दो चरों में रेखीय समीकरण

CONTENTS (सूची)

- दो चरों में रेखीय समीकरण
- रेखीय समीकरण युग्म का व्यापक रूप
- दो चरों में रेखीय समीकरण का आलेख
- रेखीय समीकरण युग्म का आलेखीय निरूपण
- हलों का प्रकार
- रेखीय समीकरण निकाय को हल करने की विधियाँ
- शाब्दिक समस्याऐं

➢ दो चरों में रेखीय समीकरण

दो बीजीय व्यंजक जिनमें एक या अधिक अज्ञात राशियाँ हों तो इनके समानता का कथन एक समीकरण कहलाता है। यदि अज्ञात राशियों की संख्या दो हो तो दी गई समीकरण दो चरों में रेखीय समीकरण कहलाती है।

एक रेखीय समीकरण वह समीकरण है, जिसमें रेखीय बहुपद होते हैं, चर का वह मान जो समीकरण के दोनों पक्षों को समान (बराबर) बनाता है, उस समीकरण का हल कहलाता है।

किसी भी समीकरण के दोनों पक्षों में एक समान राशि जोड़ने/घटाने पर वह समीकरण अपरिवर्तित रहती है अर्थात् समानता के चिन्ह पर कोई असर नहीं होता है।

किसी भी समीकरण के दोनों पक्षों को एक समान अशून्य संख्या से गुणा करने/भाग देने पर उस समीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

Note :- किसी समीकरण के चरों का मान ज्ञात करने हेतु हमें समीकरण संख्या, उस समीकरण में उपस्थित चरों की संख्या के समान लेनी चाहिये।

➢ रेखीय समीकरण युग्म का व्यापक रूप

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

जहाँ a_1, b_1, c_1 एवं a_2, b_2, c_2 अचरांक हैं।

➢ दो चरों में रेखीय समीकरण $ax+by+c=0$ का आलेख, जहाँ $a \neq 0, b \neq 0$

(i) **पद I :** रेखीय समीकरण प्राप्त कीजिए, मानाकि रेखीय समीकरण $ax + by + c = 0$ है।

(ii) **पद II :** y को x के पदों इस प्रकार व्यक्त कीजिए कि

$$y = -\left(\frac{ax+c}{b}\right)$$

(iii) **पद III :** x के कोई दो मान कीजिए एवं इनके संगत y के मान पद II के व्यंजक से परिकलित कीजिए, जिससे दो हल मानाकि (α_1, β_1) व (α_2, β_2) मिलें। यदि संभव हों तो x के पूर्णांक मान लें ताकि इनके संगत y के मान भी पूर्णांक मान हों।

(iv) **पद IV :** ग्राफ पेपर पर बिन्दु (α_1, β_1) व (α_2, β_2) खींचिये।

(v) **पद V :** पद IV में चिन्हित बिन्दुओं को मिलाइये ताकि एक रेखा प्राप्त हो, यह प्राप्त रेखा, समीकरण $ax + by + c = 0$ का ग्राफ है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 समीकरण $y - x = 2$ का आलेख खींचिये।

Sol. दी गई समीकरण

$y - x = 2$

$\Rightarrow y = x + 2$

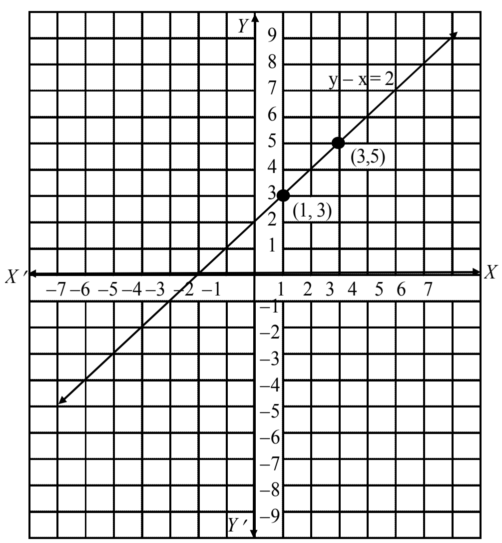
जब $x = 1$ हो, तब : $y = 1 + 2 = 3$

जब $x = 3$ हो, तब : $y = 3 + 2 = 5$

इस प्रकार नीचे दी गई सारणी, दी गई समीकरण द्वारा निरूपित रेखा पर स्थित बिन्दुओं के भुज व कोटि को दर्शाती है

x	1	3
y	3	5

ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं (1, 3) व (3, 5) को दर्शाने तथा इनको मिलाने वाली रेखा खींचते हैं, जो अभीष्ट रेखा की ग्राफ है। जैसा कि चित्रानुसार स्पष्ट होता है।



Ex.2 रेखा $x - 2y = 3$ का आलेख खींचिये, एवं उन बिन्दुओं के निर्देशाँक ज्ञात कीजिए जबकि (i) $x = -5$ (ii) $y = 0$.

