iii) $75^o = 35^o + x$

$75^o - 35^o = x$

$40^o = x$

अतः, $x = 40^o$

Ex.28 दी गई आकृति में x व y के मान ज्ञात कीजिए।



Sol. $\angle APQ = \angle BAP + \angle ABP$

(Δ का बाह्य कोण गुणधर्म)

$130^o = y + 58^o$

$130^o - 58^o = y$

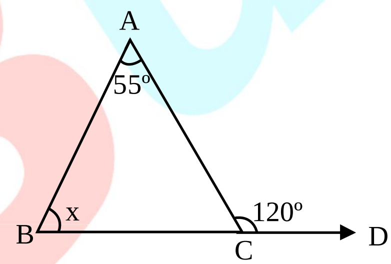
अतः, $y = 72^o$

अब, $x + 130^o = 180^o$ (रेखीय युग्म से)

$x = 180^o - 130^o$

अतः, $x = 50^o$

Ex.29 दी गई आकृति में, x ज्ञात कीजिए।



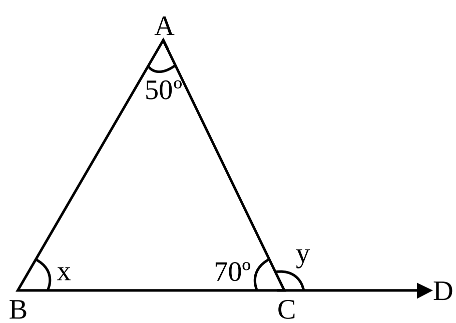
Sol. हम जानते है कि

त्रिभुज का बाह्य कोण = इसके दो अन्तःसम्मुख कोणों का योग

$\therefore$ $55^o + x = 120^o$

$\Rightarrow$ $x = 120^o - 55^o = 65^o$

Ex.30 दी गई आकृति में, बाह्य कोण गुणधर्म से x व y के मान ज्ञात कीजिए।



Sol. चूंकि $70^o + y = 180^o$ (रेखीय युग्म)

$\Rightarrow \quad y = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

हम जानते है कि

त्रिभुज का बाह्य कोण = इसके दो अन्तः सम्मुख कोणों का योग

$\Rightarrow \quad y = x + 50^\circ$

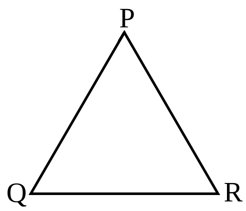
$\Rightarrow \quad 110^\circ = x + 50^\circ$

$\Rightarrow \quad x = 60^\circ$

➤ त्रिभुज असमिका

एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

PQ + QR > PR या PR + QR > PQ या PQ + PR > QR



❖ उदाहरण ❖

Ex.31 क्या निम्न भुजाओं से त्रिभुज बनाना संभव है ?

(i) 2 cm, 3 cm, 5 cm (ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm

(iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm

Sol. (i) नहीं

$2 + 3 \not> 5$

(चूंकि दो भुजाओं (2 cm, 3 cm) का योग 5 cm है जो कि तीसरी भुजा से बड़ा नहीं है)

(ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm

$3 + 6 = 9 > 7$

$6 + 7 = 13 > 3$

$7 + 3 = 10 > 6$

अतः ये त्रिभुज की संभावित भुजाऐं होगी।

(iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm

As $6 + 3 = 9 > 2$

$3 + 2 = 5 \not> 6$

$6 + 2 = 8 > 3$

चूंकि $3 + 2 = 5 \not> 6$

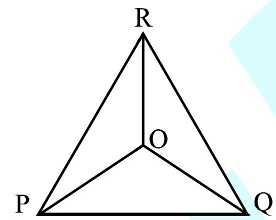
अतः ये त्रिभुज की संभावित भुजाऐं नहीं होगी।

Ex.32 त्रिभुज PQR के अन्दर कोई बिन्दु O लीजिए। क्या निम्न सत्य है ?

(i) OP + OQ > PQ ? (ii) OQ + OR > QR ?

(iii) OR + OP > RP ?

Sol.



