गुरूत्वाकर्षण

4
अध्याय

सूची

- गुरूत्वीय बल
- न्यूटन का गुरूत्वाकर्षण का नियम
- पृथ्वी का गुरूत्वाकर्षण बल
- गुरूत्वीय त्वरण g के मान में परिवर्तन
- द्रव्यमान तथा भार
- स्वतंत्र रूप से गिर रही वस्तु के लिए गति की समीकरणें

➤ गुरूत्वीय बल

बाह्मण्ड में कोई भी दो कण एक-दूसरे को आकर्षित करते है। इस बल को गुरूत्वीय बल कहते है।

यह परिकल्पना न्यूटन द्वारा दी गई थी।

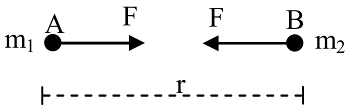
➤ न्यूटन का गुरूत्वाकर्षण का नियम

◆ न्यूटन का गुरूत्वाकर्षण का नियम : "बाह्मण्ड में स्थित कोई भी दो पिण्ड एक बल से, एक-दूसरे को आकर्षित करते है जो उनके द्रव्यमानों के गुणन के समानुपाती तथा उनके मध्य दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है"

गणितीय व्यंजक

माना कि A व B क्रमशः द्रव्यमान m_1 व m_2 के दो कण हैं। माना कि दूरी AB = r हैं।

गुरूत्वीय बल के नियम द्वारा, कण A कण B को एक बल द्वारा आकर्षित करता है, इस तरह से कि -



$F \propto m_1 m_2$ (एक दिये हुए कण युग्म के लिए)

$F \propto \frac{1}{r^2}$ (कणों के मध्य दी गई दूरी के लिए)

इसलिए $F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$

या $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

यहाँ G एक नियतांक है, जिसे गुरूत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियतांक कहा जाता हैं।

जहाँ G = सार्वत्रिक गुरूत्वीय नियतांक

G की इकाई Nm^2/kg^2

◆ $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

◆ G पिण्डों के द्रव्यमानों तथा उनके मध्य दूरी पर निर्भर नही करता है

◆ न्यूटन का गुरूत्वाकर्षण का नियम बाह्मण्ड में सभी पिण्डों के लिये लागू होता है

नोट : बाह्मण्ड के किन्हीं दो पिण्डों के मध्य बल गुरूत्वाकर्षण बल (force of gravitation) कहलाता है जबकि वह बल जिससे पृथ्वी एक पिण्ड को आकर्षित करती है गुरूत्वीय बल (force of gravity) कहलाता है।

◈ **गुरूत्वाकर्षण बल पर आधारित कुछ वैज्ञानिक परिकल्पना :**

- सूर्य तथा पृथ्वी के मध्य गुरूत्वाकर्षण बल पृथ्वी की सूर्य के चारों ओर गति को बनाये रखता है
- पृथ्वी तथा चन्द्रमा के मध्य गुरूत्वाकर्षण बल चन्द्रमा की पृथ्वी के चारों ओर गति को बनाये रखता है
- हमारे सोर निकाय का अस्तित्व गुरूत्वाकर्षण बल के कारण है।
- समुद्र में ज्वार-भाटा के लिये पानी सतह पर सूर्य तथा चन्द्रमा का गुरूत्वाकर्षण बल जिम्मेदार होता है
- पृथ्वी के ऊपर वायुमण्डल पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण बल के कारण होता है।
- सूर्य तथा ग्रह के मध्य गुरूत्वाकर्षण बल ग्रह की सूर्य के चारों ओर गति को बनाये रखता है
- ग्रहों द्वारा आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल उपलब्ध कराने के लिये गुरूत्वाकर्षण बल जिम्मेदार होता है
- चन्द्रमा द्वारा आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल पृथ्वी का आकर्षण बल (गुरूत्व बल) उपलब्ध कराता है।