Sol. हम जानते हैं कि $x - 2y = 3$

$\Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$

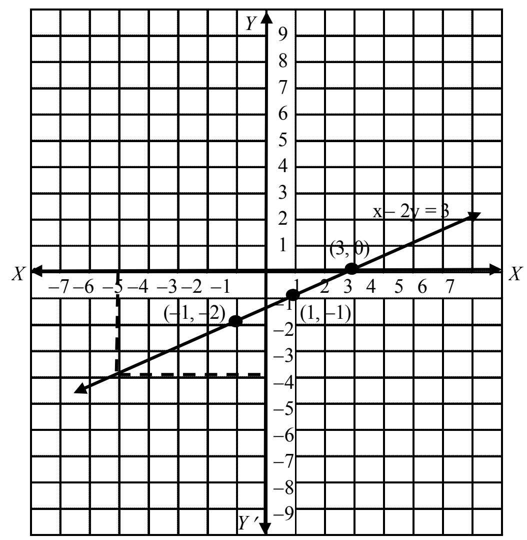
जब $x = 1$ हो, तब : $y = \frac{1-3}{2} = -1$

जब $x = -1$ हो, तब : $y = \frac{-1-3}{2} = -2$

इस प्रकार हमे निम्न सारणी मिलती है :

x	1	–1
y	–1	–2

ग्राफ पेपर पर बिन्दु (1, –1) व (–1, –2) खींचिये एवं इन्हें मिलाइये, इस प्रकार हमें एक सरल रेखा, चित्रानुसार मिलती है जो कि दी गई समीकरण $x - 2y = 3$ की ग्राफ से अभीष्ट रेखा है।



जब $x = -5$ हो, तब उस बिन्दु के निर्देशाँक ज्ञात करने हेतु हम y-अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचते है, जो बिन्दु (–5, 0) से होकर गुजरती है। यह रेखा, रेखा $x - 2y = 3$ के ग्राफ से उस बिन्दु पर मिलती है जिससे हमने x-अक्ष के समान्तर रेखा खींची है, जो y-अक्ष को $y = -4$ पर मिलती है, अत अभीष्ट बिन्दु के निर्देशाँक (–5, –4) है।

चूँकि x-अक्ष पर $y = 0$ होता है, अतः अभीष्ट बिन्दु वह बिन्दु है जहाँ रेखा x-अक्ष को मिलती है। ग्राफ से वह बिन्दु (3, 0) है।

अतः, अभीष्ट बिन्दु (–5, –4) व (3, 0) हैं।

➢ रेखीय समीकरण युग्म का आलेखीय निरूपण

मानाकि रेखीय समीकरण युग्म निकाय निम्न है

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad ....(1)$$

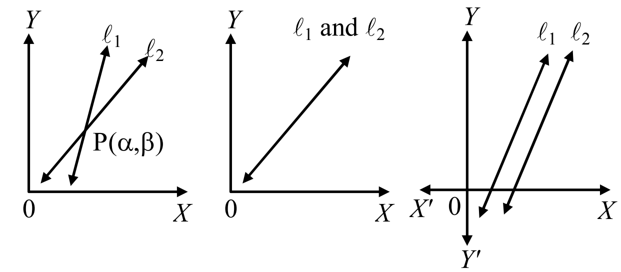
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad ....(2)$$

हम जानते हैं कि एक समतल में दी गई दो रेखाओं से, निम्न तीन संभावनाओं में से केवल एक संभावना घटित हो सकती है -

(i) ये दो रेखाएें एक बिन्दु पर काटेंगी।

(ii) ये दोनों रेखाएें प्रतिच्छेदन नहीं करेगी, चाहे इन्हें कितना ही बढ़ाया जाये अर्थात् ये रेखाएें समान्तर हैं।

(iii) ये दोनों रेखाएें, संपाती रेखाएें हैं।



❖ **उदाहरण** ❖

Ex.3 यदि राष्ट्रीय राजमार्ग संख्या 1 को समीकरण $x + y = 7$ से तथा राष्ट्रीय राजमार्ग संख्या 2 को समीकरण $5x + 2y = 20$ से निरूपित किया जाये तो इन समीकरणों को ज्यामिती से दर्शाइये।

Sol. हम जानते हैं कि, $x + y = 7$

$\Rightarrow \; y = 7 - x \quad ....(1)$

सारणी रूप में,

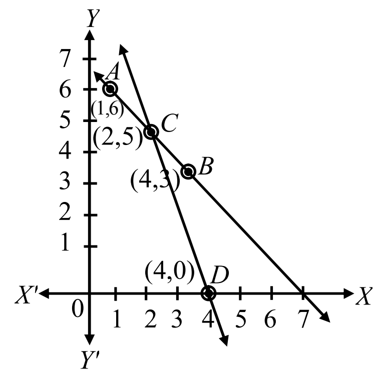
x	1	4
y	6	3
बिन्दु	A	B

एवं $5x + 2y = 20$

$$\Rightarrow \; y = \frac{20 - 5x}{2} \quad ....(2)$$

सारणी रूप में,

x	2	4
y	5	0
बिन्दु	C	D



इन बिन्दुओं A (1, 6), B(4, 3) को खींचो एवं इन्हें मिलाकर रेखा AB बनाइये।

इसी तरह से, बिन्दुओं C(2, 5). D (4, 0) को मिलाकर रेखा CD बनाइये। स्पष्टतः दोनों रेखाऐं बिन्दु C पर प्रतिच्छेदन करती हैं अब रेखा AB पर स्थित प्रत्येक बिन्दु समीकरण (1) के हल देता है तथा रेखा CD पर स्थित प्रत्येक बिन्दु समीकरण (2) का हल देता है।

Ex.4 एक पिता अपनी पुत्री से कहता है कि "सात वर्ष पूर्व मैं, आपकी उम्र का सात गुना था तथा अब से तीन वर्ष पश्चात् मैं, आपकी उम्र का तीन गुना हो जाऊँगा" इस स्थिति को बीजगणितीय एवं आलेखीय रूप मे दर्शाइये ?

