रेखाऐं एवं कोण

3
CHAPTER

सूची

- रेखा एवं कोण की परिभाषाऐं
- प्रतिच्छेदित रेखाऐं
- तिर्यक रेखा
- समान्तर रेखाऐं

➤ परिभाषाऐं

◈ बिन्दु

एक तीष्ण पेंसिल के द्वारा बना अच्छा डॉट या एक ज्यामितीय आकृति जो कोई लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई नहीं रखती, बिन्दु कहलाती है।

◈ रेखाखण्ड

दो बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त ज्यामितीय आकृति एक रेखाखण्ड कहलाता है।

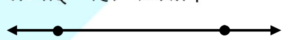
यहाँ AB एक रेखाखण्ड है।

यह निश्चित लम्बाई रखता है।

◈ रेखा

यदि हम दो अन्तिम बिन्दुओं को दोनों दिशाओं में अपरिमित रूप से बढ़ाते है, तो हमें एक रेखा प्राप्त होती है।

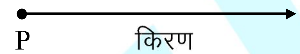
यह निश्चित लम्बाई नहीं रखती।



रेखा

◈ किरण

एक किरण एक ज्यामितीय आकृति है जो एक अन्तिम बिन्दु रखती है। P एक अन्तिम बिन्दु है।



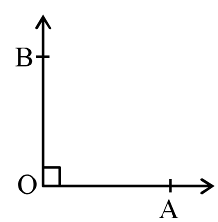
◈ कोण

एक कोण बनता है जब दो किरणें/दो रेखाऐं/दो रेखाखण्ड समान प्रारम्भिक बिन्दु से प्रारम्भ होते है।

हम हमारे आस पास कोणों के कई उदाहरण प्राप्त करते है जैसे कमरे की दो दीवारों के मध्य मेज के किनारो के मध्य, सड़क के चौरहें, आदि

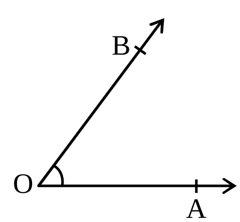
◈ समकोण

90° माप का कोण समकोण कहलाता है। चित्र में ∠BOA समकोण है।



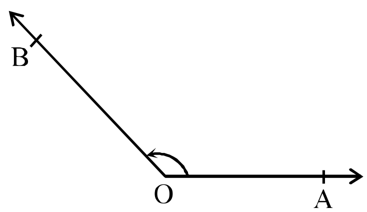
◈ न्यूनकोण

एक कोण जिसका माप 0° एवं 90° के मध्य हो, न्यूनकोण कहलाता है।



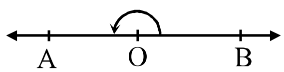
◈ अधिक कोण

एक कोण जिसका माप 90° से अधक परन्तु 180° से कम हो, अधिक कोण कहलाता है।



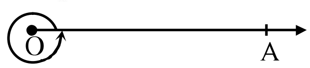
◈ सरल कोण

180° माप का कोण सरल कोण कहलाता है



◈ पूर्ण कोण

360° का कोण पूर्ण कोण कहलाता है।



◈ पूरक कोण

दो कोण पूरक कोण कहलाते है यदि उनके मापों का योग 90° हो, तथा प्रत्येक कोण एक दूसरे का पूरक कहलाता है।

उदाहरणार्थ, (45°, 45°), (10°, 80°), (20°, 70°), (30°, 60°).

नोट :

(a) यदि दो कोण एक दूसरे के पूरक है तो प्रत्येक कोण न्यूनकोण होगा, परन्तु किन्हीं दो न्यूनकोणों का पूरक कोण होना आवश्यक नहीं है, उदाहरण के लिए, 20° एंव 60° न्यूनकोण है परन्तु एक दूसरे के पूरक कोण नहीं है।

(b) दो अधिक कोण तथा दो समकोण एक दूसरे के पूरक नहीं हो सकते।

◈ सम्पूरक कोण

दो कोण सम्पूरक कोण कहलाते है यदि उनके मापों का योग 180° है, तथा प्रत्येक कोण एक दूसरे का सम्पूरक कहलाता है।

