रचनाऐं

5
CHAPTER

सूची

- दिए गए अनुपात में रेखाखण्ड को विभाजित करना
- दिए गए अदिश गुणांक के सापेक्ष दिए गए त्रिभुज के समरूप त्रिभुज की रचना करना
- एक वृत्त के दिए गए बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींचना (वृत्त के केन्द्र का प्रयोग करके)
- वृत्त के बाहर स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाऐं खींचना (वृत्त के केन्द्र का प्रयोग करके)

➢ दिए गए अनुपात में रेखाखण्ड को विभाजित करना

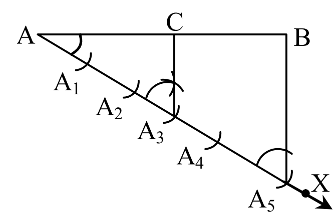
एक रेखाखण्ड AB दिया गया है, हम इसे m : n अनुपात में विभाजित करना चाहते हैं, जहाँ m व n दोनों धनात्मक पूर्णांक है। इसे समझने के लिए हम m = 3 व n = 2 लेंगे।

रचना के चरण :

1. कोई किरण AX खींचिए जो AB के साथ न्यूनकोण बनाती है।
2. AX पर 5(= m + n) बिन्दु A_1, A_2, A_3, A_4 व A_5 इस प्रकार अंकित कीजिए कि

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5.$$

3. BA_5 को मिलाइऐ ।
4. बिन्दु A_3 (m = 3), A_5B के समान्तर रेखा ($\angle AA_5B$ के समान कोण बनाते हुए) A_3 पर खींचिए जो AB को बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करे, तब AC : CB = 3 : 2.



हम देखते हैं इस विधि से किस प्रकार अभीष्ट भाग प्राप्त होंगे।

चूंकि A_3C; A_5B के समान्तर हैं, अतः $\dfrac{AA_3}{A_3A_5} = \dfrac{AC}{CB}$

(मूल अनुरूपता प्रमेय से)

रचना से, $\dfrac{AA_3}{A_3A_5} = \dfrac{3}{2}$, अतः, $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{3}{2}$.

इस प्रकार सिद्ध होता है कि C; AB को 3 : 2 अनुपात में विभाजित करता है।

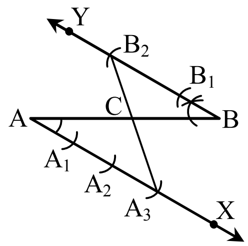
वैकल्पिक विधि

रचना के चरण :

1. AB के साथ न्यून कोण बनाती हुई कोई किरण AX खींचिए।
2. AX के समान्तर किरण BY खींचिए जो $\angle ABX$ के समान कोण $\angle ABY$ बनाए।
3. AX पर बिन्दु A_1, A_2, A_3 (m = 3) व BY पर बिन्दु B_1, B_2 (n = 2) अंकित कीजिए जबकि

   $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$.
4. A_3B_2 को मिलाइए ।

   माना यह AB को बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करती है। (चित्र देखें)



तब AC : CB = 3 : 2

यहाँ ΔAA_3C ; ΔAB_2C के समरूप है । (क्यों ?)

तब $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{BC}$$

चूंकि रचना से, $\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}$,

अतः, $$\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$$

इस विधि से रेखाखण्ड को किसी भी अनुपात में विभाजित किया जा सकता है।

➤ दिए गए अदिश गुणांक के सापेक्ष दिए गए त्रिभुज के समरूप त्रिभुज की रचना करना

अदिश गुणांक अर्थात दिए गए त्रिभुज की संगत भुजाओं के सापेक्ष बनाए गए त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात।

इस रचना में दो भिन्न स्थितियाँ होती है :

(i) निर्मित त्रिभुज दिए गए त्रिभुज से छोटा हो, यहाँ अदिश गुणांक 1 से कम होता है।

(ii) निर्मित त्रिभुज दिए गए त्रिभुज से बड़ा हो, यहाँ अदिश गुणांक 1 से बड़ा होता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 ΔABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 4 cm, BC = 5 cm तथा AC = 6 cm है। अब ΔABC के समरूप त्रिभुज की रचना इस प्रकार कीजिए कि इसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजाओं की दो-तिहाई है। अपने कथन को सिद्ध कीजिए ।

