परिमाप एवं क्षेत्रफल

4
CHAPTER

सूची

- परिचय
- बहुभुज का परिमाप
- वर्ग एवं आयत के लिए सूत्र
- त्रिभुज का क्षेत्रफल
- आयत एवं वर्ग के भागो के रूप में त्रिभुज
- समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल
- आयत एवं वर्ग के चारों ओर मार्ग

➤ परिचय

◈ बन्द आकृतियाँ

वह आकृति जिसका प्रारम्भिक तथा अन्तिम बिन्दु समान हो, **बन्द आकृति** कहलाती है।

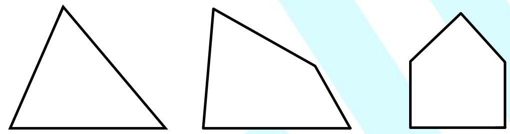
◈ सरलरेखीय आकृतियाँ

वह आकृति जो केवल रेखा खण्ड़ो से बनी हो, **सरल रेखीय आकृति** कहलाती है।

◈ बहुभुज

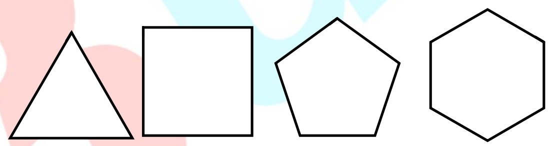
एक बहुभुज सरल बन्द आकृति है जो केवल रेखा खण्ड़ों से बनी है। इस प्रकार, एक बहुभुज बन्द सरल रेखीय आकृति है।

निम्नलिखित आकृतियाँ बहुभुज के उदाहरण हैं :



◈ सम बहुभुज

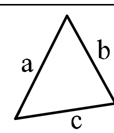
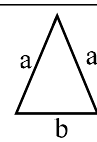
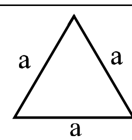
एक सम बहुभुज वह बहुभुज है जिसमें सभी भुजाएं बराबर होती हैं।

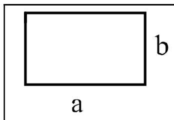
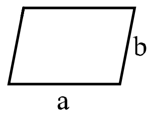
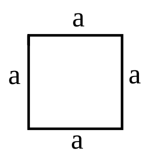
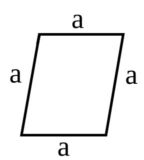


➤ बहुभुज का परिमाप

एक बन्द आकृति की सभी भुजाओं की लम्बाईयों का योगफल उस आकृति का **परिमाप** कहलाता है।

कुछ बहुभुजों के परिमाप नीचे सारणी में दिये गये हैं :

आकृति	आकृति का नाम	परिमाप
	विषम बाहु त्रिभुज	(a + b + c) भुजाओं की लम्बाई का योगफल
	समद्विबाहु त्रिभुज	(2a + b) 2 × समान भुजाओं की लम्बाई + असमान भुजा की लम्बाई
	समबाहु त्रिभुज	3a 3 × त्रिभुज की भुजा की लम्बाई
	आयत	2(a + b) 2 (लम्बाई तथा चौड़ाई

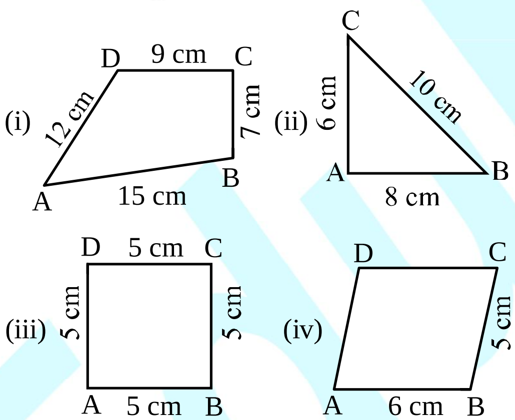
		का योगफल)
	समान्तर चतुर्भुज	2(a + b) 2(लम्बाई + चौड़ाई)
	वर्ग	4a 4 × वर्ग की भुजा की लम्बाई
	समचतुर्भुज	4a 4 × समचतुर्भुज की भुजा की लम्बाई

टिप्पणी : सम बहुभुज का परिमाप

= भुजाओं की संख्या × एक भुजा की लम्बाई

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 निम्न बन्द आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए:



Sol. (i) चतुर्भुज ABCD का परिमाप

= AB + BC + CD + DA

= 15 cm + 7 cm + 9 cm + 12 cm = 43 cm

(ii) त्रिभुज ABC का परिमाप

= AB + BC + CA

= 8 cm + 10 cm + 6 cm = 24 cm

(iii) वर्ग का परिमाप

= 4 × एक भुजा की लम्बाई

= 4 × 5 cm = 20 cm.

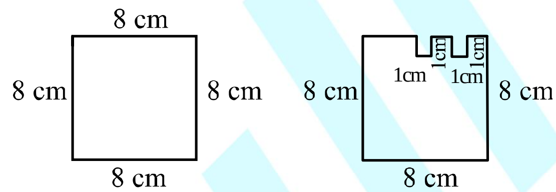
(iv) समान्तर चतुर्भुज का परिमाप

= 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 (6 cm + 5 cm)

= 22 cm.

Ex.2 निम्न आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए तथा बताइये कि कौनसी आकृति अधिक परिमाप रखती है?



(A) (B)

Sol. आकृति A का परिमाप जो कि 8 cm भुजा का वर्ग है = 4 × 8 cm = 32 cm.

इसी प्रकार, आकृति B का परिमाप जो कि वर्ग नहीं है, क्योंकि वर्ग की एक भुजा के अनुदिश 1 cm भुजा के दो वर्गाकार टुकड़े कटे हुए है

= 8 cm + 8 cm + (8 cm + 1 cm + 1 cm + 1 cm + 1 cm) + 8 cm = 36 cm.

स्पष्टतया, आकृति B आकृति A की अपेक्षा अधिक परिमाप रखती है।

टिप्पणी : जब दी गई आकृति से कोई आकृति काटी जाती है तो इस प्रकार प्राप्त नई आकृति का परिमाप बढ़ जाता है।

Ex.3 निशा उसके घर के सामने स्थित आयताकार बगीचे की तारबन्दी करवाना चाहती है। इसकी लम्बाई 6 m तथा चौड़ाई 3 m है। भुजा जिस पर तारबन्दी नहीं करनी है, 6 m लम्बी है। ₹ 275 प्रति मीटर की दर से तारबन्दी का खर्च ज्ञात कीजिए।.