उदाहरणार्थ, (10°, 170°), (20°, 160°), (30°, 150°), (40°, 140°), (50°, 130°) आदि सभी युग्म सम्पूरक कोण है।

नोट :

(a) दो न्यूनकोण एक दूसरे के सम्पूरक नहीं हो सकते।

(b) दो समकोण सम्पूरक कोण है।

(c) दो अधिक कोण एक दूसरे के सम्पूरक नहीं हो सकते।

◈ आसन्न कोण

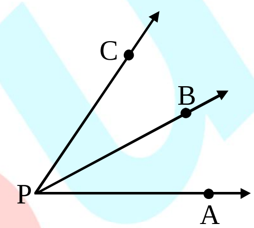
दो कोण आसन्न कोण कहलाते है यदि

(i) वे एक उभयनिष्ठ शीर्ष रखते है (चित्र में बिन्दु P उभयनिष्ठ शीर्ष है)

(ii) वे एक उभयनिष्ठ भुजा रखते है (चित्र में PB उभयनिष्ठ भुजा है)

(iii) उनकी अन्य भुजाऐं उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर स्थित हो (चित्र में, PC एवं PA)

अतः, चित्र में, ∠APB तथा ∠BPC आसन्न कोण है।



नोट :

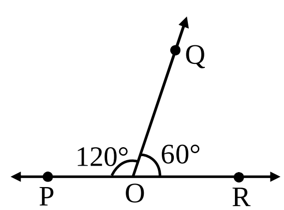
(a) ∠APB तथा ∠APC आसन्न कोण नहीं है क्योंकि उनकी दूसरी भुजाऐं PB एवं PC उभयनिष्ठ भुजा PA के विपरीत ओर नहीं है।

(b) यदि एक किरण एक रेखा पर स्थित है तब इस प्रकार निर्मित आसन्न कोणों का योग 180° होगा।

◈ रैखिक युग्म कोण

दो आसन्न कोण रैखिक युग्म कोण बनाना कहलाते है यदि उनकी अउभयनिष्ठ भुजाऐं दो विपरीत किरणें हो।

चित्र में, ∠POQ तथा ∠QOR रैखिक युग्म बनाते है चूँकि उनकी अउभयनिष्ठ भुजाऐं OP तथा OR दो विपरीत किरणें है अर्थात्, POR एक रेखा है।



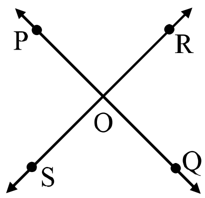
नोट :

(a) दो रैखिक युग्म कोण आसन्न कोण भी हो सकते है परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि दो आसन्न कोण रैखिक युग्म कोण होंगे।

(b) एक सम्पूरक कोण युग्म एक रैखिक युग्म बनाते है जब उन्हें एक दूसरे के आसन्न रखा जाता है।

◈ शीर्षाभिमुख कोण

दो प्रतिच्छेदित रेखाओं से निर्मित दो कोण जो कोई उभयनिष्ठ भुजा नहीं रखते, शीर्षाभिमुख कोण कहलाते है।



चित्र में, दो रेखाऐं PQ एवं RS बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित होती है। हम देखते है कि इन रेखाओं के प्रतिच्छेदन से चार कोण बनते है।

∠POR तथा ∠SOQ एक शीर्षाभिमुख कोण युग्म बनाते है जबकि ∠POS तथा ∠ROQ दूसरा शीर्षाभिमुख कोण बनाते है।

नोट : शीर्षाभिमुख कोण हमेशा बराबर होते है।

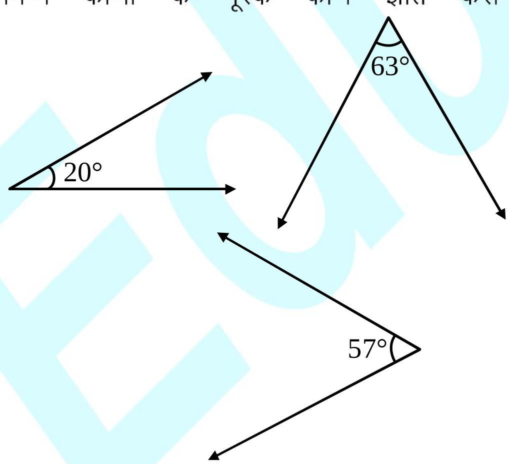
महत्त्वपूर्ण तथ्य :