Sol. रचना के चरण

चरण I : एक रेखाखण्ड AB = 4 cm खींचिए।

चरण II : A को केन्द्र मानते हुए तथा त्रिज्या = AC = 6 cm लेते हुए एक चाप खींचिए।

चरण III : B को केन्द्र मानते हुए तथा त्रिज्या = BC = 5 cm लेते हुए दूसरा चाप खींचिए जो चरण-II में खींचे गए चाप को C पर प्रतिच्छेद करता है।

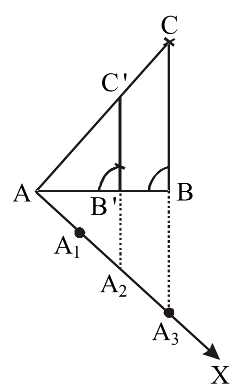
चरण IV : ΔABC प्राप्त करने के लिए AC तथा BC को मिलाइऐ।

चरण V : AB के नीचे, न्यूनकोण $\angle BAX$ बनाइये।

चरण VI : AX के अनुदिश, तीन बिन्दु (2/3 में 2 व 3 से बड़े) A_1, A_2, A_3 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$

चरण VII : A_3B को मिलाइए ।

चरण VIII : चूँकि हमें एक त्रिभुज बनाना है, जिसकी भुजाऐं ΔABC की संगत भुजाओं की दो-तिहाई हो अतः बिन्दु A_2 से AX पर तीन समान भागों में दो भाग लेते हैं । $A_2B' \parallel A_3B$ खींचिए जो AB को B' पर मिले ।



चरण IX : B' से $B'C' \parallel BC$ खींचिये जो AC को C' पर मिले । AB'C' अभीष्ट त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजाओं की दो तिहाई है।

सत्यापन : चुंकि $B'C' \parallel BC$.

अतः, $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$

$$\therefore \frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3} \qquad \left[\because \frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3}\right]$$

माना ABC दिया गया त्रिभुज है तथा हम ΔABC के समरूप त्रिभुज इस प्रकार निर्मित करना चाहते हैं कि

इसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजाओं की $\left(\frac{m}{n}\right)^{th}$ है जबकि $m < n$ है।

इसे निर्मित करने के लिए हम निम्न चरणों का अनुसरण करते हैं ।

रचना के चरण जब $m > n$.

चरण I : दिए गए आँकड़ो से दिया गया त्रिभुज निर्मित कीजिए ।

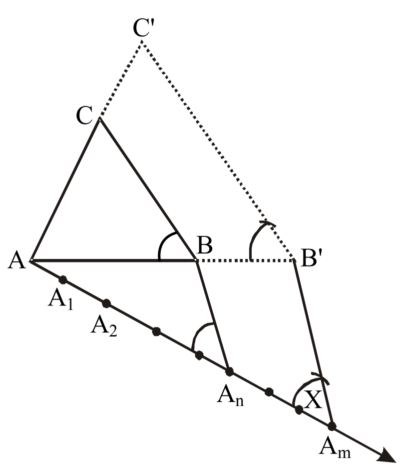
चरण II : दिए गए त्रिभुज की तीनों भुजाओं में से किसी एक को आधार मानते हैं । माना AB दिए गए त्रिभुज का आधार है ।

चरण III : आधार AB के एक सिरे A से आधार AB के नीचे अर्थात शीर्ष C के विपरीत ओर एक न्यूनकोण $\angle BAX$ बनाइए।

चरण IV : AX के अनुदिश AX पर बिन्दु m(m व n से बड़े) बिन्दु $A_1, A_2, ..., A_m$ इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{m-1}A_m$.

चरण V : A_n को B से मिलाइए तथा A_m से एक रेखा A_nB के समान्तर खींचिए जो बढ़े हुए रेखाखण्ड को B' पर प्रतिच्छेद करती है।

चरण VI : B' से एक रेखा BC के समान्तर खींचिए जो बढ़े हुए रेखाखण्ड AC को C' पर प्रतिच्छेद करती है।



चरण VII : $\Delta AB'C'$ अभीष्ट त्रिभुज प्राप्त होता है।

सत्यापन : उपरोक्त रचना के सत्यापन के लिए माना त्रिभुज ABC व AB'C' है। इन दो त्रिभुजों में,

$\angle BAC = \angle B'AC'$

$\angle ABC = \angle AB'C'$ $\quad [\because B'C' \parallel BC]$

अतः AA समरूपता नियम से,

$\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'} \qquad ....(i)$$

$\Delta\ A\ A_m\ B'$ में $A_nB \parallel A_m B'$.