Sol. मानाकि पिता की वर्तमान आयु x वर्ष है तथा पुत्री की y वर्ष है।

सात वर्ष पूर्व पिता की आयु = $(x - 7)$ वर्ष

सात वर्ष पूर्व पुत्री की आयु = $(y - 7)$ वर्ष

प्रश्नानुसार,

$(x - 7) = 7(y - 7)$ or $x - 7y = -42 \quad ....(1)$

3 वर्ष पश्चात् पिता की आयु = $(x + 3)$ वर्ष

3 वर्ष पश्चात् पुत्री की आयु = $(y + 3)$ वर्ष

प्रश्नानुसार,

$x + 3 = 3(y + 3)$ or $x - 3y = 6$ ....(2)

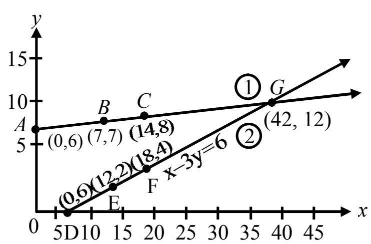
$x - 7y = -42$

x	0	7	14
$y = \frac{x+42}{7}$	6	7	8
बिन्दु	A	B	C

$x - 3y = 6$

x	6	12	18
$y = \frac{x-6}{3}$	0	2	4
बिन्दु	D	E	F

बिन्दुओं A(0, 6), B(7, 7), C(14, 8) को ग्राफ में दर्शाओ तथा इन्हें मिलाकर सरल रेखा ABC प्राप्त करो, इसी तरह बिन्दुओं D(6, 0), E(12, 2) व F(18, 4) को प्रदर्शित करके सरल रेखा DEF मिलती है।



Ex.5 कक्षा X के 10 विद्यार्थी गणित विषय की प्रश्नोत्तरी में भाग लेते हैं। यदि लड़कियों की संख्या, लड़कों की संख्या से 4 अधिक हो, तो प्रश्नोत्तरी में भाग लेने वाले लड़कों व लड़कियों की संख्या ज्ञात करो ?

Sol. मानाकि लड़कों की संख्या x है तथा लड़कियों की संख्या y है।

तब बनने वाली समीकरण होंगी

$x + y = 10$ ....(1)

एवं $y = x + 4$ ....(2)

अब समीकरण (1) व (2) के ग्राफ खींचे और प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात करते हैं। समीकरणों के हल निम्न प्रकार दिये हैं।

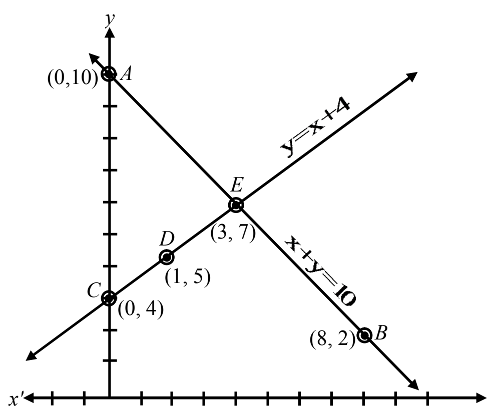
$x + y = 10$

x	0	8
$y = 10 - x$	10	2
बिन्दु	A	B

$y = x + 4$

x	0	1	3
$y = x + 4$	4	5	7
बिन्दु	C	D	E

इन बिन्दुओं को दर्शाने पर रेखाऐं AB व CE खींचिये जो इन बिन्दुओं से होकर गुजरती है एवं दी गई समीकरणों को दर्शाती हैं। यह दोनों रेखाऐं AB व CE बिन्दु E (3, 7) प्रतिच्छेदन करती है, अतः x = 3 व y = 7 रेखीय समीकरण युग्म के हल हैं।



अर्थात् लड़कों की संख्या = 3

लड़कियों की संख्या = 7.

सत्यापन (Verification) :

x = 3 व y = 7 समीकरण (1) में रखने पर, हम पाते हैं कि

L.H.S. = 3 + 7 = 10 = R.H.S.,

(1) सत्यापित हुई।

x = 3 व y = 7 समीकरण (2) में रखने पर, हम पाते हैं कि

7 = 3 + 4 = 7, (2) सत्यापित हुई।

अतः, दोनों समीकरण संतुष्ट होती हैं।

Ex.6 एक गार्डन की परिमित का आधा, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से 4 अधिक है, 36m के तुल्य है, तो गार्डन की विमाऐं ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि गार्डन की लम्बाई x व चौड़ाई y है।