(1) किसी रेखा पर स्थित बिन्दु पर रेखा के एक ओर बने सभी कोणों का योग 180° होता है।

(2) एक बिन्दु के चारों ओर के कोणों का योग 360° होता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 निम्न कोणों के पूरक कोण ज्ञात करो :

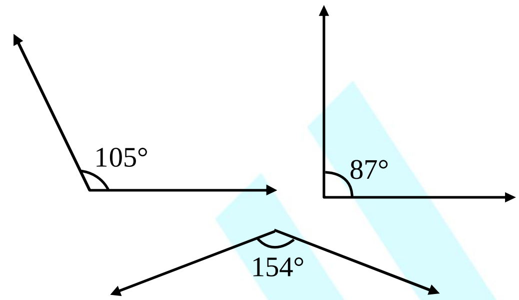


Sol. 20° का पूरक कोण = 90° – 20° = 70°.

63° का पूरक कोण = 90° – 63° = 27°.

57° का पूरक कोण = 90° – 57° = 33°.

Ex.2 निम्न कोणों के सम्पूरक कोण ज्ञात करो :



Sol. 105° का सम्पूरक कोण = 180° – 105° = 75°.

87° का सम्पूरक कोण = 180° – 87° = 93°.

154° का सम्पूरक कोण = 180° – 154° = 26°.

Ex.3 वह कोण ज्ञात करो जो इसके पूरक कोण के बराबर है।

Sol. माना कोण = x

x का पूरक कोण = 90° – x

प्रश्नानुसार :

कोण = कोण का पूरक

अतः, x = 90° – x

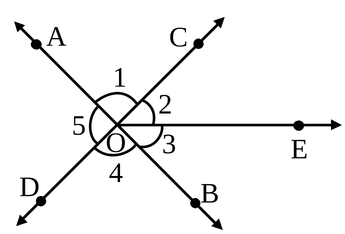
⇒ x + x = 90°

⇒ 2x = 90°

⇒ x = 45°

अतः, कोण 45° है।

Ex.4 संलग्न चित्र में



(i) क्या ∠1 ; ∠2 का आसन्न कोण है?

(ii) क्या ∠AOC ; ∠AOE का आसन्न कोण है?

(iii) क्या ∠COE तथा ∠EOD रैखिक युग्म बनाते है?

(iv) क्या ∠BOD तथा ∠DOA सम्पूरक कोण है ?

(v) क्या ∠1 ; ∠4 का शीर्षाभिमुख कोण है?

(vi) ∠5 का शीर्षाभिमुख कोण कौनसा है?

Sol. (i) **हाँ**, ∠1, ∠2 का आसन्न कोण है (आसन्न कोणों की परिभाषा से)

(ii) **नहीं**, ∠AOC ; ∠AOE का आसन्न कोण नहीं है चूँकि OC तथा OE भुजा OA (उभयनिष्ठ भुजा) के विपरीत ओर नहीं है।

(iii) **हाँ**, ∠COE तथा ∠EOD रैखिक युग्म बनाते है चूँकि ∠COE + ∠EOD = 180°.

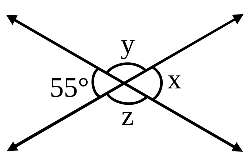
(iv) **हाँ**, ∠BOD तथा ∠DOA सम्पूरक कोण है

∵ ∠BOD + ∠DOA = 180°

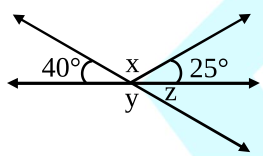
(v) **हाँ**, ∠1 तथा ∠4 शीर्षाभिमुख कोण है।

(vi) ∠5 का शीर्षाभिमुख कोण ∠COB है।

Ex.5 निम्न प्रत्येक में कोण x, y तथा z के मान ज्ञात करो:



(i)



(ii)

Sol. (i) ∠x = 55° (शीर्षाभिमुख कोण)