Sol. बगीचे की आकृति आयताकार है। इसकी एक भुजा (6 m) की तारबन्दी नहीं करनी है। इसलिए आवश्यक तारबन्दी की लम्बाई एक भुजा को छोड़कर बगीचे का परिमाप होगी

= 6 m + 3 m + 3 m

= 12 m

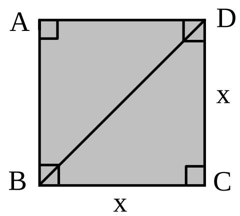
∴ ₹ 275 प्रति मीटर की दर से तारबन्दी का खर्च

= ₹ 275 × 12

= ₹ 3300.

➢ वर्ग तथा आयत के लिए अन्य सूत्र

◈ **वर्ग :** माना ABCD एक वर्ग है जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 'x' इकाई है।



(i) वर्ग का क्षेत्रफल = $x \times x = x^2$ इकाई^2

(ii) वर्ग की भुजा = $\sqrt{\text{वर्ग का क्षेत्रफल}} = \sqrt{x^2}$ इकाई

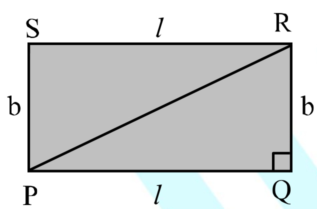
वर्ग की भुजा = x इकाई

(iii) वर्ग का विकर्ण (AC = BD) = $\sqrt{BC^2 + DC^2}$

$= \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$ इकाई

◈ **आयत :**

माना PQRS एक आयत है जिसकी लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः l एवं b है।



(i) आयत का क्षेत्रफल = ($l \times b$) इकाई^2

(ii) आयत की लम्बाई

$= \dfrac{\text{आयत का क्षेत्रफल}}{\text{आयत की चौड़ाई}}$ इकाई

(iii) आयत की चौड़ाई

$= \dfrac{\text{आयत का क्षेत्रफल}}{\text{आयत की लम्बाई}}$ इकाई

(iv) विकर्ण की लम्बाई (PR = SQ)

$= \sqrt{PQ^2 + RQ^2} = \sqrt{l^2 + b^2}$ इकाई

◈ **क्षेत्रफल की इकाई**

1. $1\ cm^2 = 10\ mm \times 10\ mm = 100\ mm^2$
2. $1\ m^2 = 100\ cm \times 100\ cm = 10{,}000\ cm^2$

क्षेत्रफल की बड़ी इकाईयाँ

1 आर = 100 m^2

1 हेक्टार = 10,000 m^2

❖ उदाहरण ❖

Ex.4 एक आयताकार भूखण्ड की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 500 m तथा 300 m है। ज्ञात कीजिए

(i) इसका परिमाप

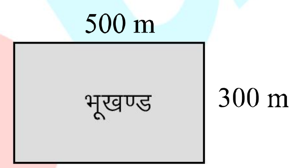
(ii) इसका क्षेत्रफल

(iii) भूखण्ड का खर्च, यदि 1 m^2 भूमि का खर्च ₹ 1000 है।

Sol. यहाँ

भूखण्ड की लम्बाई (l) = 500 m

भूखण्ड की चौड़ाई (b) = 300 m



(i) परिमाप = 2 (l + b)

= 2 (500 + 300) m

= 2 × 800 m

परिमाप = 1600 m

(ii) भूखण्ड का क्षेत्रफल = $l \times b$

$= (500 \times 300)\ m^2$

$= 150000\ m^2$

(iii) ∵ 1 m^2 भूमि का खर्च = ₹ 1000

∴ 150000 m^2 भूखण्ड का खर्च

= ₹ 1000 × 150000

= ₹ 150000000

Ex.5 उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 10.5 cm तथा 7.5 dm है।

Sol. आयत की लम्बाई (l) = 10.5 cm

आयत की चौड़ाई (b)

= 7.5 dm = (7.5 × 10) cm = 75 cm

आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

$= (10.5 \times 75)\ cm^2$

$= 787.5\ cm^2$.

Ex.6 एक आयताकार कुर्सी का परिमाप 100 cm है। यदि लम्बाई 35 cm है, तो इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

Sol. लम्बाई (l) = 35 cm.

चौड़ाई (b) = ?

परिमाप = 100 cm.

आयत का परिमाप = $2(l + b)$

$100 = 2[35 + b]$

$100 \div 2 = 35 + b$

$50 = 35 + b$

$50 - 35 = b$

$15 = b$

चौड़ाई (b) = 15 cm.

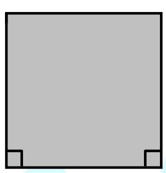
अब, आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

$= 35 \times 15\ cm^2$

$= 525\ cm^2$.

Ex.7 एक वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका परिमाप 320 m है।

Sol.



वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

320 m = 4 × भुजा

320 ÷ 4 = भुजा

80 m = भुजा

वर्ग की भुजा = 80 m

अब, वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 80 m × 80 m

फलतः, वर्ग का क्षेत्रफल = $6400\ m^2$

Ex.8 एक वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल एक आयताकार पार्क के क्षेत्रफल के बराबर है। यदि वर्गाकार पार्क की भुजा 60 m है तथा आयताकार पार्क की लम्बाई 90 m है, तो आयताकार पार्क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

Sol. वर्गाकार पार्क की भुजा = 60 m

वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

$= 60\ m \times 60\ m = 3600\ m^2$

आयताकार पार्क की लम्बाई (l) = 90 m

आयताकार पार्क की चौड़ाई (b) = ?

चूंकि, आयताकार पार्क का क्षेत्रफल

= वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल (दिया गया है)

$l \times b = 3600$

$90 \times b = 3600$

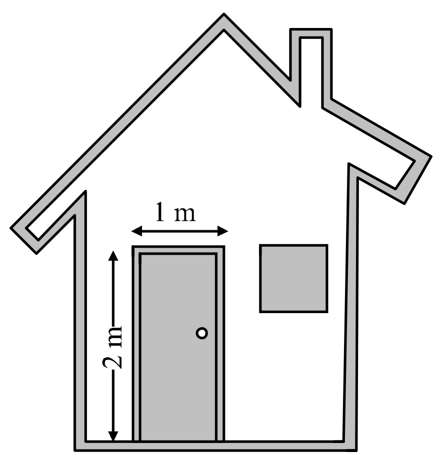
$b = 3600 \div 90$

$b = 40$ m

अतः आयताकार पार्क की चौड़ाई = 40 m.

Ex.9 एक दीवार में 2 m लम्बा तथा 1 m चौड़ा एक दरवाजा लगा हुआ है। दीवार की लम्बाई 4.5 m है तथा चौड़ाई 3.6 m है। दीवार पर सफेदी करने का खर्च ज्ञात कीजिए, यदि दीवार पर सफेदी करने की दर ₹ 20 प्रति m^2 है।

Sol.