(i) OP + OQ > PQ सत्य है।

($\because \Delta$POQ में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक है)

(ii) OQ + OR > QR सत्य है।

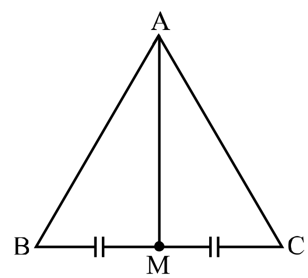
($\because \Delta$ROQ में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक है)

(iii) OR + OP > RP सत्य है।

($\because \Delta$POR में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक है)

Ex.33 त्रिभुज ABC की माध्यिका AM है। क्या

AB +BC + CA > 2AM है ?



Sol. ΔABM में,

AB + BM > AM …(1)

($\because$ त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।)

ΔAMC में

AC + MC > AM …(2)

(1) व (2) को जोड़ने पर,

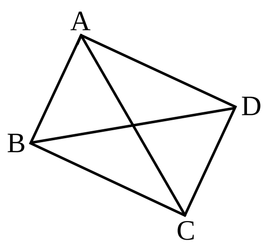
$AB + BM + AC + MC > AM + AM$

$\Rightarrow AB + AC + (BM + MC) > 2\ AM$

$\Rightarrow AB + AC + BC > 2\ AM$ ($\because$ BM + MC = BC)

Ex.34 ABCD एक चतुर्भुज है।

क्या AB + BC + CD + DA > AC + BD है ?



Sol. ΔABC में,

$AB + BC > AC$ …(1)

($\because$दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।)

अब, ΔADC में

$AD + DC > AC$ …(2)

($\because$दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है)

ΔABD में, $AB + AD > BD$ …(3)

ΔBCD में, $BC + CD > BD$ …(4)

(1), (2), (3) व (4) को जोड़ने पर

$2(AB + BC + CD + DA) > 2\ (AC + BD)$

$\Rightarrow AB + BC + CD + DA > AC + BD$

Ex.35 एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाईयाँ 6 cm व 10 cm है। कौनसी दो संख्याओं के मध्य तीसरी भुजा की लम्बाई होगी ?

Sol. हम जानते है कि एक त्रिभुज की दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

$\therefore$ तीसरी भुजा दो भुजाओं के योग से छोटी होगी।

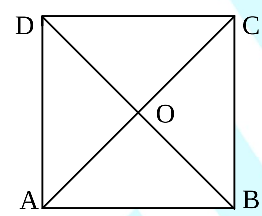
इस प्रकार तीसरी भुजा 6 + 10 = 16 cm से छोटी है। परन्तु तीसरी भुजा, दो भुजाओं के अन्तर से छोटी नहीं हो सकती है। अतः भुजा 10 – 6 = 4 cm से अधिक होगी।

तीसरी भुजा की लम्बाई 4 cm से अधिक तथा 16 cm से कम होगी।

Ex.36 ABCD एक चतुर्भुज है।

क्या AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD) है ?

Sol. माना ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते है।



ΔOAB में,

$OA + OB > AB$ …(1)

($\because$ दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा के योग से अधिक होता है।)

इसी प्रकार ΔOBC में,

$OB + OC > BC$ …(2)

($\because$ दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा के योग से अधिक होता है।)

ΔDOC में, $OC + OD > DC$ …(3)

ΔAOD में, $OA + OD > AD$ …(4)

(1), (2), (3) व (4), को जोड़ने पर

$2(OA + OB + OC + OD) > AB + BC + DC + AD$

$\Rightarrow 2(OA + OC) + 2\ (OB + OD)$

$> AB + BC + DC + AC$

$\Rightarrow 2(AC + BD) > AB + BC + DC + AD$

[$\because$ OA + OC = AC तथा OB + OD = BD]

or $AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD)$

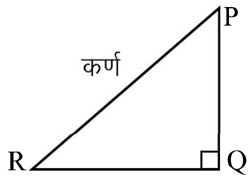
◈ **त्रिभुज के कोणों तथा भुजाओं के लिए नियम :**