∠x + ∠y = 180° (रैखिक युग्म कोण)

55° + ∠y = 180°

∠y = 180° – 55°

∠y = 125°

∠z = ∠y

∠z = 125°. (शीर्षाभिमुख कोण)

(ii) 40° + ∠x + 25° = 180°

(सरल रेखा के कोण)

∠x + 65° = 180°

∠x = 180° – 65°

⇒ ∠x = 115°

∠z = 40°

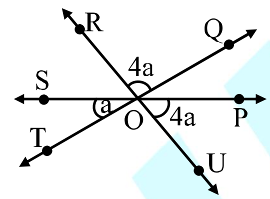
∠y + ∠z = 180°

(शीर्षाभिमुख कोण)

∠y = 180° – 40° (रैखिक युग्म कोण)

∠y = 140°

Ex.6 a का मान ज्ञात करो।



Sol. चूँकि ∠ROQ तथा ∠TOU शीर्षाभिमुख कोण है।

∠TOU = ∠ROQ

⇒ ∠TOU = 4a (∵ ∠ROQ = 4a दिया है)

∴ ∠SOT + ∠TOU + ∠UOP = 180°

(सरल रेखा के कोण)

a + 4a + 4a = 180°

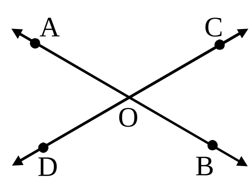
9a = 180°

$a = \frac{180°}{90°}$ ⇒ a = 20°.

अतः, a = 20°.

➤ प्रतिच्छेदित रेखाऐं

दो रेखाऐं प्रतिच्छेदित रेखाऐं कहलाती है यदि वे एक उभयनिष्ठ बिन्दु रखती है। यह उभयनिष्ठ बिन्दु प्रतिच्छेदित रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिन्दु कहलाता है।



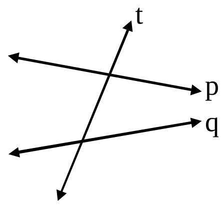
चित्र में, AB तथा CD प्रतिच्छेदित रेखाऐं है तथा O प्रतिच्छेदन बिन्दु है।

उदाहरणार्थ, अक्षर X प्रतिच्छेदित रेखाओं को रखने वाले रेखाखण्डों से बना है।

➤ तिर्यक रेखा

एक रेखा जो दो या अधिक रेखाओं को विभिन्न बिन्दुओं पर काटती है, तिर्यक रेखा कहलाती है।

चित्र में, t रेखाओं p एवं q की तिर्यक रेखा है।



➤ समान्तर रेखाऐं

दो रेखाऐं l एवं m समान्तर कहलाती है यदि (i) वे समान समतल में स्थित है (ii) वे प्रतिच्छेदन नहीं करती जब उन्हें किसी भी दिशा में अनन्त तक बढ़ाया जाता है तथा हम $l \parallel m$ लिखते है (जिसे "l ; m के समान्तर है" पढ़ते है)

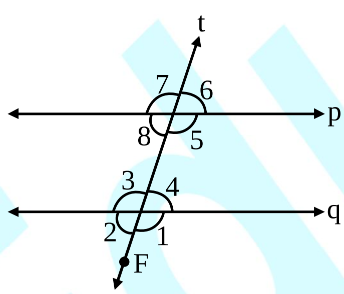
$l \parallel m$ इंगित करता है कि $m \parallel l$ भी है।

दो समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी प्रत्येक जगह समान होती है या यदि दो रेखाओं के मध्य लम्बवत् दूरी समान है, तो रेखाऐं समान्तर है अन्यथा नहीं।

उदाहरणार्थ, रेल की दो पटरियों के मध्य दूरी।

एक तिर्यक रेखा के द्वारा दो रेखाओं को काटने से बनने वाले कोण :

माना दो रेखाऐं p एवं q एक तिर्यक रेखा t के द्वारा काटी जाती है, तब निम्न कोण बनते है।