दरवाजे का क्षेत्रफल = $(2 \times 1)\ m^2 = 2\ m^2$

दरवाजे युक्त दीवार का क्षेत्रफल = $(4.5 \times 3.6)\ m^2$

$= 16.2\ m^2$

दरवाजे को छोड़ने पर दीवार का क्षेत्रफल = $(16.2 - 2)\ m^2$

सफेदी करने के लिए दीवार का क्षेत्रफल = $14.2\ m^2$

दीवार पर सफेदी करने का खर्च

= दीवार का क्षेत्रफल × सफेदी प्रति m^2 का खर्च

= ₹ (14.2 × 20) = ₹ 284

Ex.10 एक वर्गाकार खेत की 40 पैसे प्रति मीटर की दर से तारबन्दी करने का खर्च ₹ 2000 है। 80 पैसे प्रति 100 m^2 की दर से खेत की सिंचाई करने का खर्च ज्ञात कीजिए।

Sol. तारबन्दी का कुल खर्च = ₹ 2000

तारबन्दी की दर = ₹ $\left(\frac{40}{100}\right)$ प्रति मीटर

= ₹ $\frac{2}{5}$ प्रति मीटर

खेत का परिमाप = $\frac{\text{तारबन्दी का कुल खर्च}}{\text{प्रति मीटर दर}}$

$= \frac{2000}{2/5} m = \frac{2000 \times 5}{2} = 5{,}000\,m$

वर्गाकार खेत की भुजा = $\frac{5000}{4} m = 1250\ m$

वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल = $(1{,}250 \times 1{,}250)\ m^2$

$= 15{,}62{,}500\ m^2$

100 m^2 सिंचाई का खर्च = ₹ $\left(\frac{80}{100}\right)$ = ₹ $\frac{4}{5}$

1 m^2 सिंचाई का खर्च = ₹ $\left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{100}\right)$

15,62,500 m^2 सिंचाई का खर्च

= ₹ $\left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{100} \times 1562500\right)$ = ₹ 12,500.

Ex.11 एक आयताकार पार्क की भुजाओं का अनुपात 5 : 4 है। यदि इसका क्षेत्रफल 8,000 m^2 है, तो इस पर ₹ 3.50 प्रति मीटर की दर से तारबन्दी करने का खर्च ज्ञात कीजिए।

Sol. माना आयताकार पार्क की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 5x एवं 4x है।

आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

अतः $5x \times 4x = 8000$

$20x^2 = 8000$

$x^2 = 8000 \div 20$

$x^2 = 400$

$x^2 = 20 \times 20 = (20)^2$

$\Rightarrow$ $x = 20\ m$

अतः लम्बाई = $5 \times x = 5 \times 20 = 100\ m$

चौड़ाई = $4 \times x = 4 \times 20 = 80\ m.$

लम्बाई अर्थात् तारबन्दी का परिमाप

$= 2\,(l + b)\ m = 2\,(100 + 80)\ m$

$= 2 \times 180\ m = 360\ m$

∵ तारबन्दी का खर्च = ₹ 3.50 प्रति मीटर

∴ तारबन्दी का कुल खर्च = ₹ 3.50 × 360 = ₹ 1,260

Ex.12 एक तार आयताकार आकृति में है। इसकी लम्बाई 32.9 m है तथा चौड़ाई 21.6 m है। यदि समान तार को पुनः एक वर्ग की आकृति में मोड़ा जाता है, तो प्रत्येक भुजा का माप क्या होगा? तथा ज्ञात कीजिए कि कौन अधिक क्षेत्रफल परिबद्ध करता है।

Sol. चूंकि तार आयताकार आकृति में है।

इसलिए, तार की कुल लम्बाई = आयत का परिमाप

= 2 [32.9 + 21.6] m

= 2 [54.5] m

= 109 m.

समान तार को पुनः वर्ग की आकृति में मोड़ा जाता है।

इसलिए, कुल तार की लम्बाई = वर्ग का परिमाप

$\Rightarrow$ 109 m = वर्ग का परिमाप

अतः, वर्ग की भुजा

$= \frac{\text{वर्ग का परिमाप}}{4} = \frac{109}{4} m = 27.25\ m$

वर्ग का क्षेत्रफल = $(27.25\ m)^2 = 742.56$ sq m

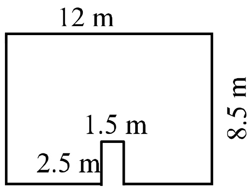
तथा 32.9 m एवं 21.6 m लम्बे तार के द्वारा परिबद्ध आयताकार आकृति का क्षेत्रफल

= 32.9 m × 21.6 m

= 710.64 sq m.

फलतः उपर्युक्त से यह स्पष्ट है कि वर्ग का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल से अधिक है जबकि दोनों समान परिमाप रखते है।

Ex.13 12 m × 8.5 m विमा की एक दीवार पर 2.5 m × 1.5 m विमा का एक दरवाजा लगा हुआ है। दीवार पर रंग करने का खर्च ज्ञात कीजिए, यदि रंग करने की दर ₹ 3.75 प्रति वर्ग मीटर है।



Sol. दरवाजे के क्षेत्रफल को छोड़कर दीवार पर रंग करना है।

दरवाजे का क्षेत्रफल = l × b

= 2.5 m × 1.5 m = 3.75 sq m

अब दरवाजे युक्त दीवार का क्षेत्रफल

= 12 m × 8.5 m = 102 sq m

अतः दरवाजे को छोड़ने पर दीवार का क्षेत्रफल

= 102 sq m – 3.75 sq m = 98.25 sq m

दीवार पर रंग करने का खर्च = ₹ 3.75 × 98.25

= ₹ 368.44 (दो दशमलवांश तक)

= ₹ 368 (लगभग)

Ex.14 एक आयताकार खेत की लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात 3 : 1 है। यदि खेत का क्षेत्रफल 675 sq m है, तो इसकी लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

Sol. माना आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 3x एवं x है।

तब आयत का क्षेत्रफल = 3x × x = 675 sq m

$\Rightarrow\ 3x^2 = 675$ sq m

$\Rightarrow\ x^2 = \frac{675}{3} = 225 = 15 \times 15$

$\Rightarrow\ x \times x = 15 \times 15$

$\Rightarrow\ x = 15$ m

इस प्रकार, आयत की लम्बाई

= 3x = 3 × 15 = 45 m

तथा आयत की चौड़ाई = x = 15 m.