(i) महत्तम कोण की सम्मुख भुजा महत्तम होती है तथा इसका विलोम भी सत्य है।

(ii) न्यूनतम कोण की सम्मुख भुजा न्यूनतम होती है तथा इसका विलोम भी सत्य है।

➤ पाइथागोरस प्रमेय

एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग (समकोण की सम्मुख भुजा) इसकी शेष दो भुजाओं के वर्गो के योग के बराबर होता है।



ΔPQR में, $\angle Q = 90^o$

$PR^2 = PQ^2 + RQ^2$

नोट :

(i) एक समकोण त्रिभुज में समकोण की सम्मुख भुजा कर्ण सबसे लम्बी होती है।

(ii) सभी रेखाखण्डों के बाहर स्थित एक बिन्दु दी गई रेखा पर खींचा गया लम्बवत् रेखाखण्ड न्यूनतम होता है।

(iii) एक समकोण त्रिभुज की दो भुजाऐं (कर्ण को छोड़कर) इसके पाद कहलाते है।

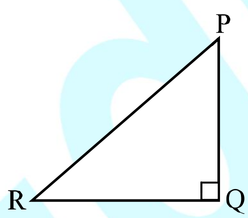
(iv) तीन धनात्मक पूर्णांक a, b, c समान क्रम में पायथगोरस ट्रिपलेट बनाऐंगे यदि $c^2 = a^2 + b^2$ हो। उदाहरण के लिए (3, 4, 5), (8, 15, 12) पाइथागोरस ट्रिपलेट है

$\because 3^2 + 4^2 = 5^2, 8^2 + 12^2 = 15^2.$

◈ **पाइथागोरस प्रमेय का विलोम :**

यदि एक त्रिभुज इस प्रकार है कि इसकी दो भुजाओं के वर्गो का योग तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर होता है, तो यह समकोण त्रिभुज होगा।

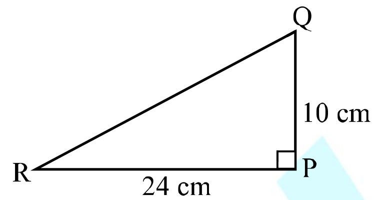
ΔPQR में यदि $PR^2 = PQ^2 + RQ^2$, तो त्रिभुज Q पर समकोण होगा।



❖ उदाहरण ❖

Ex.37 PQR एक त्रिभुज है जो P पर समकोण है। यदि PQ = 10 cm तथा PR = 24 cm है तो QR ज्ञात कीजिए।

Sol. ΔRPQ में, पाइथागोरस प्रमेय से,



$RQ^2 = PQ^2 + PR^2$

$RQ^2 = (10)^2 + (24)^2 = 100 + 576$

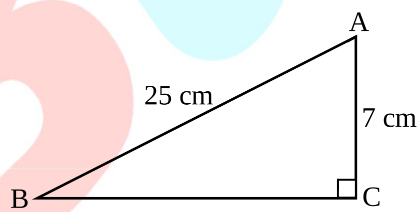
$RQ^2 = 676$

$RQ^2 = 26^2 \quad (\because 676 = 26 \times 26)$

$RQ = 26$ cm

Ex.38 ABC एक त्रिभुज है जो C पर समकोण है। यदि AB = 25 cm तथा AC = 7 cm है, तो BC ज्ञात कीजिए।

Sol. ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से



$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$(25)^2 = (7)^2 + BC^2$

$625 = 49 + BC^2$

$625 - 49 = BC^2$

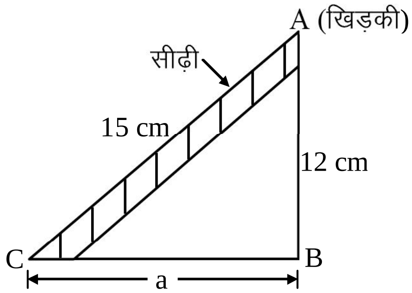
$576 = BC^2$

$24^2 = BC^2 \quad (\because 24 \times 24 = 576)$

$\Rightarrow \quad BC = 24$ cm

Ex.39 एक 15 m लम्बी सीढ़ी जमीन से 12 m ऊँची खिड़की पर लगी हुई है तथा दीवार से इसकी दूरी 'a' है, तो दीवार से सीढ़ी के पाद की दूरी ज्ञात कीजिए।