◈ बाह्य कोण

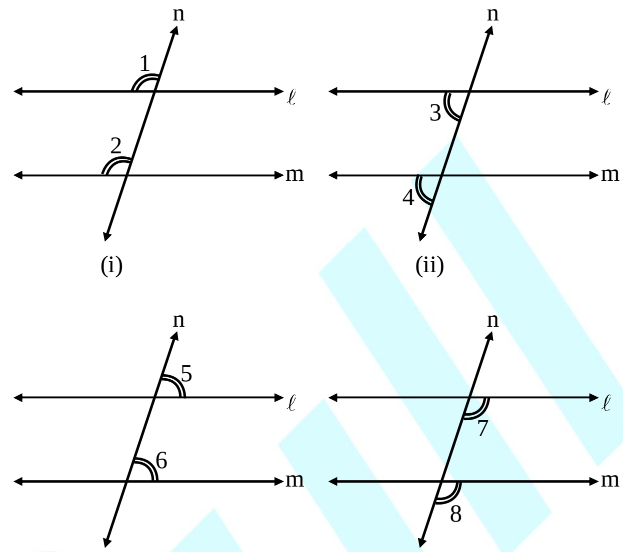
वे कोण जो दो रेखाओं के मध्य तिर्यक रेखाखण्ड को नहीं रखते, बाह्य कोण कहलाते है।

◈ अन्तःकोण

वे कोण जो दो रेखाओं के मध्य तिर्यक रेखा रेखाखण्ड को भुजा के रूप में रखते है, अन्तःकोण कहलाते है।

◈ संगत कोण

निम्न चित्रों में अंकित कोणों को देखिये।



(i) (ii) (iii) (iv)

वे कोण जो

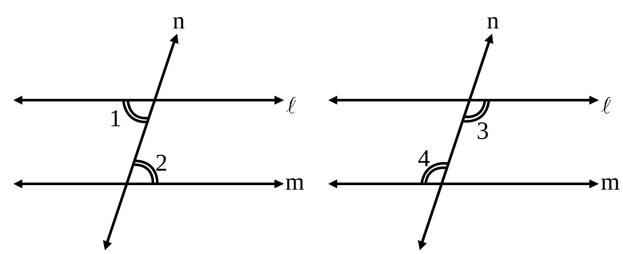
(i) अलग अलग शीर्ष रखते है

(ii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित है तथा

(iii) दो रेखाओं के सापेक्ष संगत स्थिति (ऊपर या नीचे, बांये या दायें) में हो, संगत कोण कहलाते है।

अन्य शब्दो में, दी गई दो रेखाओं के या तो ऊपर या नीचे तिर्यक रेखा के एक ही ओर के दो कोण संगत कोण कहलाते है।

◈ एकान्तर अन्तः कोण



(i) (ii)

एकान्तर अन्तः कोण :

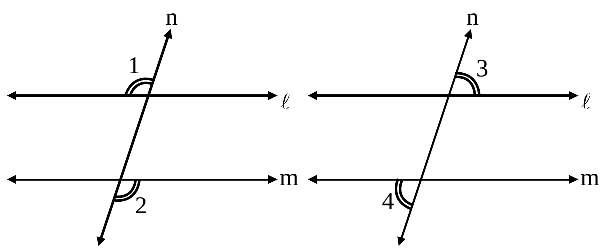
(i) अलग अलग शीर्ष रखते है,

(ii) तिर्यक रेखा के विपरीत ओर स्थित होते है तथा

(iii) दो रेखाओं के मध्य स्थित होते है।

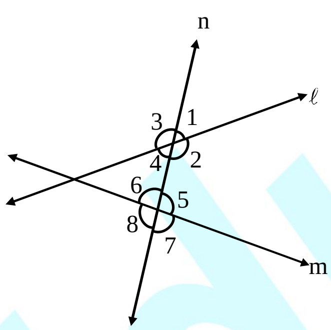
अन्य शब्दो में, एक कोण युग्म जिसमें प्रत्येक कोण की एक भुजा तिर्यक रेखा के विपरीत ओर स्थित हो तथा कोण की दूसरी भुजा दो रेखाओं के द्वारा बनाया गया तिर्यक रेखा का रेखाखण्ड हो, एकान्तर अन्तः कोण कहलाते है।

❖ **एकान्तर बाह्य कोण**



(i) (ii)