◈ **न्यूटन का गति का तीसरा नियम तथा गुरूत्वाकर्षण का नियम :**

- न्यूटन का गति का तीसरा नियम गुरूत्वाकर्षण पर भी लागू होता है अर्थात् यदि पृथ्वी, पिण्ड पर आकर्षण बल लगाती है, तो पिण्ड पृथ्वी पर समान तथा विपरीत आकर्षण बल लगाता है।
- $a = F/m$

  पिण्ड का द्रव्यमान जितना ज्यादा होगा उत्पन्न त्वरण उतना ही कम होगा और यदि पिण्ड का द्रव्यमान कम हैं तो त्वरण भी अधिक होगा।

Ex. 1 10 m की दूरी द्वारा पृथक 100 kg व 1000 kg के दो द्रव्यमानों के मध्य बल ज्ञात कीजिये ($G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²).

Sol. न्यूटन के गुरूत्वाकर्षण के अनुसार, दो पिण्डों के मध्य आकर्षण बल

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

यहाँ, $m_1 = 100$ kg; $m_2 = 1000$ kg ;

$r = 10$ m ; $G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$

$$\therefore \quad F = \frac{6.67\times10^{-11}\times100\times1000}{(10)^2}$$

$$= 6.67 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Ex. 2 पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6 \times 10^{24}$ kg, पृथ्वी की त्रिज्या $= 6.4 \times 10^6$ m दी गई है। 50 kg द्रव्यमान के व्यक्ति द्वारा अनुभव आकर्षण बल ज्ञात कीजिये।

Sol. गुरूत्वाकर्षण बल व्यंजक $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ द्वारा दिया जाता है

यहाँ, पृथ्वी का द्रव्यमान, $m_1 = 6 \times 10^{24}$ kg;

व्यक्ति का द्रव्यमान, $m_2 = 50$ kg

उनके मध्य दूरी पृथ्वी की त्रिज्या के बराबर लेते है

$\therefore \quad r = 6.4 \times 10^6$ m

इन मानों को रखने पर, हम पाते है

$$F = \frac{6.67\times10^{-11}\times6\times10^{24}\times50}{(6.4\times10^6)^2} = 488.5 \text{ N}$$

Ex. 3 पृथ्वी पर सूर्य तथा चन्द्रमा द्वारा लगाये गये गुरूत्वीय बलों की तुलना कीजिये। पृथ्वी पर कौन अधिक बल लगाता है ?

(दिया है : सूर्य का द्रव्यमान, $M_s = 4 \times 10^{31}$ kg; चन्द्रमा का द्रव्यमान, $M_m = 6.3 \times 10^{22}$ kg; सूर्य तथा चन्द्रमा के मध्य दूरी, $r_{se} = 1.3 \times 10^{12}$ m तथा चन्द्रमा व पृथ्वी के मध्य दूरी $r_{me} = 4.5 \times 10^8$m)

Sol. यदि सूर्य का द्रव्यमान M_s तथा पृथ्वी का द्रव्यमान M_e है तथा सूर्य तथा पृथ्वी के मध्य दूरी r_{se} है, तो पृथ्वी पर सूर्य द्वारा लगाया गया बल है

$$F_s = \frac{GM_sM_e}{(r_{se})^2} \qquad ...(1)$$

इसी प्रकार, यदि चन्द्रमा का द्रव्यमान M_m, पृथ्वी का द्रव्यमान M_e है तथा पृथ्वी व चन्द्रमा के मध्य दूरी r_{me} है तो पृथ्वी पर चन्द्रमा द्वारा आरोपित बल है

$$F_m = \frac{GM_mM_e}{(r_{me})^2} \quad ...(2)$$

समी. (1) में समी.(2) का भाग देने पर, हम पाते है

$$\frac{F_s}{F_m} = \frac{GM_sM_e}{(r_{se})^2} \times \frac{r_{me}^2}{GM_mM_e}$$

$$= \frac{M_s}{M_m} \times \frac{(r_{me})^2}{(r_{se})^2}$$

$$= \frac{4\times10^{31}}{6.3\times10^{22}} \times \left(\frac{4.5\times10^8}{1.3\times10^{12}}\right)^2 = 76.07$$