Ex.15 6 sq m को निम्न में व्यक्त करो :

(i) sq cm (ii) sq mm

Sol. (i) चूंकि 1 sq m = 100 × 100 sq cm

6 sq m = 6 × 100 × 100 sq m

= 60000 sq cm

(ii) चूंकि 1 sq cm = 100 sq mm

60000 sq cm = 60000 × 100 sq mm

= 6000000 sq mm

इसलिए 6 sq m = 60000 sq cm = 6000000 sq mm

Ex.16 745000000 mm को निम्न में व्यक्त कीजिए:

(i) sq cm (ii) sq m

Sol. (i) चूंकि 100 sq mm = 1 sq cm

745000000 sq m m = $\frac{745000000}{100}$ sq cm

= 7450000 sq cm

(ii) चूंकि 100 × 100 sq cm = 1 sq m

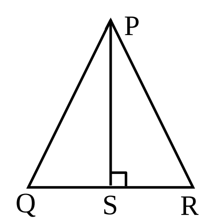
7450000 sq cm = $\frac{7450000}{100 \times 100}$ sq m

= 745 sq m

इसलिए 745000000 sq mm = 7450000 sq cm

= 745 sq m

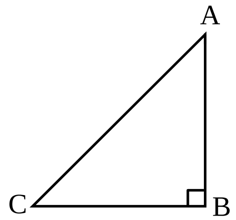
◈ त्रिभुज का क्षेत्रफल



त्रिभुज (ΔPQR) का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × QR × PS

ΔPQR का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × QR × PS इकाई^2

◈ समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

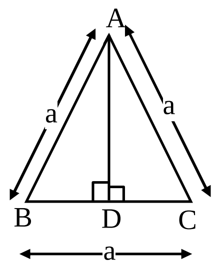


ΔABC का क्षेत्रफल $= \left(\frac{1}{2} \times BC \times AB\right)$ इकाई^2

या ΔABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (लम्ब भुजाओं का गुणनफल) इकाई^2

◈ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल



ΔABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$= \frac{1}{2} \times a \times AD$ ....(i)

ΔABD में, पाइथागोरस प्रमेय के उपयोग से

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$a^2 = AD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

($\because$ शीर्ष लम्ब आधार को समद्विभाजित करता है)

$a^2 = AD^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = AD^2$

$\frac{4a^2 - a^2}{4} = AD^2$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = AD$

$\sqrt{\frac{3 \times a \times a}{2 \times 2}} = AD$

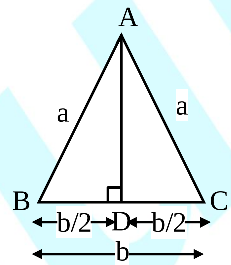
$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

अब, (i) से

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (a^2)$ इकाई^2

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (भुजा)^2 इकाई^2

◈ समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल



ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times AD$ ……(1)

ΔABD में,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ (पाइथागोरस प्रमेय के उपयोग से)

$a^2 = AD^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ (समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष लम्ब आधार को समद्विभाजित करता है)

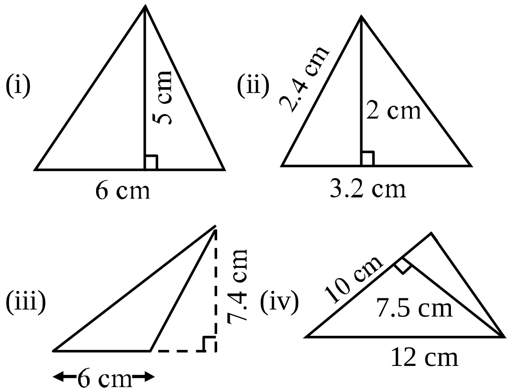
$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = AD$

(1) से,

ΔABC का क्षेत्रफल $= \left(\frac{1}{2} \times b \times \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}\right)$ इकाई^2

❖ उदाहरण ❖

Ex.17 निम्न त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



Sol. (i) आधार = 6 cm तथा ऊँचाई = 5 cm.

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 6\text{ cm} \times 5\text{ cm} = 3\text{ cm} \times 5\text{ cm}$

= 15 sq cm.

(ii) आधार = 3.2 cm तथा ऊँचाई = 2 cm

अतः क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 3.2 \times 2 = 3.2\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 3.2$ sq cm

(iii) आधार = 6 cm तथा ऊँचाई = 7.4 cm

इसलिए, क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 6\text{ cm} \times 7.4\text{ cm} = 3\text{ cm} \times 7.4\text{ cm}$

= 22.2 sq cm.

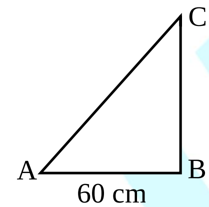
(iv) आधार = 10 cm तथा ऊँचाई = 7.5 cm.

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 10\text{ cm} \times 7.5\text{ cm} = 5\text{ cm} \times 7.5\text{ cm}$

= 37.5 sq cm.

Ex.18 एक त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आधार चित्रानुसार 60 cm है तथा जिसका क्षेत्रफल 600 sq cm है।

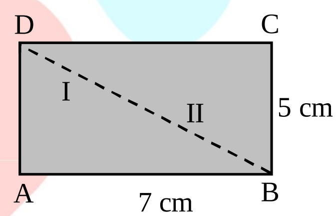


Sol. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$\therefore$ ऊँचाई = 2 × $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{2 \times 600}{60} = 20\text{cm}.$

➤ आयत तथा वर्ग के भागों के रूप में त्रिभुज

ABCD एक आयत है जहाँ AD = BC = 5 cm तथा AB = DC = 7 cm, तब



आयत ABCD का क्षेत्रफल = ΔABD का क्षेत्रफल + ΔBDC का क्षेत्रफल

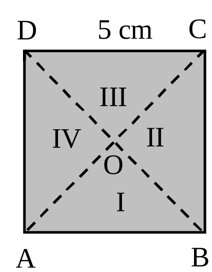
आयत ABCD का क्षेत्रफल = 2 (ΔABD का क्षेत्रफल)

($\because$ ΔABD का क्षेत्रफल = ΔBDC का क्षेत्रफल)

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ आयत ABCD का क्षेत्रफल = ΔABD का क्षेत्रफल

या $\frac{1}{2}$ आयत ABCD का क्षेत्रफल = ΔBDC का क्षेत्रफल

तथा दिये गये चित्र में ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा 5 cm है, तब



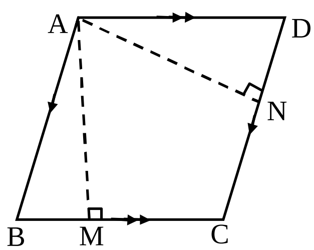
वर्ग का क्षेत्रफल = (ΔI का क्षेत्रफल + ΔII का क्षेत्रफल + ΔIII का क्षेत्रफल + ΔIV का क्षेत्रफल)