तब बनने वाली समीकण होंगी

$$x = y + 4 \qquad ....(1)$$

आधी परमिति = 36

$$x + y = 36 \qquad ....(2)$$

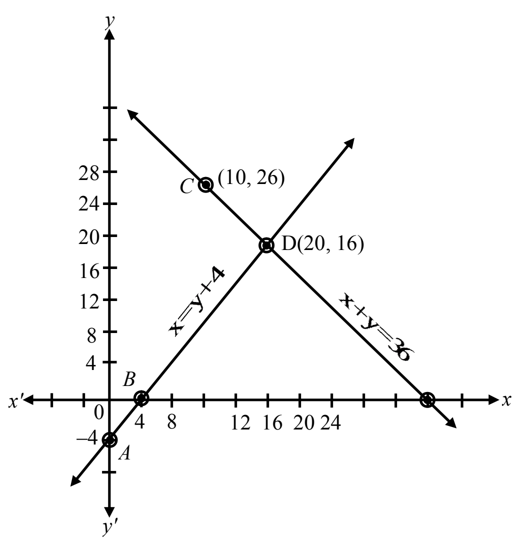
x = y+4

x	0	4
y	– 4	0
बिन्दु	A	B

x + y=36

x	10	20
y = 36 – x	26	16
बिन्दु	C	D

इन बिन्दुओं को दर्शाने पर रेखाऐं AB व CD खींचते हैं।



दो रेखाऐं AB व CD बिन्दु (20, 16) पर प्रतिच्छेदन करती हैं, अतः x = 20 व y = 16 रेखीय समीकरण युग्म के अभीष्ट हल हैं। अर्थात् गार्डन की लम्बाई 20 m व चौड़ाई 16 m है।

सत्यापन (Verification) :

x = 20 व y = 16 समीकरण (1) में रखने पर, हम पाते हैं कि

20 = 16 + 4 = 20, (1) सत्यापित हुई

x = 20 व y = 16 समीकरण (2) में रखने पर, हम पाते हैं कि

20 + 16 = 36

⇒ 36 = 36, (2) सत्यापित हुई।

अतः दोनों समीकरण संतुष्ट होती है।

Ex.7 समीकरण x – y + 1 = 0 व 3x + 2y – 12 = 0 के ग्राफ खींचिये। इन रेखाओं तथा x-अक्ष को मिलाकर बनने वाले त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुजाकार क्षेत्र को छायांकित कीजिए।

Sol. रेखीय समीकरण युग्म हैं :

$$x - y + 1 = 0 \qquad ....(1)$$
$$3x + 2y - 12 = 0 \qquad ....(2)$$

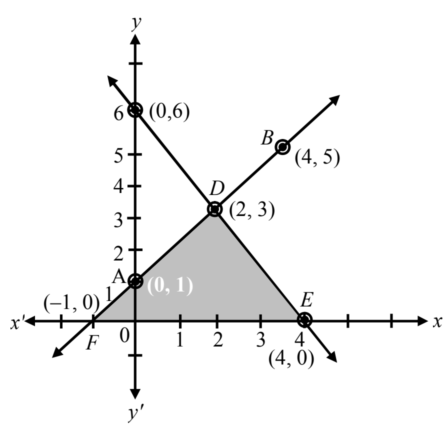
सारणी रूप में

x	0	4
y = x + 1	1	5
बिन्दु	A	B

सारणी रूप में

x	0	2
$y = \dfrac{12 - 3x}{2}$	6	3
बिन्दु	C	D

बिन्दुओं A(0, 1), B(4, 5) को खींचिये एवं इन्हें मिलाकर रेखा AB बनाइये, इसी प्रकार बिन्दुओं C(0, 6), D(2, 3) को खींचिये एवं इन्हें मिलाकर रेखा CD बनाइये।



स्पष्टतः, दो रेखाऐं एक दूसरे को परस्पर बिन्दु D(2, 3) पर काटती हैं, अतः x = 2 व y = 3 दी गई समीकरण युग्म के हल हैं।

रेखा CD, x-अक्ष को बिन्दु E (4, 0) पर काटती है एवं रेखा AB, x-अक्ष को बिन्दु F(–1, 0) पर काटती हैं।

अतः, त्रिभुज के शीर्षो के निर्देशाँक ; D(2, 3), E(4, 0), F(–1, 0) हैं।

सत्यापन (Verification) :

दोनों समीकरण (1) व (2) दोनों x = 2 व y = 3 से संतुष्ट होती हैं। अतः, सत्यापित हुई।

➤ हलों के प्रकार

हल तीन प्रकार के होते हैं :

1. अद्वितीय हल
2. अनन्त हल
3. कोई हल नहीं

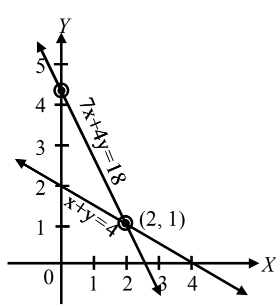
(A) सुसंगत हल (Consistent) :

यदि रेखीय युगपत समीकरण निकाय का कम से कम एक हल हो तो निकाय सुसंगत कहलाता है।

(i) संगत समीकरण जिनका अद्वितीय हल हो (Consistent equations with unique solution) : दो समीकरणों के ग्राफ एक अद्वितीय बिन्दु पर काटते हैं, **उदाहरण के लिए,** निम्न पर विचार करें

$$x + 2y = 4$$

$$7x + 4y = 18$$



ग्राफ (रेखाऐं) जो इन समीकरणों की हैं, परस्पर एक दूसरे को बिन्दु (2, 1) अर्थात्, x = 2, y = 1 पर काटती हैं।