∴ पृथ्वी पर सूर्य द्वारा आरोपित बल पृथ्वी पर चन्द्रमा द्वारा आरोपित बल का लगभग 76 गुना होता है।

Ex. 4 यदि पृथ्वी का द्रव्यमान तथा त्रिज्या क्रमशः 6.0×10^{24} kg तथा 6.4×10^6 m है, 1 kg द्रव्यमान के पिण्ड पर पृथ्वी द्वारा आरोपित बल ज्ञात कीजिये।

(i) 1 kg द्रव्यमान के पिण्ड में उत्पन्न त्वरण तथा

(ii) पृथ्वी में उत्पन्न त्वरण भी ज्ञात कीजिये

Sol. न्यूटन के गुरूत्वाकर्षण के नियम से, हम जानते है कि दो पिण्डों के मध्य आकर्षण बल $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ द्वारा दिया जाता है।

यहाँ, m_1 = पृथ्वी का द्रव्यमान = 6.0×10^{24} kg;

m_2 = पिण्ड का द्रव्यमान = 1 kg

r = दो पिण्डों के मध्य दूरी

= पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^6 m

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²

$$\therefore \quad F = \frac{6.67\times10^{-11}\times6.0\times10^{24}\times1}{(6.4\times10^6)^2} = 9.8\text{ N}$$

यह दर्शाता है कि पृथ्वी 1 kg द्रव्यमान के पिण्ड पर 9.8 N का बल लगाती है। पिण्ड पृथ्वी पर 9.8 N का समान आकर्षण बल लगायेगा।

(i) 1kg द्रव्यमान के पिण्ड में उत्पन्न

बल = द्रव्यमान × त्वरण

$$\therefore \quad \text{त्वरण, } a = \frac{F}{m} = \frac{9.8}{1} = 9.8\text{ m/s}^2$$

अतः 1 kg द्रव्यमान के पिण्ड में पृथ्वी के आकर्षण के कारण उत्पन्न त्वरण 9.8 m/s² है, जो काफी बड़ा होता है। अतः, एक पिण्ड को मुक्त किया जाता है, तो वह पृथ्वी की ओर 9.8 m/s² के त्वरण से गिरता है, जो आसानी से प्रेक्षित किया जा सकता है

(ii) पृथ्वी में उत्पन्न त्वरण

इसी प्रकार, पृथ्वी का त्वरण निम्न द्वारा दिया जाता है

$$= \frac{\text{बल}}{\text{पृथ्वी का द्रव्यमान}} = \frac{9.8}{6.0\times10^{24}}$$

$= 1.63 \times 10^{-24}$ m/s²

यह दर्शाता है कि 1 kg द्रव्यमान के पिण्ड द्वारा पृथ्वी में उत्पन्न त्वरण 1.63×10^{-24} m/s² है जो बहुत कम है तथा प्रेक्षित नहीं किया जा सकता है।

➢ पृथ्वी का गुरूत्वाकर्षण बल

- बल जो पृथ्वी पिण्ड पर लगाती है 'गुरूत्व बल' कहलाता है. i.e. $F = \frac{GMm}{R^2}$

  जहाँ M = पृथ्वी का द्रव्यमान, R = पृथ्वी की त्रिज्या

- इस बल के कारण एक पिण्ड जिसे पृथ्वी की सतह पर कुछ ऊँचाई से मुक्त किया जाता है तो ग्रह पृथ्वी की ओर गिरता है तथा उसका वेग नियत दर से बढ़ता जाता है।

◈ **गुरूत्व के कारण त्वरण :**

◆ किसी पिण्ड पर पृथ्वी के आकर्षण के कारण उत्पन्न त्वरण गुरूत्व के कारण त्वरण कहलाता हैं और इसे 'g' से निरूपित किया जाता है।