एक कोण युग्म जिसमें दोनों कोणों की एक भुजा तिर्यक रेखा के विपरीत ओर हो तथा जिनकी दूसरी भुजाऐं दो रेखाओं के द्वारा बनाया तिर्यक रेखाखण्ड नहीं हो एवं तिर्यक रेखाखण्ड के विपरीत ओर निर्देशित हो, एकान्तर बाह्य कोण कहलाते है।



क्र.सं.	कोण का नाम	कोण
(i)	अन्तः कोण	∠2, ∠4, ∠5 एवं ∠6
(ii)	बाह्य कोण	∠1, ∠3, ∠7 एवं ∠8
(iii)	संगत कोण युग्म	∠1 व ∠5, ∠2 व ∠7, ∠3 व ∠6, ∠4 व ∠8
(iv)	एकान्तर अन्तः कोण युग्म	∠4 व ∠5 एवं ∠2 व ∠6
(v)	एकान्तर बाह्य कोण युग्म	∠3 व ∠7 एवं ∠1 व ∠8
(vi)	तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोण युग्म	∠4 व ∠6 एवं ∠2 व ∠5
(vii)	तिर्यक रेखा के एक ही ओर के बाह्य कोण युग्म	∠3 व ∠8 एवं ∠1 व ∠7

नोट :

(i) यदि दो या अधिक समान्तर रेखाऐं एक तिर्यक रेखा के द्वारा काटी जाती है, तो संगत कोणों का प्रत्येक युग्म समान माप रखता है।

(ii) यदि दो समान्तर रेखाऐं एक तिर्यक रेखा के द्वारा काटी जाती है, तो एकान्तर कोण युग्म (अन्तः तथा बाह्य) बराबर होते है।

(iii) यदि दो समान्तर रेखाऐं एक तिर्यक रेखा के द्वारा काटी जाती है तो तिर्यक रेखा के समान ओर के प्रत्येक अन्तः कोण युग्म तथा बाह्य कोण युग्म सम्पूरक होते है।

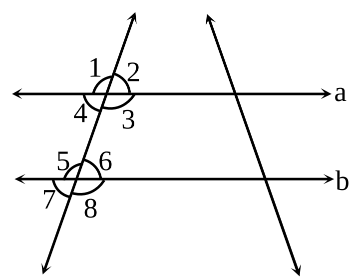
❖ **उदाहरण** ❖

Ex.7 निम्नलिखित कथनों में प्रयुक्त गुणधर्म बताईऐ :

(i) यदि a || b, तब ∠1 = ∠5

(ii) यदि ∠4 = ∠6, तब a || b

(iii) यदि ∠4 + ∠5 = 180°, तब a || b



Sol. (i) यदि a || b, तब ∠1 = ∠5

(यदि रेखाऐं समान्तर है तब संगत कोण बराबर होते है या संगत कोण गुणधर्म)

(ii) यदि ∠4 = ∠6, तब a || b (यदि एकान्तर अन्तः कोण बराबर है, तब रेखाऐं समान्तर होती है या एकान्तर अन्तः कोण गुणधर्म)

(iii) यदि ∠4 + ∠5 = 180°, तब a || b

[चूँकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के (सहअन्तः कोण) अन्तः कोण सम्पूरक होते है]

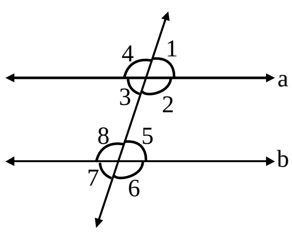
Ex.8 संलग्न चित्र में बताईऐ

(i) संगत कोणों के युग्म

(ii) एकान्तर अन्तः कोणों के युग्म

(iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों के युग्म

(iv) शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म



Sol. (i) संगत कोणों के युग्म है :

($\angle 1$, $\angle 5$), ($\angle 2$, $\angle 6$), ($\angle 4$, $\angle 8$) तथा ($\angle 3$, $\angle 7$).

(ii) एकान्तर अन्तः कोणों के युग्म है :

($\angle 2$, $\angle 8$) तथा ($\angle 3$, $\angle 5$).

(iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों के युग्म ($\angle 3$, $\angle 8$) तथा ($\angle 2$, $\angle 5$) है।

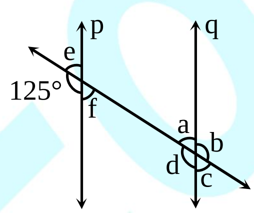
(iv) शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म ($\angle 1$, $\angle 3$), ($\angle 4$, $\angle 2$), ($\angle 5$, $\angle 7$) तथा ($\angle 6$, $\angle 8$) है।

Ex.9 चित्र में, p || q है। a, b, c, d, e एवं f के मान ज्ञात करो।

Sol. $\angle e + \angle 125° = 180°$ (रैखिक कोण युग्म)

$\angle e = 180° - 125° \Rightarrow \angle e = 55°$

$\angle f = \angle e$ (शीर्षाभिमुख कोण)



$\Rightarrow$ $\angle f = 55°$ ($\because$ $\angle e = 55°$, (1) से)

$\because$ p || q.

अतः, $\angle a = \angle f$ (एकान्तर अन्तः कोण)

$\angle a = 55°$ ($\because$ $\angle f = 55°$)

$\Rightarrow$ $\angle c = \angle a$ (शीर्षाभिमुख कोण)

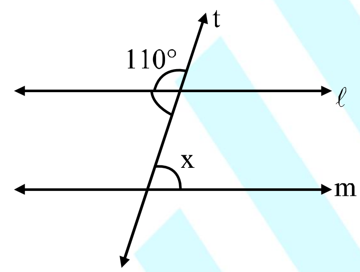
$\Rightarrow$ $\angle c = 55°$ ($\because$ $\angle a = 55°$)

$\angle d = 125°$ (संगत कोण)

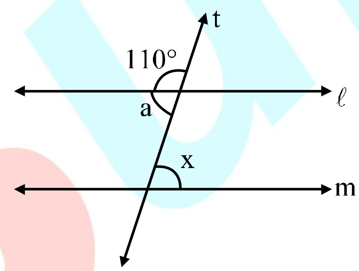
$\angle b = \angle d$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\Rightarrow$ $\angle b = 125°$ ($\because$ $\angle d = 125°$)

Ex.10 x का मान ज्ञात कीजिए यदि l || m



Sol. $\because$ l || m तथा t तिर्यक रेखा है



अतः, $\angle a + 110° = 180°$ (रैखिक कोण युग्म)

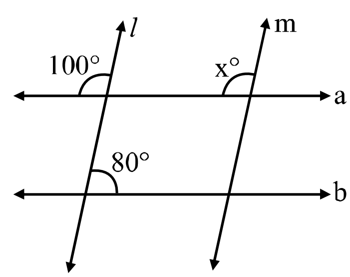
$\angle a = 180° - 110°$

$\angle a = 70°$

$\angle x = \angle a$ (एकान्तर अन्तः कोण)

$\angle x = 70°$ ($\because \angle a = 70°$)

Ex.11 x का मान ज्ञात कीजिए यदि l || m.

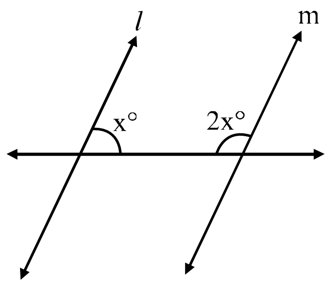


Sol. $\because$ l || m

अतः, $\angle x = 100°$. (संगत कोण)

Ex.12 x का मान ज्ञात कीजिए यदि l || m.

Sol. $\because$ l || m



x + 2x = 180°

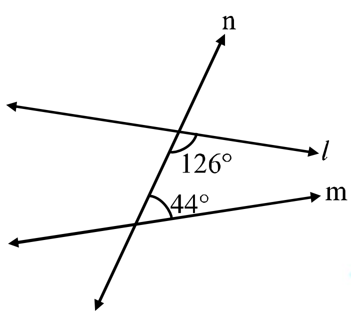
(तिर्यक रेखा के एक ही ओर के सह-अन्तः कोण सम्पूरक होते है)

$\Rightarrow$ 3x = 180° $\Rightarrow$ x = $\frac{180°}{3}$

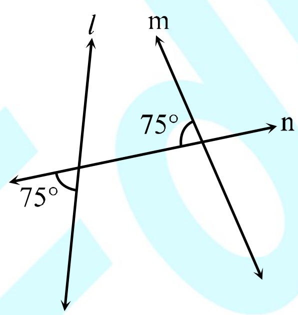
x = 60°.   अतः, x = 60°.