Sol. ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से,



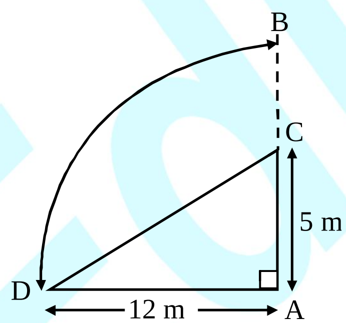
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$15^2 = 12^2 + BC^2$$
$$225 = 144 + BC^2$$
$$225 - 144 = BC^2$$
$$81 = BC^2$$
$$9^2 = BC^2$$
$$\Rightarrow \quad BC = 9 \text{ m}$$

अर्थात्, a = 9 m   ($\because$ BC = a)

Ex.40 एक पेड़ जमीन से 5 m की ऊँचाई से टूट जाता है तथा इसका शीर्ष पेड़ के आधार से 12 m की दूरी पर जमीन को स्पर्श करता है। पेड़ की वास्तविक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Sol. माना AB पेड़ है तथा C वह बिन्दु है जहाँ से यह टूटा है।

तब CB; स्थिति CD ले लेता है।



ज्ञात करना है : पेड़ की वास्तविक ऊँचाई अर्थात् AB

AC + BC

$\Rightarrow$ AC + CD   ($\because$ BC = CD)

ΔACD में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$CD^2 = AC^2 + AD^2$$
$$CD^2 = (5)^2 + (12)^2$$
$$= 25 + 144 = 169$$
$$CD^2 = 13^2$$
$$CD = 13 \text{ m}$$

अतः पेड़ की ऊँचाई = AC + BC

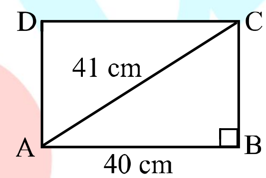
= AC + CD ($\because$ BC = CD)

= (5 + 13)m

= 18 m

अतः पेड़ की ऊँचाई = 18 m

Ex.41 उस आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 40 cm है तथा विकर्ण 41 cm है।



Sol. माना ABCD आयत है जिसमें लम्बाई AB = 40 cm, तथा विकर्ण AC = 41 cm है।

आयत में प्रत्येक कोण 90º होता है। अतः $\angle$ABC = 90º

ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$(41)^2 = (40)^2 + BC^2$$
$$\Rightarrow \quad 1681 = 1600 + BC^2$$
$$\Rightarrow \quad 1681 - 1600 = BC^2$$
$$\Rightarrow \quad 81 = BC^2$$
$$\Rightarrow \quad 9^2 = BC^2$$
$$\Rightarrow \quad BC = 9 \text{ cm}$$

अतः आयत की चौड़ाई = 9 cm

अब आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 (40 + 9) cm

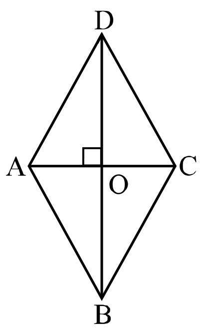
= 2 × 49 cm

अतः आयत का परिमाप = 98 cm

Ex.42 एक समचतुर्भुज के विकर्णों की माप 16 cm तथा 30 cm है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

Sol. माना ABCD समचतुर्भुज है जिसमें विकर्णो AC व BD की लम्बाईयाँ क्रमशः 16 cm व 30 cm है।

हम जानते है कि समचतुर्भुज में विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं अर्थात् AO = OC तथा OB = OD



अतः $\angle AOD = 90^\circ$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}$$

$$DO = \frac{BD}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

ΔAOD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AD^2 = AO^2 + DO^2$

$AD^2 = (8)^2 + (15)^2$

$= 64 + 225$

$AD^2 = 289$

$AD^2 = 17^2$

$AD = 17$ cm

समचतुर्भुज का परिमाप = 4 × भुजा

= 4 × AD

= 4 × 17 cm

अतः समचतुर्भुज का परिमाप = 68 cm

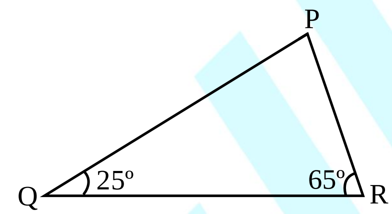
Ex.43 ΔPQR के कोण Q व R; 25° व 65° है।

निम्न में से कौनसा सत्य है ?