$g = \frac{GM}{R^2} = 9.8\ m/s^2$ पृथ्वी की सतह के निकट

चन्द्रमा पर $g \approx \frac{g_e}{6} = \frac{9.8}{6}\ m/s^2$

◆ कुछ प्रारम्भिक वेग से ऊपर की ओर गतिशील एक पिण्ड 9.8 m/s^2 का मंदन अनुभव करता है, लेकिन उसका वेग शून्य होने तक लगातार घटता है। इसके बाद, वह पुनः पृथ्वी की ओर 9.8 m/s^2 के समान त्वरण से गिरना प्रारम्भ हो जाती है।

◆ g का मान भूमध्य रेखा पर न्यूनतम तथा ध्रुवों पर अधिकतम होता है

◆ g का मान पृथ्वी की ओर गिर रहे पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है

➢ गुरूत्वीय त्वरण (g) के मान में परिवर्तन

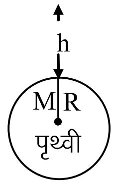
(A) ऊँचाई के साथ परिवर्तन :

◆ जब एक पिण्ड पृथ्वी सतह के ऊपर गति करता है तो पिण्ड की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी बढ़ती है जिसके फलस्वरूप आकर्षण बल घटता है।

◆ $g = \frac{GM}{R^2}$; पृथ्वी की सतह पर

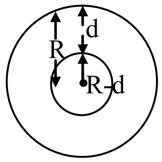
◆ $g = \frac{GM}{(R+h)^2}$; पृथ्वी सतह के ऊपर h ऊँचाई पर

जैसे हम पृथ्वी सतह के ऊपर जाते है तो g का मान घटता जाता है



(B) गहराई d के साथ परिवर्तन :

◆ जैसे ही हम पृथ्वी के अन्दर गहराई पर जाते है, पिण्ड पृथ्वी की कोर जो द्रव्यमान में छोटी होती द्वारा आकर्षित होता है।



◆ जैसे ही हम पृथ्वी के अन्दर जाते है, g का मान घटता है।

◆ आकर्षण बल घटता है तथा अतः g का मान घटता है तथा केन्द्र पर शून्य हो जाता है

(C) पृथ्वी के घूर्णन के कारण परिवर्तन :

◆ पृथ्वी के घूर्णन के कारण पिण्ड का ध्रुवों पर भार अधिकतम तथा भूमध्य रेखा पर न्यूनतम होता है।

➢ द्रव्यमान तथा भार

	द्रव्यमान		भार
1	पिण्ड का द्रव्यमान उसमें निहित पदार्थ की मात्रा के रूप में परिभाषित होता है.	1	पिण्ड का भार वह बल है जिससे वह पृथ्वी के केन्द्र की ओर आकर्षित होता है W = mg
2	पिण्ड का द्रव्यमान नियत रहता है तथा एक से दूसरे स्थान तक परिवर्तित नही होता है	2	पिण्ड का भार एक स्थान से दूसरे स्थान पर परिवर्तित होता है। वह g के मान पर निर्भर करता है। दूसरे ग्रह पर पिण्ड का भार भिन्न होगा
3	द्रव्यमान तुला द्वारा मापा जाता है	3	भार स्प्रिग तुला द्वारा मापा जाता है
4	द्रव्यमान की इकाई kg होती है	4	भार की इकाई न्यूटन या kg-wt होती है
5	पिण्ड का द्रव्यमान शून्य नही हो सकता है	5	पिण्ड का भार शून्य हो सकता है उदाहरण अन्तरिक्षयात्री अन्तरिक्षयान में भारहीनता अनुभव करता है
6	द्रव्यमान अदिश राशि है	6	भार सदिश राशि है

Ex. 5 पृथ्वी का द्रव्यमान 6×10^{24} kg तथा पृथ्वी की माध्य त्रिज्या 6.4×10^6 m दी गई है। पृथ्वी की सतह पर गुरूत्वीय त्वरण (g) का मान ज्ञात कीजिये।