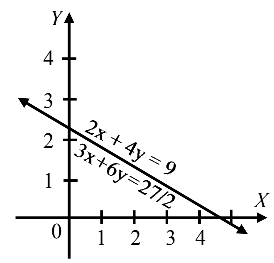
अतः समीकरण संगत हैं तथा इनका अद्वितीय हल है।

(ii) संगत समीकरण जिनके अनन्त हल हों (Consistent equations with infinitely many solutions) : दो समीकरणों के ग्राफ (रेखाऐं) संपाती होंगे।

उदाहरण के लिए, निम्न का अवलोकन कीजिए

$$2x + 4y = 9$$

$$3x + 6y = \frac{27}{2}$$



उपरोक्त समीकरणों के ग्राफ संपाती हैं। रेखाओं पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के निर्देशाँक इन समीकरणों के हल हैं। अतः दी गई समीकरण संगत हैं जिनके अनन्त हल हैं।

(B) असंगत समीकरण (Inconsistent Equation) :

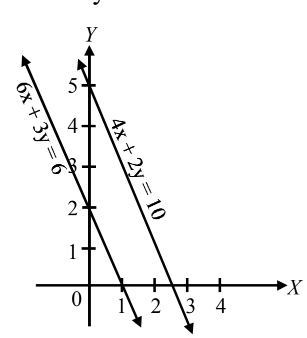
यदि रेखीय युगपत समीकरण निकाय का कोई हल नहीं हो, तो निकाय असंगत कहलाता है।

कोई हल नहीं : दो समीकरणों के ग्राफ (रेखाऐं) समान्तर हों

उदाहराण के लिए : निम्न का अवलोकन कीजिए

$$4x + 2y = 10$$

$$6x + 3y = 6$$



दी गई समीकरणों के ग्राफ (रेखाऐं) समान्तर हैं, जो कभी भी एक बिन्दु पर नहीं मिलेंगे, अतः कोई हल नहीं हैं, अतः समीकरण असंगत हैं

क्रमाँक	दो समीकरणों के ग्राफ	समीकरणों के प्रकार
1	प्रतिच्छेदन रेखाऐं	संगत एवं अद्वितीय हल
2	संपाती	संगत एवं अनन्त हल
3	समान्तर रेखाऐं	असंगत (कोई हल नहीं)

❖ उदाहरण ❖

Ex.8 ग्राफीय विधि से प्रदर्शित करो कि समीकरण निकाय
$x - 4y + 14 = 0$; $3x + 2y - 14 = 0$
संगत है एवं इसका अद्वितीय हल है।

Sol. दी गई समीकरण निकाय

$$x - 4y + 14 = 0 \quad ....(1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+14}{4}$$

जबकि $x = 6$, $y = \frac{6+14}{4} = 5$

जबकि $x = -2$, $y = \frac{-2+14}{4} = 3$

सारणी रूप में,

x	6	– 2
y	5	3
बिन्दु	A	B

$$3x + 2y - 14 = 0 \quad ....(2)$$

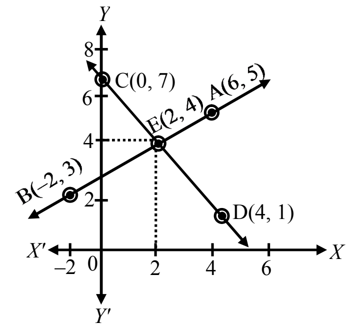
$$\Rightarrow y = \frac{-3x+14}{2}$$

जब $x = 0$, $y = \frac{0+14}{2} = 7$

जब $x = 4$, $y = \frac{-3\times4+14}{2} = 1$

सारणी रूप में,

x	0	4
y	7	1
बिन्दु	C	D



दी गई समीकरण जो दो रेखाओं से निरूपित हैं, एक दूसरे को परस्पर बिन्दु (2, 4) पर काटते हैं, अतः समीकरण संगत है एवं अद्वितीय हल वाली है।

Ex.9 आलेखीय विधि से प्रदर्शित करो कि समीकरण निकाय $2x + 5y = 16$; $3x + \frac{15}{2}y = 24$ के अनन्त हल हैं।

Sol. दिया गया समीकरण निकाय

$$2x + 5y = 16 \quad ....(1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{16-2x}{5}$$

जबकि $x = 3$, $y = \frac{16-6}{5} = 2$

जबकि $x = -2$, $y = \frac{16-2\times(-2)}{5} = 4$

सारणी रूप में,

x	– 2	3
y	4	2
बिन्दु	A	B

$$3x + \frac{15}{2}y = 24 \quad ....(1)$$

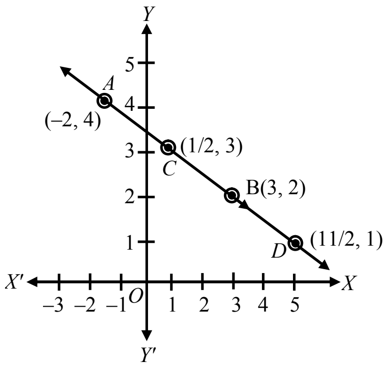
$$\Rightarrow y = \frac{48-6x}{15} \quad ....(2)$$