$\frac{1}{4}$ (वर्ग का क्षेत्रफल) = प्रत्येक Δ का क्षेत्रफल

(∵ सभी चार Δ का क्षेत्रफल समान है)

➢ समान्तर चतुर्भुज ($||^{gm}$) का क्षेत्रफल

ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें AB || CD, BC || AD है।



समान्तर चतुर्भुज (ABCD) का क्षेत्रफल

= आधार × संगत शीर्षलम्ब

समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= (BC × AM) इकाई^2

समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = (CD × AN) इकाई^2

इस प्रकार,

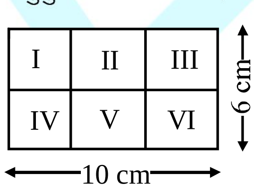
(i) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

(ii) समान्तर चतुर्भुज का आधार = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

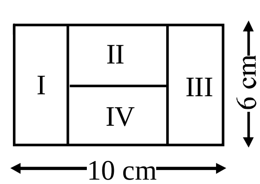
(iii) समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

❖ उदाहरण ❖

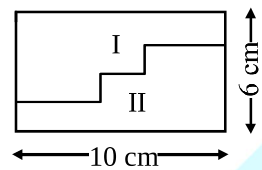
Ex.19 निम्न आयत सर्वागसम बहुभुजो से बने है। प्रत्येक बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(A)



(B)



(C)

Sol. (i) स्पष्टतया, चित्र (A) 6 समरूप आकृतियाँ रखता है

इसलिए, आयत का क्षेत्रफल = 6 × एक बहुभुज का क्षेत्रफल

⇒ एक बहुभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\text{आयत का क्षेत्रफल}}{6}$

$= \frac{10 \times 6}{6}$ sq cm = 10 sq cm.

(ii) चित्र (B) 4 समरूप आकृतियाँ रखता है

इसलिए, एक बहुभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{\text{आयत का क्षेत्रफल}}{4}$

$= \frac{10 \times 6}{4}$ sq cm = 15 sq cm

(iii) चित्र (C) 2 समरूप आकृतियाँ रखता है

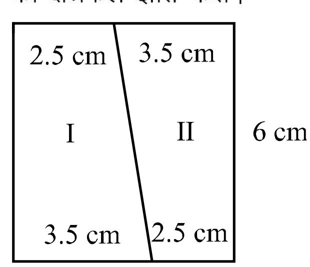
इसलिए, एक बहुभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{\text{आयत का क्षेत्रफल}}{2}$

$= \frac{10 \times 6}{2}$ sq cm = 30 sq cm.

Ex.20 6 cm भुजा का एक वर्ग चित्रानुसार दो भागों में विभाजित है। भागो को प्रेक्षित करो तथा प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Sol.



किसी भी भाग को ट्रेसिंग पेपर पर ट्रेस करके इसे दूसरे भाग पर रखने पर हम पाते है कि दोनों भाग ठीक समान है अर्थात् सर्वागसम है।

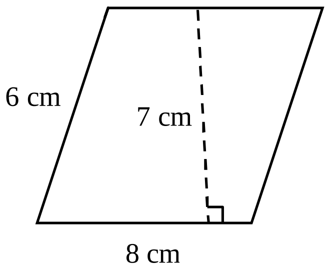
इसलिए, प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{\text{वर्ग का क्षेत्रफल}}{2} = \frac{6 \times 6}{2}$ sq cm = 18 sq cm.

फलतः प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल = 18 sq cm.

Ex.21 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 8 cm, ऊँचाई 7 cm तथा चौड़ाई 6 cm है।

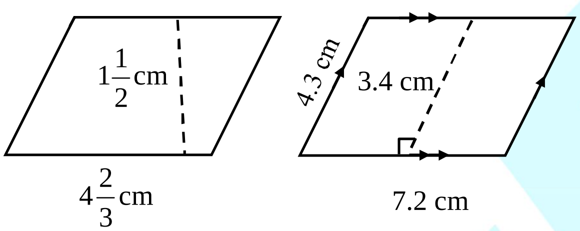
Sol.



क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

= 8 × 7 sq cm = 56 sq cm

Ex.22 निम्न आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(i) (ii)

Sol. (i) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = 4\frac{2}{3}\text{cm} \times 1\frac{1}{2}\text{cm}$

$= \frac{14}{3} \times \frac{3}{2} \text{sq cm} = \frac{7 \times 1}{1 \times 1} \text{sq cm} = 7 \text{sq cm}.$

(ii) क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

= 7.2 cm × 3.4 cm

= 24.48 sq cm.

Ex.23 एक समान्तर चतुर्भुज का आधार इसकी ऊँचाई का तीन गुना है। यदि क्षेत्रफल 867 sq cm है, तो समान्तर चतुर्भुज का आधार एवं ऊँचाई ज्ञात करो।

Sol. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= आधार × ऊँचाई = b × h

∴ b × h = 867 sq cm (दिया गया है)

यह भी दिया गया है कि समान्तर चतुर्भुज का आधार ऊँचाई से तिगुना है।

माना ऊँचाई = b; तब आधार = 3b

अतः (b × 3b) = 867 sq cm

$\Rightarrow 3b^2 = 867$ sq cm

$\Rightarrow b^2 = \frac{867}{3}$ sq cm = 289 sq cm

$\Rightarrow$ b × b = 17 cm × 17 cm

$\Rightarrow$ b = 17 cm

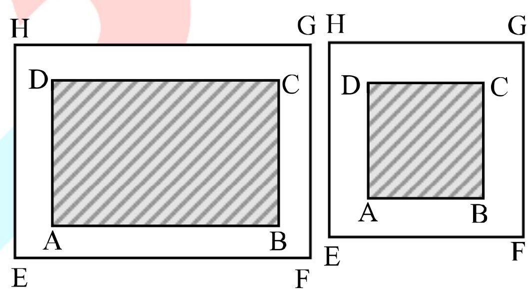
इस प्रकार, ऊँचाई **h** = b = 17 cm ;

आधार **b** = 3b = 3 × 17

= 51 cm

➤ आयत एवं वर्ग के चारों ओर मार्ग

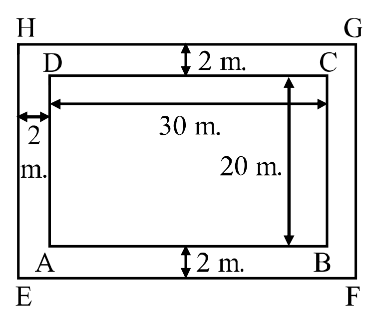
मार्ग का क्षेत्रफल = आयत EFGH का क्षेत्रफल – आयत ABCD का क्षेत्रफल