$$\therefore \frac{AB}{BB'} = \frac{AA_n}{A_nA_m} \Rightarrow \frac{BB'}{AB} = \frac{A_nA_m}{AA_n}$$

$$\Rightarrow \frac{BB'}{AB} = \frac{m-n}{n} \Rightarrow \frac{AB'-AB}{AB} = \frac{m-n}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{AB'}{AB} - 1 = \frac{m-n}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{m}{n} \qquad ....(ii)$$

(i) व (ii) से,

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC} = \frac{m}{n}$$

Ex.2 त्रिभुज ABC बनाइए जिसकी भुजा BC = 7 cm, $\angle B = 45^o$, $\angle A = 105^o$ हैं। अब एक त्रिभुज बनाइए जिसकी भुजाऐं ΔABC की संगत भुजाओं की (4/3) गुना है ।

Sol. ΔABC बनाने के लिए निम्न चरणों का अनुसरण करते हैं।

चरण I : BC = 7 cm बनाइए ।

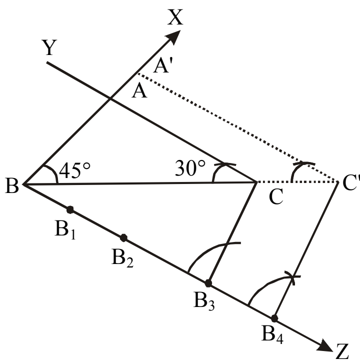
चरण II : B पर $\angle CBX = 45^o$ तथा C पर $\angle BCY = 180^o - (45^o - 105^o) = 30^o$ बनाइए

माना BX व CY; A पर प्रतिच्छेद करते हैं। ΔABC दिया गया त्रिभुज है। ΔABC के समरूप त्रिभुज बनाने के लिए निम्न चरणों का अनुसरण ।

चरण I : ΔABC के शीर्ष A के विपरित ओर B पर न्यूनकोण $\angle CBZ$ बनाइए ।

चरण II : BZ पर चार बिन्दु (4/3 में 4 व 3 से बड़े) B_1, B_2, B_3, B_4 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ हो।

चरण III : B_3 को C से मिलाइए तथा B_4 से एक रेखा B_3C के समान्तर खींचो जो बढ़े हुए रेखाखण्ड BC को C' पर प्रतिच्छेद करती हैं।



चरण IV : C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचिए जो बढ़े हुए रेखाखण्ड को A' पर प्रतिच्छेद करती है। इस प्रकार अभीष्ट त्रिभुज BA प्राप्त होता है जबकि.

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{4}{3}$$

Ex.3 दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज इस प्रकार बनाइए कि इसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजाओं की (6/7)th है। यह दिया गया है कि

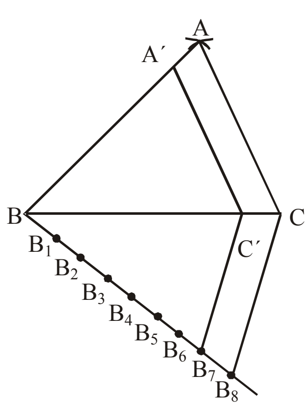
AB = 5 cm, AC = 6 cm व BC = 7 cm है

Sol. रचना के चरण

चरण I : रेखाखण्ड BC = 7 cm खींचिए ।

चरण II : B को केन्द्र मानकर तथा त्रिज्या AB = 5 cm लेते हुए एक चाप खींचिऐ।

चरण III : C को केन्द्र मानकर तथा त्रिज्या AC = 6 cm लते हुए दूसरा चाप खींचिए जो चरण II में खींचे गए चाप को A पर प्रतिच्छेद करता है।



चरण IV : त्रिभुज ABC के लिए AB व AC को मिलाइऐ।

चरण V : आधार BC के नीचे, न्यूनकोण $\angle CBX$ बनाइए।

चरण VI : BX के अनुदिश सात बिन्दु B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = ... = B_6B_7$ हो।

चरण VII : B_7C को मिलाइए ।

चरण VIII : चूंकि हमें वह त्रिभुज निर्मित करना है जिसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजाओं की (6/7)th हो, अतः B_6 से B पर 7 समान भागों में से 6 भाग लीजिए तथा $B_6C' \parallel B_7C$ खींचिए जो BC को C′ पर प्रतिच्छेद करे ।