जबकि $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{48-3}{15} = 3$

जबकि $x = \frac{11}{2}$, $y = \frac{48-6\times\left(\frac{11}{2}\right)}{15} = 1$

सारणी रूप में

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$
y	3	1
बिन्दु	C	D



दोनों समीकरणों की रेखाऐं संपाती हैं। इस रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के निर्देशाँक ही इसके हल हैं।

अतः दी गई समीकरण संगत है एवं इसके अनन्त हल हैं।

Ex.10 आलेखीय विधि से प्रदर्शित करो कि समीकरण निकाय 2x + 3y = 10, 4x + 6y = 12 का कोई हल नहीं है।

Sol. दी गई समीकरण है

$2x + 3y = 10$

$\Rightarrow 3y = 10 - 2x \quad \Rightarrow y = \frac{10-2x}{3}$

जब $x = -4, y = \frac{10-2\times(-4)}{3} = \frac{10+8}{3} = 6$

जब $x = 2, y = \frac{10-2\times 2}{3} = \frac{10-4}{3} = 2$

सारणी रूप में

x	– 4	2
y	6	2
बिन्दु	A	B

$4x + 6y = 12$

$\Rightarrow 6y = 12 - 4x \quad \Rightarrow 6y = 12 - 4x$

$\Rightarrow y = \frac{12-4x}{6}$

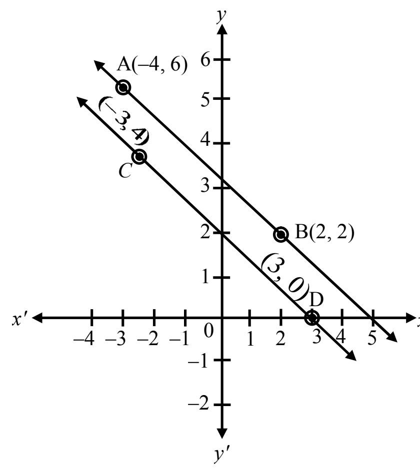
जबकि $x = -3, y = \frac{12-4\times(-3)}{6} = \frac{12+12}{6} = 4$

जबकि $x = 3, y = \frac{12-4\times(3)}{6} = \frac{12-12}{6} = 0$

सारणी रूप में

x	– 3	3
y	4	0
बिन्दु	C	D

बिन्दुओं A (–4, 6), B(2, 2) को दर्शाते हुये इन्हें मिलाकर रेखा AB पायें, इसी तरह से बिन्दुओं C(–3, 4), D(3, 0) को दर्शाकर इन्हें मिलाकर रेखा CD प्राप्त कीजिए।



स्पष्टतः दी गई समीकरणों के आलेख समान्तर रेखाऐं हैं, क्योंकि इनका कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है, अतः कोई उभयनिष्ठ हल नहीं है, अतः दी गई समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

Ex.11 रेखीय समीकरण 2x + 3y – 8 = 0 दी गई है, तो दो चरों में दूसरी रेखीय समीकरण इस प्रकार लिखो कि बने युग्म का ज्यामितीय निरूपण निम्न हो :

(i) प्रतिच्छेदन रेखाऐं

(ii) समान्तर रेखाऐं

(iii) संपाती रेखाऐं

Sol. हम जानते हैं कि,

$$2x + 3y - 8 = 0$$

(i) दो चरों की दूसरी रेखीय समीकरण जो ऐसी हैं कि बनने वाले युग्म का ज्यामितीय निरूपण प्रतिच्छेदन रेखाऐं हैं, होगा

$$3x - 2y - 8 = 0$$

(ii) उपरोक्त रेखा के समान्तर अन्य रेखाऐं होंगी

$$4x + 6y - 22 = 0$$

(iii) उपरोक्त रेखा के संपाती अन्य रेखाऐं होंगी

$$6x + 9y - 24 = 0$$

Ex.12 निम्न रेखीय समीकरण निकाय को आलेखीय विधि से हल करें ;

$$3x + y - 11 = 0 ; x - y - 1 = 0$$

इन रेखाओं तथा y-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र को छायांकित कीजिए, तथा इन रेखाओं एवं y-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Sol. हम जानते हैं कि ;

$$3x + y - 11 = 0 \text{ एवं } x - y - 1 = 0$$

(i) समीकरण $3x + y - 11 = 0$ के लेखाचित्र में,

हम जानते हैं कि, $3x + y - 11 = 0$

$\Rightarrow \; y = -3x + 11$

जब, $x = 2, \quad y = -3 \times 2 + 11 = 5$

जब, $x = 3, \quad y = -3 \times 3 + 11 = 2$

तब, निम्न सारणी देखें :

x	2	3
y	5	2

बिन्दुओं P (2, 5) व Q(3, 2) को ग्राफ में दर्शायें एवं उनको मिलाने वाली रेखा खींचे इस तरह हमें चित्रानुसार समीकरण $3x + y - 11 = 0$ का आलेख प्राप्त होता है