Ex.13 नीचे दिये गए चित्रों में बताइऐ क्या $l \parallel$ m है?

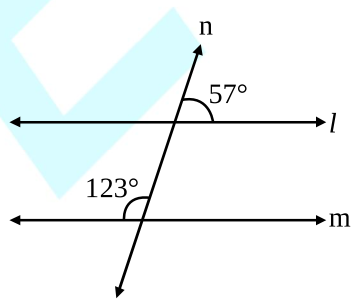
(i)



(ii)



(iii)

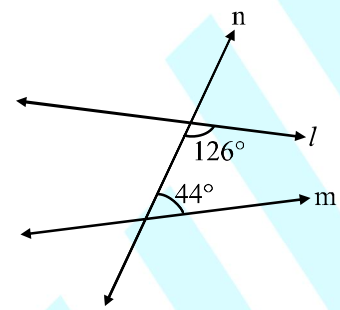


Sol. (i) सह-अन्तः कोणों का योग

= 126° + 44° = 170° $\neq$ 180°.

$\because$ सह-अन्तः कोणों का योग $\neq$ 180°.

अतः, l , m के समान्तर नहीं हैं ($l \nparallel$ m).



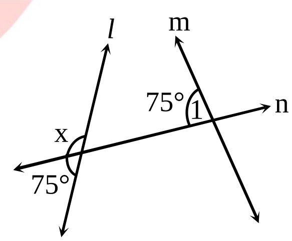
(ii) $\angle$x + 75° = 180° (रैखिक कोण युग्म)

$\angle$x = 180° – 75°

$\Rightarrow$ $\angle$x = 105°

तथा $\angle$1 = 75° (दिया है)

$\because$ $\angle$1 एवं $\angle$x संगत कोण है तथा चूँकि ये बराबर नहीं है, अतः ($l \nparallel$ m).



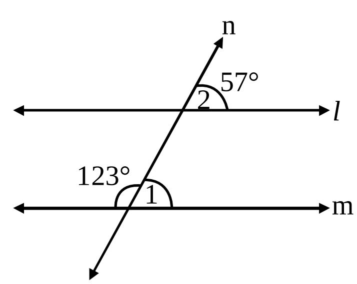
(iii) $\angle$1 + 123° = 180° (रैखिक युग्म)

$\angle$1 = 180° – 123°

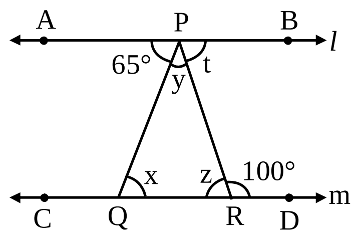
$\angle$1 = 57°

$\angle$2 = 57° (दिया है)

चूँकि $\angle$1 = $\angle$2, जो कि संगत कोण है, अतः $l \parallel$ m.



Ex.14 नीचे चित्र में, $l \parallel m$ है। x, y, z एवं t के मान ज्ञात करो।



Sol. $\because$ $l \parallel m$ तथा PQ तिर्यक रेखा है

$\therefore$ $\angle x = \angle APQ$ (एकान्तर कोण है)

$\Rightarrow$ $\angle x = 65°$ ($\because$ $\angle APQ = 65°$)

अब, $\angle z + \angle PRD = 180°$ (रैखिक युग्म)

$\angle z + 100° = 180°$

$\angle z = 180° - 100°$

$\angle z = 80°$.

चूँकि $l \parallel m$ तथा PR तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle t = \angle z$ (एकान्तर कोण है)

$\angle t = 80°$ ($\because \angle z = 80°$)

अब, $65° + \angle y + \angle t = 180°$

(सरल रेखा के कोण)

$65° + \angle y + 80° = 180°$

$145° + \angle y = 180°$

$\angle y = 180° - 45°$

$\angle y = 35°$