Sol. गुरूत्वीय त्वरण के लिये सूत्र

$g = \frac{GM}{R^2}$ से दिया जाता है।

जहाँ, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²;

M = पृथ्वी का द्रव्यमान = 6×10^{24} kg;

R = पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^6 m

$$g = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(6.4 \times 10^6)^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Ex. 6 एक ग्रह जिसका द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का 4 गुना तथा त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की 3 गुना है पर गुरूत्वीय त्वरण का मान ज्ञात कीजिये।

Sol. यदि M पृथ्वी का द्रव्यमान तथा R पृथ्वी की त्रिज्या है, तो पृथ्वी पर गुरूत्वीय त्वरण (g_e) का मान

$g_e = \frac{GM}{R^2}$ ...(1) द्वारा दिया जाता है

माना एक ग्रह जिसका द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का

4 गुना है पर विचार करते है

$$M_p = 4M$$

ग्रह की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या के 3 गुना के बराबर होती है

$$R_e = 3R$$

तो उस ग्रह पर गुरूत्वीय त्वरण (g_p) है

$$g_p = \frac{G \times (4M)}{(3R)^2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{GM}{R^2} \qquad ...(2)$$

समी.(2) में समी.(1) का भाग देने पर

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{\frac{4}{9} \times \frac{GM}{R^2}}{\frac{GM}{R^2}} \text{ or } \frac{g_p}{g_e} = \frac{4}{9}$$

या $g_p = \frac{4}{9}(g_e)$

चूंकि $g_e = 9.8$ m/s²

$\therefore$ $g_p = \frac{4}{5} \times 9.8 = 4.35$ m/s²

अतः दिये गये ग्रह पर गुरूत्वीय त्वरण 4.35 m/s² है।

Ex. 7 चन्द्रमा का द्रव्यमान = 7.35×10^{22} kg तथा चन्द्रमा की त्रिज्या = 1740 km दी हुई है। चन्द्रमा में गुरूत्वीय बल के कारण चन्द्रमा की सतह पर कण द्वारा अनुभव त्वरण ज्ञात कीजिये। इस त्वरण का

उसी कण द्वारा पृथ्वी की सतह पर अनुभव किये गये त्वरण से अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol. यदि M_m चन्द्रमा का द्रव्यमान तथा R_m इसकी त्रिज्या है, तो उसकी सतह पर पिण्ड द्वारा अनुभव त्वरण निम्न द्वारा दिया जाता है

$$a = \frac{GM_m}{R_m^2}$$

यहाँ, $M_m = 7.3 \times 10^{22}$ kg;

$R_m = 1740$ km $= 1.74 \times 10^6$ m

$$\therefore \quad a = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 7.3 \times 10^{22}}{(1.74 \times 10^6)^2} = 1.57 \text{ m/s}^2$$

जबकि पृथ्वी की सतह पर गुरूत्वीय त्वरण निम्न दिया जाता है

$$g_e = \frac{GM_e}{R_e^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(6.4 \times 10^6)^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

चन्द्रमा तथा पृथ्वी पर गुरूत्वीय त्वरण की तुलना करने पर

$$\frac{a}{g} = \frac{1.57}{9.8} = 0.16$$

Ex. 8 पृथ्वी सतह से किस ऊँचाई पर g का मान पृथ्वी सतह पर मान का आधा होगा?