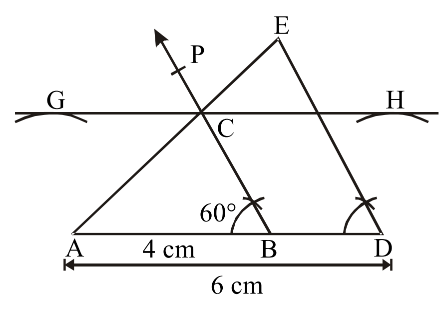
चरण IX : C′ से $C'A' \parallel CA$ खींचिए जो BA को A′ पर मिलेगी । इस प्रकार अभीष्ट त्रिभुज $\Delta A'BC'$ प्राप्त होता है। जिसकी प्रत्येक भुजा ΔABC संगत भुजाओं की $(6/7)^{th}$ है।

Ex.4 ΔABC बनाइए जिसमें AB = 4 cm व शीर्षलम्ब CL = 3 cm है। ΔABC के समरूप ΔADE इस प्रकार बनाइये कि ΔADE की प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजा की 3/2 गुना हो।

Sol. रचना के चरण

चरण I : रेखाखण्ड AB = 4 cm खींचिए ।

चरण II : $\angle ABP = 60^o$ बनाइए ।



चरण III : एक रेखा GH $\parallel$ AB, 3 cm की दूरी पर बनाइए जो BP को C पर प्रतिच्छेद करती हैं।

चरण IV : CA को मिलाइये ।

इस प्रकार, ΔABC प्राप्त होता है।

चरण V : AB को D तक इस प्रकार बढ़ाइये कि $AD = 3/2\ AB = \left(\frac{3}{2} \times 4\right) cm = 6\ cm$

चरण VI : $DE \parallel BC$ खींचिए जो बढ़ी हुई AC को E पर काटती है।

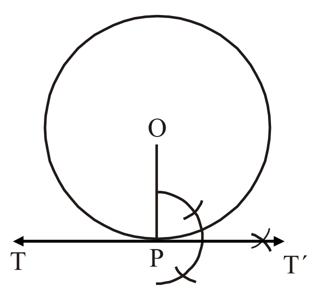
तब ΔABC के समरूप ΔADE अभीष्ट त्रिभुज इस प्रकार प्राप्त होता है जिसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजा की 3/2 गुना है।

उपपत्ति : चूंकि $DE \parallel BC$, हम जानते हैं $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{2}$$

➤ एक वृत्त के दिए गए बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींचना (वृत्त के केन्द्र का प्रयोग करके)

रचना के चरण



चरण I : कागज पर एक बिन्दु O लीजिए तथा दी गई त्रिज्या का एक वृत्त बनाइये।

चरण II : वृत्त पर एक बिन्दु P लीजिए।

चरण III : OP को मिलाइये ।

चरण IV : $\angle OPT = 90^o$ बनाइये।

चरण V : TP को T′ तक बढ़ाने पर अभीष्ट स्पर्श रेखा TPT′ प्राप्त होती है ।

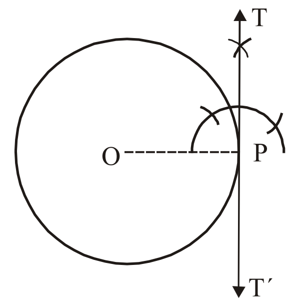
❖ उदाहरण ❖

Ex.5 कागज पर एक बिन्दु O लीजिए । O को केन्द्र मानते हुए त्रिज्या 3 cm का एक वृत्त बनाइए । इस पर एक बिन्दु P लीजिए तथा P पर एक स्पर्श रेखा खींचिये ।

Sol. रचना के चरण

चरण I : कागज पर एक बिन्दु O लीजिए तथा 3 cm त्रिज्या का वृत्त बनाइये ।

चरण II : वृत्त पर एक बिन्दु P लीजिए तथा OP को मिलाइये।



चरण III : $\angle OPT = 90^o$ बनाइये

चरण IV : अभीष्ट स्पर्श रेखा TPT' प्राप्त करने के लिए PT को T′ तक बढ़ाइये ।

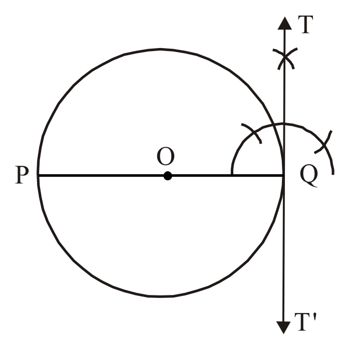
Ex.6 O को केन्द्र मानते हुए 4 cm त्रिज्या का वृत्त बनाइये। व्यास 4 cm खींचिये । P या Q से वृत्त पर स्पर्श रेखा खींचिये ।