(i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$

(ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$

(iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



Sol. ΔPQR में

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$

$\angle P + 25^\circ + 65^\circ = 180^\circ$

$\angle P + 90^\circ = 180^\circ$

$\angle P = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow$ ΔPQR समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle P = 90^\circ$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

$QR^2 = PQ^2 + PR^2$

अतः (ii) सत्य है।

Ex.44 निम्न में से कौनसी समकोण त्रिभुज की भुजाऐं होगी?

(i) 2.5 cm, 6.5 cm, 6 cm

(ii) 2 cm, 2 cm, 5 cm

(iii) 1.5 cm, 2 cm, 2.5 cm ?

Sol. हम जानते है एक समकोण त्रिभुज में, लम्बी भुजा (कर्ण) का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गो के योग के बराबर होता है।

(i) माना a = 2.5, b = 6.5, c = 6

$a^2 + c^2 = [(2.5)^2 + (6)^2] \text{ cm}^2$

$= (6.25 + 36) \text{ cm}^2$

$a^2 + c^2 = 42.25 \text{ cm}^2$

अब $b^2 = (6.5)^2 = 6.5 \times 6.5 = 42.25 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow$ $a^2 + c^2 = b^2$

$\Rightarrow$ 2.5 cm, 6.5 cm, 6 cm त्रिभुज की भुजाऐं है।

(ii) माना a = 2, b = 2, c = 5

$a^2 + b^2 = (2)^2 + (2)^2 = 4 + 4$

$a^2 + b^2 = 8$

अब, $c^2 = (5)^2 = 25$

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 \neq c^2$ $(\because 8 \neq 25)$

$\Rightarrow$ 2 cm, 2 cm व 5 cm समकोण त्रिभुज की भुजाऐं नहीं है।

(iii) माना a = 1.5 cm, b = 2 cm, c = 2.5 cm

$a^2 + b^2 = (1.5)^2 + (2)^2$

$= 2.25 + 4 = 6.25$

$c^2 = (2.5)^2$

$= 6.25$

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = c^2$

अतः 1.5 cm, 2 cm व 2.5 cm समकोण त्रिभुज की भुजाऐं है।

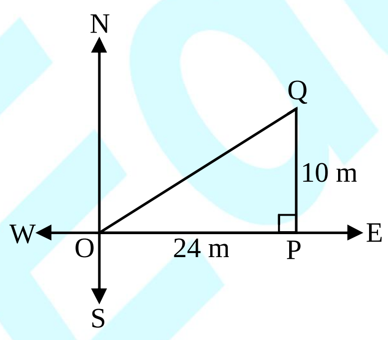
Ex.45 एक व्यक्ति 24 m पूर्व की ओर तथा फिर 10 m उत्तर की ओर जाता है। वह अपने प्रारंभिक स्थिति से कितना दूर है ?

Sol. माना व्यक्ति की वास्तविक स्थिति O है। वह OP = 24 m पूर्व की ओर तथा फिर PQ = 10 m उत्तर की ओर जाता है।

अन्त में, वह बिन्दु Q पर पहुँचता है।

OQ को मिलाइए।

अब, समकोण त्रिभुज ΔOPQ में पाइथागोरस प्रमेय से



$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$= (24)^2 + (10)^2$

$= 576 + 100 = 676$

$OQ^2 = 26^2$

$OQ = 26$ m

अतः व्यक्ति अपनी प्रारंम्भिक स्थिति से 26 m दूरी पर है।

Ex.46 मार्ग के एक ओर एक 13 m लम्बी सीढ़ी जमीन से 5 m ऊपर स्थित खिड़की से लगी हुई है। इसके पाद को उसी बिन्दु पर रखते हुए सीढ़ी को मार्ग के दूसरी ओर घुमाने पर यह 12 m की ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँचती है। मार्ग की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