(b) समीकरण $x - y - 1 = 0$ का ग्राफ,

हम जानते हैं कि,

$$x - y - 1 = 0$$

$\Rightarrow \; y = x - 1$

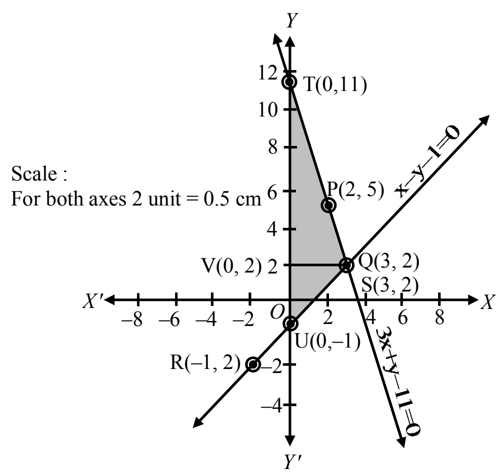
जब, $x = -1, \quad y = -2$

जब, $x = 3, \quad y = 2$

तब, निम्न सारणी का अवलोकन करें :

x	−1	3
y	−2	2

एक ही ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं R(–1, –2) व S(3, 2) को दर्शाइये एवं इन्हें मिलाने वाली रेखा खींचिये, हमें समीकरण $x - y - 1 = 0$ का ग्राफ चित्रानुसार प्राप्त होता है



आप देख सकते हैं कि दो रेखाऐं बिन्दु Q(3, 2) पर प्रतिच्छेदन करती हैं, अतः, x = 3 एवं y = 2 अतः इन रेखाओं जो दिये गये समीकरण से निरूपित हैं तथा y-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल छायांकित भाग है।

इसलिए, परिबद्ध क्षेत्रफल = छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \Delta QUT$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times (TU \times VQ) = \frac{1}{2} \times (TO + OU) \times VQ$

$= \frac{1}{2}(11 + 1)\, 3 = \frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18$ वर्ग इकाई

अतः, अभीष्ट क्षेत्रफल 18 वर्ग इकाई

Ex.13 निम्न समीकरणों ;

$2x - 3y = -6$; $2x + 3y = 18$; $y = 2$

का आलेख खींचिये एवं इस प्रकार निर्मित त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Sol. (a) समीकरण $2x - 3y = -6$ के ग्राफ से;

$2x - 3y = -6$

$\Rightarrow \; y = \frac{2x+6}{3}$

जब, $x = 0$, $y = \frac{2\times 0+6}{3} = 2$

जब, $x = 3$, $y = \frac{2\times 3+6}{3} = 4$

तब, निम्न सारणी का अवलोकन करें :

x	0	3
y	2	4

ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं P(0, 2) व Q(3, 4) को दर्शाइये इन्हें मिलाकर एक रेखा प्राप्त करें तो हमें समीकरण $2x - 3y = -6$ का ग्राफ चित्रानुसार प्राप्त होता है।

(b) समीकरण $2x + 3y = 18$ के लेखाचित्र से;

$2x + 3y = 18$

$\Rightarrow \; y = \frac{-2x+18}{3}$

जब, $x = 0$, $y = \frac{-2\times 0+18}{3} = 6$

जब, $x = -3$, $y = \frac{-2\times(-3)+18}{3} = 8$

तब, निम्न सारणी का अवलोकन करें :

x	0	–3
y	6	8

एक ही ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं R(0, 6) व S(–3, 8) को दर्शायें एवं इन्हें मिलाकर एक रेखा खींचो, तो हमें समीकरण $2x + 3y = 18$ का ग्राफ चित्रानुसार प्राप्त होता हैं।

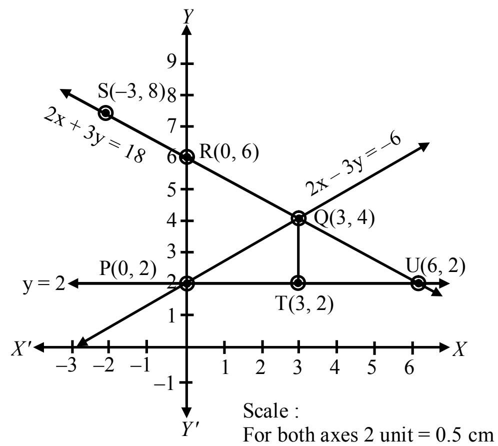
(c) समीकरण $y = 2$ का आलेख

यह स्पष्ट तथ्य है कि x के प्रत्येक मान के लिए $y = 2$ होता है, अतः हम बिन्दु T (3, 2), U(6, 2) या कोई अन्य मान लेंगे।

इस प्रकार, हमें निम्न सारणी मिलती है :

x	3	6
y	2	2

अब इन बिन्दुओं T(3, 2) व U(6, 2) को ग्राफ में दर्शाइये एवं इनको मिलाने वाली रेखा खींचिये, इस प्रकार हमें चित्रानुसार समीकरण $y = 2$ का आलेख प्राप्त होता है



चित्र से स्पष्ट है कि युग्म में ली गई रेखाऐं परस्पर बिन्दुओं Q(3, 4), U (6, 2) व P(0, 2) पर काटती हैं। ये त्रिभुज PQU के शीर्ष हैं।