Sol. हम जानते है कि पृथ्वी सतह पर g का मान

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \text{...(1)}$$

जबकि पृथ्वी सतह के ऊपर h ऊँचाई पर g का मान निम्न द्वारा दिया जाता है

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \text{...(2)}$$

समी.(2) में समी.(1) का भाग देने पर

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \text{ or } g' = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

यहाँ, $g' = \frac{g}{2}$

$$\therefore \quad \frac{g}{2} = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

या $\frac{R+h}{R} = \sqrt{2}$

या $R + h = \sqrt{2}R$

या $h = (\sqrt{2} - 1)R$

या $h = (1.41 - 1) \times 6400 = 0.41 \times 6400$

$= 2624$ km

Ex. 9 मंगल ग्रह का द्रव्यमान 6×10^{23} kg है तथा त्रिज्या 4.3×10^6 m दी गई है। आदमी का मंगल ग्रह पर भार ज्ञात कीजिये जिसका पृथ्वी पर भार 600 N है। (पृथ्वी पर $g = 10$ m/s^2)

Sol. पृथ्वी पर आदमी का भार, W = mg

या $600 = m \times 10$ या $m = 60$ kg

अतः आदमी का द्रव्यमान 60 kg है जो सभी जगह समान रहेगा

अब मंगल पर गुरूत्वीय त्वरण

$$g_m = \frac{GM_m}{R_m^2}$$

यहाँ, $M_m = 6 \times 10^{23}$ kg; $R_m = 4.3 \times 10^6$m

$$\therefore \quad g_m = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{23}}{(4.3 \times 10^6)^2} = 2.17 \text{ m/s}^2$$

अब, मंगल ग्रह पर आदमी का भार होगा

$$W_m = m \times g_m = 60 \times 2.17 = 130.2 \text{ N}$$

➤ स्वतंत्रतापूर्वक गिर रही वस्तु के लिए गति की समीकरणें

क्योंकि मुक्तरूप से गिर रहा पिण्ड एक समान त्वरित गति से गिर रहा होता है, इसलिए एक समान त्वरण के अधीन गतिशील वस्तु की व्युत्पन्न की गई तीन समीकरणें, मुक्त रूप से गिरने वाली वस्तु की गति में भी प्रयोग में ली जा सकती है। मुक्त रूप से गिर रहे पिण्ड़ों, के लिए गुरुत्व के कारण त्वरण 'g' है। इसलिए हम समीकरण के त्वरण 'a' को 'g' से प्रतिस्थापित कर देते हैं और चूंकि मुक्त रूप से गिर रहे पिण्ड़ों की

ऊर्ध्वाधर दूरी ऊँचाई 'h' से जानी जाती है, इसलिए हम हमारी समीकरण में दूरी 's' को ऊँचाई 'h' से प्रतिस्थापित करते हैं। यह हमें मुक्त रूप से गिरने वाले पिण्डों के लिए निम्न परिष्कृत समीकरणें देती हैं।

गति की सामान्य समीकरणें	**मुक्त रूप से गिर रहे पिण्ड के लिए गति की समीकरणें**
(i) $v = u + at$ परिवर्तित होती हैं	$v = u + gt$
(ii) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ परिवर्तित होती हैं	$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$
(iii) $v^2 = u^2 + 2as$ परिवर्तित होती हैं	$v^2 = u^2 + 2gh$

हम इन परिष्कृत समीकरणों का प्रयोग आंकिक प्रश्न हल करने में करेंगे। इससे पहले कि हम ऐसा करे, हमें मुक्त रूप से गिरने वाले पिण्ड़ों की गति के लिए निम्न महत्वपूर्ण बिन्दुओं को याद रखना चाहिए।

(i) जब एक पिण्ड़ एक ऊँचाई से मुक्त रूप से गिराया जाता है, तो इसका प्रारम्भिक वेग 'u' शून्य होता हैं।

(ii) जब एक पिण्ड को ऊर्ध्वाधर ऊपर फैंका जाता हैं, तो उसका अंतिम वेग शून्य होता हैं।

(iii) पिण्ड द्वारा उच्चतम बिन्दु पर उठने में लिया गया समय वही होता है जो यह समान ऊँचाई से गिरने में लेता हैं।

(iv) मुक्त रूप से गिर रहे पिण्ड द्वारा तय की गई दूरी गिरने में लगे समय के वर्ग के समानुपाती होती हैं।