Sol. रचना के चरण

चरण I : O को केन्द्र मानकर तथा त्रिज्या 4 cm लेकर एक वृत्त बनाइये।

चरण II : व्यास POQ बनाइये।

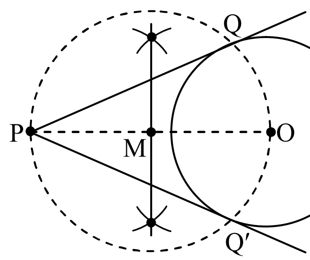
चरण III : $\angle PQT = 90^o$ बनाइये।



चरण IV : अभीष्ट स्पर्श रेखा TQT' प्राप्त करने के लिए TQ को T′ तक बढ़ाइये ।

➤ वृत्त के बाहर स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाऐं खींचना (वृत्त के केन्द्र का प्रयोग करके)

रचना के चरण



1. दिया गया वृत्त तथा वृत्त के बाहर एक बिन्दु P लीजिए।
2. OP को मिलाइए।
3. OP को समद्विभाजित कर इसका मध्य बिन्दु M प्राप्त कीजिए।
4. केन्द्र M तथा त्रिज्या = PM = MO वाला वृत्त बनाइए।
5. बनाया गया वृत्त दिए गए वृत्त को PO के ऊपर Q पर तथा नीचे Q' पर मिलता है।
6. PQ तथा PQ′ को मिलाइए।
7. बिन्दु P से वृत्त पर खींची गई अभीष्ट स्पर्श रेखाऐं PQ तथा PQ′ हैं ।

   हमने प्रेक्षित किया PQ = PQ′.

❖ उदाहरण ❖

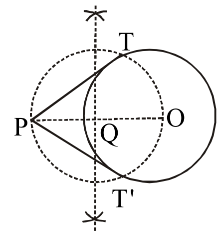
Ex.7 3 cm त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए । वृत्त के केन्द्र से 5.5 cm दूरी पर एक बिन्दु लीजिए । बिन्दु P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाऐं खींचिए।

Sol. रचना के चरण

चरण I : कागज पर एक बिन्दु O लीजिए तथा 3 cm त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए ।

चरण II : केन्द्र O से 5.5 cm दूरी पर एक बिन्दु P अंकित कीजिए तथा OP को मिलाइए।

चरण III: OP का लम्ब समद्विभाजक खींचिये जो OP को Q पर प्रतिच्छेद करता है।



चरण IV: Q को केन्द्र तथा OQ = PQ को त्रिज्या मानते हुए एक वृत्त बनाइए जो दिए गए वृत्त को T व T′ पर प्रतिच्छेद करता है।

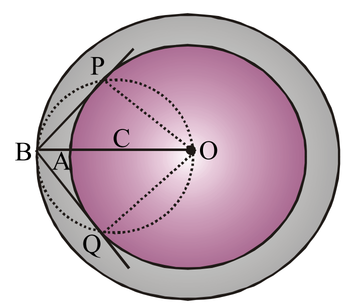
चरण V : अभीष्ट स्पर्श रेखाऐं प्राप्त करने के लिए PT व PT′को मिलाइए ।

Ex.8 6 cm त्रिज्या के संकेन्द्री वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से 4 cm त्रिज्या के वृत्त पर स्पर्श रेखा खींचिए तथा इसकी लम्बाई मापिए। उचित गणना द्वारा माप का सत्यापन भी कीजिए।

Sol. हम निम्न चरणों का अनुसरण करते हैं :

चरण I : कागज पर एक बिन्दु O लीजिए तथा OA = 4cm त्रिज्या का वृत्त बनाइए । OB = 6 cm त्रिज्या का संकेन्द्री वृत्त भी बनाइए ।

चरण II : OB का मध्य बिन्दु C ज्ञात कीजिए तथा OC = BC त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए । माना यह वृत्त 4 cm त्रिज्या के वृत्त को P तथा Q पर प्रतिच्छेद करता है।



पद III : 6 cm त्रिज्या के वृत्त पर स्थित बिन्दु B से अभीष्ट स्पर्श रेखाऐं प्राप्त करने के लिए BP तथा BQ को मिलाइए।