(i) (ii)

❖ उदाहरण ❖

Ex.24 30 m × 20 m माप के एक आयताकार घास के लॉन के चारों ओर मार्ग बना हुआ हैं। मार्ग की चौड़ाई 2 m है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



Sol. मार्ग का क्षेत्रफल

= EFGH का क्षेत्रफल – ABCD का क्षेत्रफल

अब, आयताकार घास के लॉन ABCD का क्षेत्रफल

$= 30 \text{ m} \times 20 \text{ m} = 600 \text{ sq m}$

EFGH का क्षेत्रफल $= \{(30 + 4) \times (20 + 4)\}$

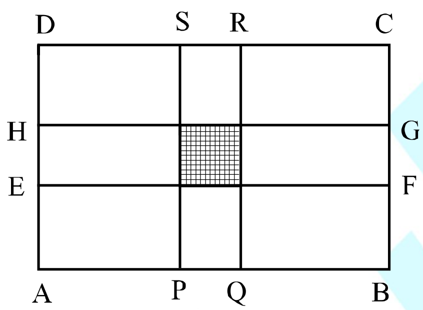
$= 34 \text{ m} \times 24 \text{ m} = 816 \text{ sq m}$

इसलिए,

मार्ग का क्षेत्रफल = 816 sq m – 600 sq m = 216 sq m

टिप्पणी : शेष पार्क का क्षेत्रफल जब आयत की भुजाओं के समान्तर दो मार्ग एक दूसरे को काटते हैं।

दिये गए चित्र में, ABCD एक आयतकार पार्क है तथा EFGH एवं PQRS आयत की भुजाओं के समान्तर दो मार्ग है जो केन्द्र पर काटते है।



यह स्थिति दो प्रकार के सवाल उठाती है :

1. मार्गो का क्षेत्रफल ज्ञात करना
2. शेष पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करना

1. मार्गो का क्षेत्रफल

= आयत EFGH का क्षेत्रफल + आयत PQRS का क्षेत्रफल – पार्क के केन्द्र पर छायांकित भाग का क्षेत्रफल

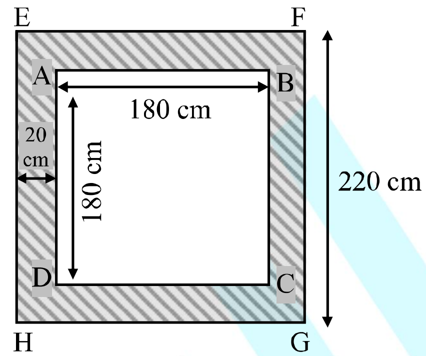
हम छायांकित भाग का क्षेत्रफल घटाते है क्योंकि इसकी गणना दो बार होती है।

2. शेष पार्क का क्षेत्रफल = पार्क का क्षेत्रफल – मार्गो का क्षेत्रफल

Ex.25 एक वर्गाकार फुलवारी की भुजा 1 m 80 cm है। इसके चारो ओर 20 cm चौड़ी पट्टी खोद कर इसे बढ़ाया जाता है। ज्ञात कीजिए :

(i) वृद्धि सहित फुलवारी का क्षेत्रफल

(ii) फुलवारी के क्षेत्रफल में वृद्धि



Sol. माना हम वर्गाकार फुलवारी को चित्र में ABCD के द्वारा तथा इसके चारो ओर पट्टी को छायांकित भाग से निरूपित करते है।

(i) वृद्धि सहित फुलवारी का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

$= (180 + 40)\,(180 + 40)$

$= 220 \times 220$

= 48400 sq cm [sq cm को sq m में बदलने पर]

$= \frac{48400}{100 \times 100} = \frac{484}{100} = 4.84 \text{ sq m}$

(ii) अब, फुलवारी के क्षेत्रफल में वृद्धि

= वृद्धि सहित फुलवारी का क्षेत्रफल

– वर्गाकार फुलवारी का क्षेत्रफल

$= (180 + 40)^2 - (180)^2$

$= 220 \times 220 - 180 \times 180$

$= 48400 - 32400 = 16000 \text{ sq cm}$

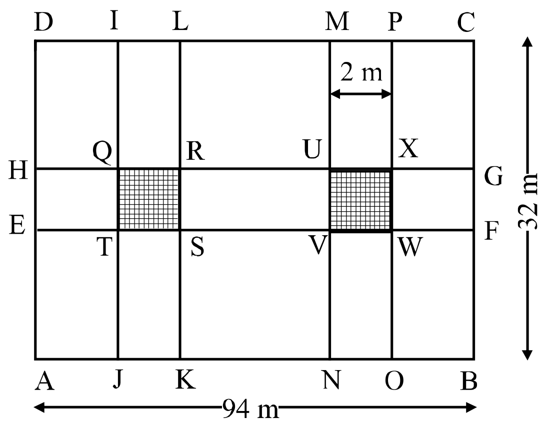
$= \frac{16000}{100 \times 100}$ [sq cm को sq m में बदलने पर]

$= \frac{160}{100} = 1.6 \text{ sq m}$

Ex.26 यहाँ एक आयताकार मैदान है जिसकी लम्बाई 94 m तथा चौड़ाई 32 m है। 2 m चौड़ी तीन सड़के मैदान से इस प्रकार गुजरती है कि दो सड़के चौड़ाई के समान्तर है तथा तीसरी सड़क लम्बाई के समान्तर है। ज्ञात कीजिए :

(i) तीनों सड़कों सहित मैदान का क्षेत्रफल

(ii) तीन सड़कों को छोड़कर मैदान का क्षेत्रफल



Sol. चित्र हमें आयताकार मैदान की सम्पूर्ण स्थिति दर्शाता है। ABCD मैदान है जिसमें IJKL, MNOP तथा EFGH तीन सड़को को निरूपित करते है जो 2 m चौड़ी है तथा जो मैदान की भुजाओं के समान्तर है।

(i) अब, मैदान का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 94 × 32 = 3008 sq m