Sol. माना AB मार्ग है तथा C सीढ़ी का पाद है। D व E जमीन से क्रमशः 5 m व 12 m ऊपर स्थित खिड़कियाँ है। तब CD व CE सीढ़ी की दो स्थितियों है। ΔCDA, में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 + AD^2 = DC^2$

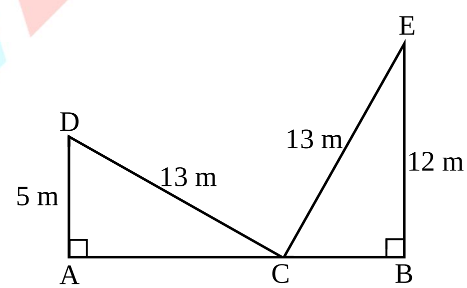
$AC^2 = DC^2 - AD^2$

$= 13^2 - 5^2$

$= 169 - 25 = 144$

$AC^2 = 12^2$

$\Rightarrow$ AC = 12 m



अब ΔBEC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$CE^2 = BE^2 + BC^2$

$(13)^2 = (12)^2 + BC^2$

$169 - 144 = BC^2$

$25 = BC^2$

$5^2 = BC^2$

$\Rightarrow$ BC = 5 m.

अतः मार्ग की चौड़ाई

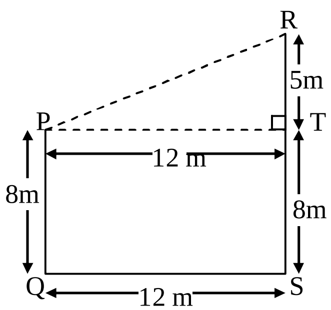
= AB = AC + BC

= 12 m + 5 m

= 17 m

Ex.47 8 m व 13 m ऊँचाई के दो खंभे समतल पर लगे हुए है। यदि उनके पादों के मध्य दूरी 12 m है तो उनके शीर्षो के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

Sol. माना PQ व RS दिए गए खंभे इस प्रकार है कि PQ = 8 m, RS = 13 m तथा QS = 12 m



PR को मिलाइऐ (खंभों के शीर्षो के मध्य दूरी जो हमें ज्ञात करनी है)

P से, PT ⊥ RS खींचिए।

$\therefore$ RT = RS – TS (TS = PQ = 8 m)

= (13 – 8) m

RT = 5 m

PT = QS = 12 m

ΔPRT में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$PR^2 = PT^2 + RT^2$

$PR^2 = (12)^2 + (5)^2$

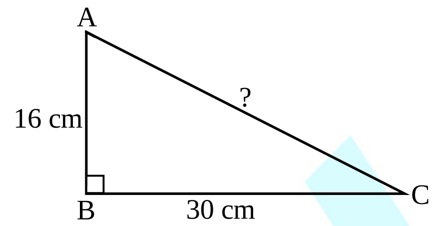
= 144 + 25 = 169

$PR^2 = 13^2$

$\Rightarrow$ PR = 13 m.

अतः खंभो के शीर्षो के मध्य दूरी 13 m है।

Ex.48 दी गई आकृति में समकोण त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



Sol. आकृति में, AC कर्ण (समकोण की सम्मुख भुजा) है।

पाइथागोरस प्रमेय से,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow$ AC × AC = AB × AB + BC × BC

$\Rightarrow$ AC × AC = 16 × 16 + 30 × 30

= 256 + 900

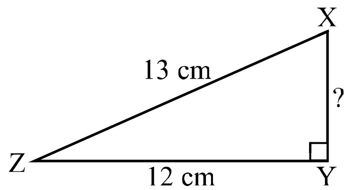
= 1156

= 34 × 34

दोनों ओर तुलना करने पर,

AC = 34 cm

Ex.49 समकोण त्रिभुज में XY की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



Sol. त्रिभुज में, XZ कर्ण (क्योंकि XZ ; समकोण Y के सम्मुख स्थित है) है।

अतः पाइथागोरस प्रमेय से

$XZ^2 = XY^2 + YZ^2$

$\Rightarrow (13)^2 = XY^2 + (12)^2$

$\Rightarrow XY^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$

$\Rightarrow (XY) \times (XY) = 25 = 5 \times 5$

$\Rightarrow XY = 5$ cm.