उचित गणना से, हमें प्राप्त होता है

BP = BQ = 4.5 cm

जाँच: ΔBPO में

OB = 6 cm व OP = 4 cm

$\therefore\ OB^2 = BP^2 + OP^2$

[पाइथागोरस प्रमेय से]

$\Rightarrow$ $BP = \sqrt{OB^2 - OP^2}$

$\Rightarrow$ $BP = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}$ cm

$= 4.47$ cm $\simeq 4.5$ cm

इसी प्रकार,

$BQ = 4.47$cm $\simeq$ 4.5 cm

Ex.9 5 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म खींचिए जो कि एक दूसरे से 60º कोण पर झुकी हुई है।

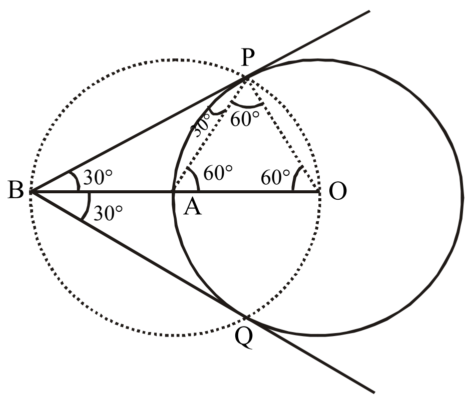
Sol. स्पर्श रेखाओं का युग्म बनाने के लिए निम्न चरणों का अनुसरण कीजिए।

चरण I : कागज पर बिन्दु O लीजिए तथा OA = 5 cm त्रिज्या का एक वृत्त बनाइये ।

चरण II : OA को B तक इस प्रकार बढ़ाइये कि OA = AB = 5 cm

चरण III : A को केन्द्र मानते हुए AO=AB = 5 cm त्रिज्या का वृत्त बनाइए। माना यह चरण I में बनाए गए वृत्त को P तथा Q पर काटता है।

चरण IV : अभीष्ट स्पर्श रेखाऐं प्राप्त करने के लिए BP तथा BQ को मिलाइए



सत्यापन : OAP में,

OA = OP = 5 cm (=त्रिज्या) तथा,

AP = 5 cm (=केन्द्र A वाले वृत्त की त्रिज्या)

$\therefore$ ΔOAP समबाहु त्रिभुज है।

$\Rightarrow$ $\angle PAO = 60^o$

$\Rightarrow$ $\angle BAP = 120^o$

ΔBAP में,

BA = AP तथा $\angle BAP = 120^o$

$\therefore$ $\angle ABP = \angle APB = 30^o$

$\Rightarrow$ $\angle PBQ = 60^o$

Ex.10 3 cm त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए। इस वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का एक युग्म बनाइए जो कि एक दूसरे से 60º कोण पर झुकी हुई है।

Sol. रचना के चरण

रचना I : O को केन्द्र मानते हुए त्रिज्या = 3 cm का वृत्त बनाइए ।

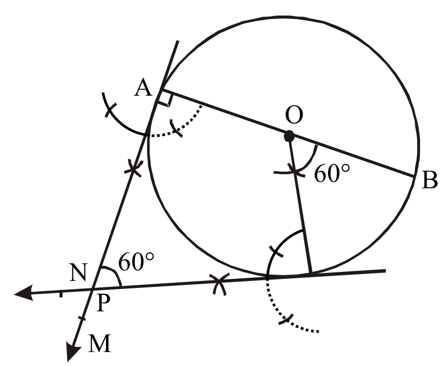
रचना II : इस वृत्त का कोई व्यास AOB खींचिए ।

रचना III : $\angle BOC = 60^o$ इस प्रकार बनाइए कि त्रिज्या OC वृत्त को C पर मिले ।

रचना IV : $AM \perp AB$ तथा $CN \perp OC$ खींचिए ।

माना AM व CN एक दूसरे को P पर प्रतिच्छेद करती है।

तब, PA व PC दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाऐं है जो कि 60º कोण पर झुकी हुई है।



उपपत्ति : $\angle AOC = (180^o - 60^o) = 120^o$

चतुर्भुजOAPC में,

$\angle OAP = 90^o, \angle AOC = 120^o, \angle OCP = 90^o.$

$\therefore \angle APC = [360^o - (90^o + 120^o + 90^o)] = 60^o.$