(ii) सड़क MNOP का क्षेत्रफल = (32 × 2) sq m

= 64 sq m

सड़क IJKL का क्षेत्रफल = (32 × 2) sq m

= 64 sq m

पुनः, सड़क EFGH का क्षेत्रफल = (94 × 2) sq m

= 188 sq m

दो छायांकित भागो QRST तथा UVWX का क्षेत्रफल

= (2 × 2) + (2 × 2) = 4 + 4 = 8 sq m

अतः सड़को का कुल क्षेत्रफल

= 188 + 64 + 64 – 8 = 188 + 128 – 8

= 188 + 120 = 308 sq m

इस प्रकार, मैदान के शेष भाग का क्षेत्रफल

= मैदान का क्षेत्रफल – सड़को का क्षेत्रफल

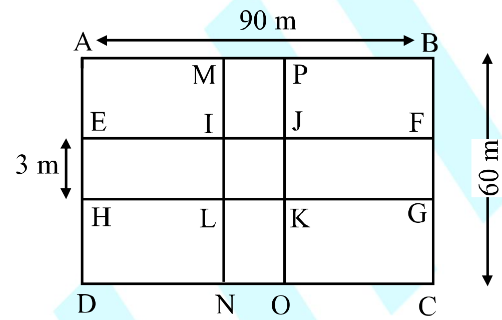
= (3008 – 308) sq m = 2700 sq m

इसलिए, सड़को को छोड़कर मैदान का क्षेत्रफल = 2700 sq m

Ex.27 90 m × 60 m विमा के एक आयताकार मैदान में दो सड़के बनी है जो दो भुजाओं के समान्तर है तथा मैदान के केन्द्र पर एक दूसरे को समकोण पर काटती है। यदि प्रत्येक सड़क की चौड़ाई 3m है, तो ज्ञात करो :

(i) सड़को का क्षेत्रफल

(ii) ₹ 110 प्रति वर्ग मीटर की दर से सड़क बनाने का खर्च



Sol. चित्र में, ABCD आयताकार मैदान को निरूपित करता है तथा आयत EFGH एवं MNOP सड़को को निरूपित करती है।

(i) सड़को का क्षेत्रफल = MNOP का क्षेत्रफल + EFGH का क्षेत्रफल – IJKL का क्षेत्रफल

= {(60 × 3) + (90 × 3) – (3 × 3)} sq m

= (180 + 270 – 9) sq m = (450 – 9) sq m

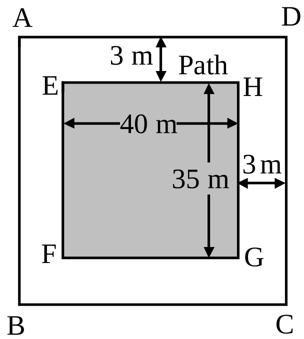
= 441 sq m

(ii) ₹ 110 प्रति वर्ग मीटर की दर से सड़के बनाने का खर्च

= ₹ (441 × 110) = ₹ 48510.

Ex.28 एक आयताकार खेत जिसका माप 40 m × 35 m है, के बाहर चारों ओर 3 m चौड़ा मार्ग बना हुआ है। मार्ग पर ₹ 10 प्रति वर्ग मीटर की दर से घास लगाने का खर्च ज्ञात कीजिए।

Sol. माना EFGH आयताकार खेत है तथा माना ABCD मार्ग की बाहरी सीमा है।



EFGH की लम्बाई = EH = FG = 40 m

EFGH की चौड़ाई = EF = HG = 35 m

EFGH का क्षेत्रफल = 40×35 m^2 = 1400 m^2

आयत ABCD में,

लम्बाई (AD = BC) = 40 + 3 + 3 = 46 m

चौड़ाई (AB = DC) = 35 + 3 + 3 = 41 m

ABCD का क्षेत्रफल = 46×41 m^2

ABCD का क्षेत्रफल = 1,886 m^2

मार्ग का क्षेत्रफल

= ABCD का क्षेत्रफल – EFGH का क्षेत्रफल

= 1,886 – 1,400

मार्ग का क्षेत्रफल = 486 m^2

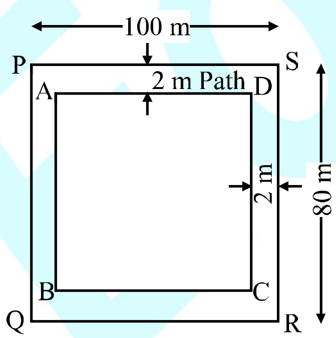
$\because$ 1 m^2 पर घास का खर्च = ₹ 10

$\therefore$ सम्पूर्ण मार्ग पर घास का खर्च

= ₹ (10×486) = ₹ 4,860

Ex.29 एक आयताकार प्लॉट 100 m लम्बा तथा 80 m चौड़ा है। इसके अन्दर की ओर चारो तरफ 2 m चौड़ा मार्ग बना हुआ है। मार्ग का क्षेत्रफल तथा ₹ 3.70/m^2 की दर पर इसको समतल करने का खर्च ज्ञात कीजिए।

Sol.



माना PQRS एक आयताकार प्लॉट है तथा माना ABCD मार्ग की आन्तरिक सीमा है।

तब, लम्बाई PS = 100 m

चौड़ाई SR = 80 m

प्लॉट PQRS का क्षेत्रफल = 100×80 m^2

= 8000 m^2

मार्ग की चौड़ाई = 2 m

$\therefore$ AD = (100 – 2 – 2)m = (100 – 4)m = 96 m

AB = (80 – 2 – 2)m = (80 – 4)m = 76 m

आयत ABCD का क्षेत्रफल = 96×76 m^2 = 7296 m^2

समतल मार्ग का क्षेत्रफल

= PQRS का क्षेत्रफल – ABCD का क्षेत्रफल

= (8000 – 7296) m^2 = 704 m^2

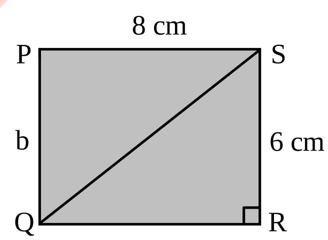
मार्गो को समतल करने का खर्च = ₹ (3.70×704)

= ₹ 2604.80.

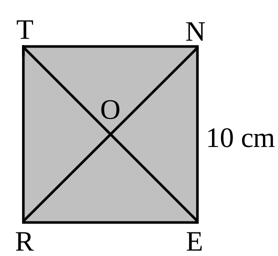
फलतः मार्ग का क्षेत्रफल 704 m^2 है तथा मार्ग को समतल करने का खर्च ₹ 2604.80 है।

Ex.30 निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) संलग्न चित्र में, PQRS एक आयत है जिसकी भुजाए 8 cm तथा 6 cm है। ΔPQS तथा ΔQSR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(ii) संलग्न चित्र में, RENT एक वर्ग है जिसकी भुजा 10 cm है। त्रिभुजो OTR, OTN, ONE तथा ORE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



Sol. (i) स्पष्टतया, विकर्ण QS आयत PQRS को समान क्षेत्रफल के दो भागों PQS एवं QSR में विभाजित करता है।

अतः ΔPQS का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आयत PQRS का क्षेत्रफल)

$$= \left(\frac{1}{2}\times 8\times 6\right) \text{cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$$

तथा ΔQSR का क्षेत्रफल = 24 cm^2

(ii) स्पष्टतया, वर्ग RENT में समान क्षेत्रफल के चार त्रिभुज TOR, ROE, NOE तथा TON निर्मित है।

अतः ΔTOR का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}$ (वर्ग का क्षेत्रफल)

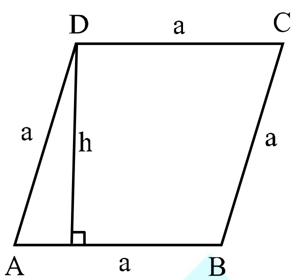
$$= \frac{1}{4}\ (10 \times 10)\ \text{cm}^2 = 25\ \text{cm}^2$$

तथा ΔROE का क्षेत्रफल = ΔNOE का क्षेत्रफल

= ΔTON का क्षेत्रफल = 25 cm^2

Ex.31 एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 56 cm^2 है। यदि इसका परिमाप 56 cm है, तो इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Sol.



माना समचतुर्भुज की भुजा 'a' है तथा ऊँचाई h है।

परिमाप = 4a

56 = 4a

a = 56 ÷ 4

a = 14 cm

क्योंकि समचतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज है

क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

56 = 14 × ऊँचाई

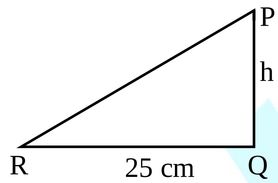
56 ÷ 14 = ऊँचाई

4 = ऊँचाई

फलतः समचतुर्भुज (समान्तर चतुर्भुज) की ऊँचाई 4 cm है।

Ex.32 एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 100 cm^2 है। यदि लम्ब भुजाओं में से एक की लम्बाई 25 cm है, तो दूसरी भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Sol.



समकोण त्रिभुज में, यदि एक भुजा आधार है तो दूसरी भुजा लम्ब होती है।

यहाँ, समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = 100 cm^2

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$100 = \frac{1}{2} \times 25 \times h$

$100 \times 2 = 25 \times h$

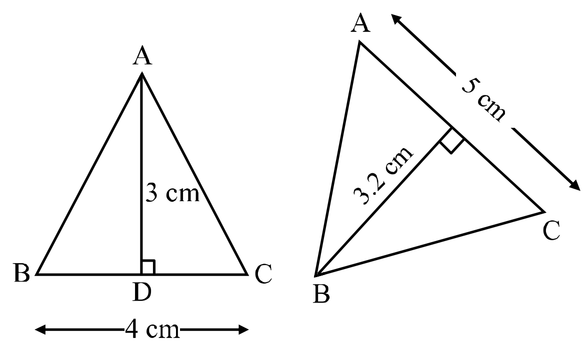
$\frac{100\times 2}{25} = h$

$8 = h$

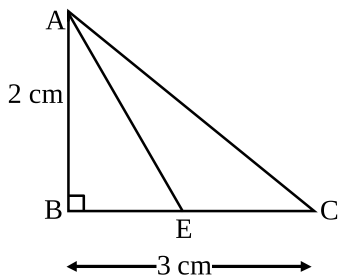
h = 8 cm

फलतः, समकोण त्रिभुज की दूसरी भुजा की लम्बाई 8 cm है।

Ex.33 निम्न त्रिभुजो में प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(i) (ii)



(iii)

Sol. (i) ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times BC \times AD$ = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल = 6 cm^2.

(ii) ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times AC \times BD$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 3.2$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल = 8 cm^2

(iii) ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times BC \times AB$

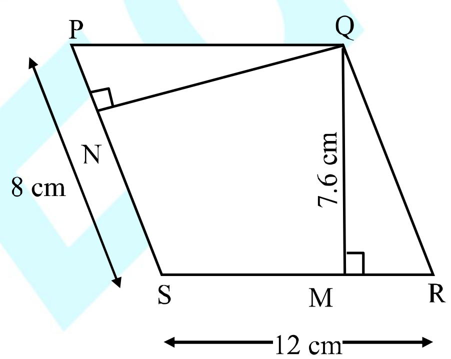
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल = 3 cm^2

Ex.34 PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है। SR से Q की ऊँचाई QM है तथा Q से PS की ऊँचाई QN है। यदि SR = 12 cm तथा QM = 7.6 cm है, तो ज्ञात कीजिए

(i) समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

(ii) QN यदि PS = 8 cm.



Sol. (i) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

= SR × QM

= 12 × 7.6 cm

= 91.2 cm^2

(ii) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = PS × QN

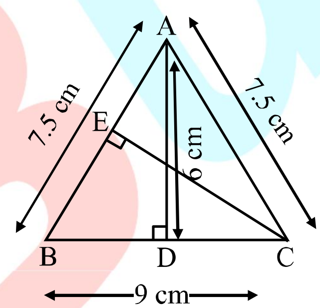
91.2 = 8 × QN

91.2 ÷ 8 = QN

QN = 11.4 cm.

Ex.35 ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC = 7.5 cm तथा BC = 9 cm है। BC से A की ऊँचाई AD = 6 cm है। ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। AB से C की ऊँचाई क्या है ?

Sol.



ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × BC × AD

$= \left(\frac{1}{2} \times 9 \times 6\right) cm^2 = 27\ cm^2$

तथा ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × AB × CE

$27 = \frac{1}{2} \times 7.5 \times CE$

2 × 27 = 7.5 × CE

$\frac{2 \times 27}{7.5}$ = CE

$\frac{540}{75}$ = CE

CE = 7.2 cm.

याद रखने योग्य महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक समतल आकृति की सभी भुजाओं की लम्बाईयों का योगफल या इसकी बाउण्ड्री की लम्बाई, उस आकृति का परिमाप कहलाती है।

2. परिमाप एक बन्द आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल बन्द आकृति के द्वारा घेरे गए समतल का भाग है।

3. आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई) या $P = 2(l + b)$

4. वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा या $P = 4 \times l$

5. आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई या $A = l \times b$

6. आयत की लम्बाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधर}}$ या $l = \frac{A}{b}$

7. आयत की चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}}$ या $b = \frac{A}{l}$

8. वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा या $A = l \times l$

9. त्रिभुज का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ (इससे निर्मित समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

= $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

10. क्षेत्रफल की मानक इकाईया तथा उनमें सम्बन्ध है :

$100\ mm^2 = 1\ cm^2$

$100\ cm^2 = 1\ dm^2$

$100\ dm^2 = 1\ m^2$

$100\ m^2 = 1$ are

$10000\ cm^2 = 1\ m^2$

100 आर = 1 हेक्टार

100 हेक्टार = 1 sq km

1 हेक्टार = $10000\ m^2$.