इस प्रकार निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना (To find area of the triangle so formed) :

इस प्रकार निर्मित त्रिभुज PQU (चित्र देखें) है।

ΔPQU में,

QT (शीर्षलम्ब) = 2 इकाई

एवं PU (आधार) = 6 इकाई

अतः का क्षेत्रफल $\Delta PQU = \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)

$= \frac{1}{2}$ (PU × QT) $= \frac{1}{2} \times 6 \times 2$ वर्ग इकाई

= 6 वर्ग इकाई

➤ याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिन्दु

रेखा युग्म $a_1x+b_1y+c_1=0$ $a_2x+b_2y+c_2=0$	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	**अनुपात की तुलना**
$2x+3y+4=0$ $5x+6y+9=0$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
$x+2y+5=0$ $3x+6y+15=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
$2x-3y+4=0$ $4x-6y+10=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-3}{-6}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

आलेखीय निरूपण	बीजीय कथन
प्रतिच्छेदन रेखाऐं	ठीक एक हल (अद्वितीय)
संपाती रेखाऐं	अनन्त हल
समान्तर रेखाऐं	कोई हल नहीं

उपरोक्त सारणी से आप देख सकते हैं कि यदि रेखाऐं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ व $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ हों, तब

(i)	प्रतिच्छेदन रेखाओं के लिए $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
(ii)	संपाती रेखाओं के लिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
(iii)	समान्तर रेखाओं के लिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Ex.14 अनुपात $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ व $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना करने पर एवं उन्हें बिना दर्शाये ज्ञात करो कि निम्नलिखित रेखीय समीकरण युग्म जो एक बिन्दु पर प्रतिच्छेदन करते हैं, समान्तर हैं या संपाती हैं।

(i) $5x - 4y + 8 = 0, 7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0, 18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0, 2x - y + 9 = 0$

Sol. दी गई समीकरणों की समीकरण की मानक रूप समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ व $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से तुलना करने पर,

(i) $a_1 = 5, b_1 = -4, c_1 = 8;$

$a_2 = 7, b_2 = 6, c_2 = -9$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{6}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अतः रेखीय समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाऐं प्रतिच्छेदन करती हैं।

(ii) $a_1 = 9, b_1 = 3, c_1 = 12;$

$a_2 = 18, b_2 = 6, c_2 = 24$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

एवं $\frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अतः, रेखीय समीकरण युग्म द्वारा प्रदर्शित रेखाऐं संपाती होती हैं।

(iii) $a_1 = 6, b_1 = -3, c_1 = 10;$

$a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = 9$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{6}{2} = 3, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-1} = 3, \frac{c_1}{c_2} = \frac{10}{9}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अतः, रेखीय समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाऐं समान्तर हैं।

➤ रेखीय समीकरण निकाय का बीजीय हल

कभी-कभी, आलेखीय विधि से बिल्कुल सही उत्तर प्राप्त नहीं कर सकते। ग्राफ पेपर पर जब हम किसी बिन्दु के निर्देशांक पढ़ते हैं, तो हम से कुछ त्रुटि हो जाती है, अतः स्पष्टतया सही परिणाम प्राप्त करने हेतु हम कुछ

विश्वसनीय एवं मूल्यवान विधि प्रयोग में लेते हैं। निम्न बीजीय विधि से हमें सटीक एवं त्रुटिहीन उत्तर प्राप्त होता है

(i) प्रतिस्थापन द्वारा विलोपन विधि से

(ii) गुणांकों की तुलना द्वारा विलोपन विधि से

(iii) वज्रगुणन विधि से

➢ प्रतिस्थापन विधि

इस विधि में, सबसे पहले हम एक समीकरण से एक चर (y) का अन्य चर (x) के पदों में मान ज्ञात करते हैं। अब y का यह मान दूसरी समीकरण में प्रतिस्थापित करते हैं, इस तरह दूसरी समीकरण केवल x में रेखीय समीकरण बन जाती है एवं इसे x के लिए हल करते हैं।

अब पहली समीकरण में x का मान रखने पर, हम y का मान ज्ञात करते हैं।

रेखीय समीकरण निकाय को हल करने की यह विधि **"प्रतिस्थापन द्वारा विलोपन"** विधि कहलाती है।

'विलोपन', इसलिये कहलाती हैं कि हम y को हटा देते हैं या दूसरी समीकरण से y का विलोपन (निकाल देना) कर देते हैं। 'प्रतिस्थापन' से तात्पर्य y का मान दूसरी समीकरण में रखने से होता है।

क्रिया विधि (Working rule) :

मानाकि दो समीकरण निम्न हैं

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad ....(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad ....(2)$$

पद I : एक चर का मान ज्ञात कीजिए, मानाकि y का मान, अन्य चर x के पदों किसी समीकरण मानलो (1) से ज्ञात करना है।

पद II : पद I से प्राप्त y का मान, दूसरी समीकरण मानलो (2) में प्रतिस्थापित करते हैं यह समीकरण केवल एक चर x में समीकरण बनती है।

पद III : पद II से प्राप्त समीकरण को हल करके x का मान ज्ञात कीजिए।

पद IV : x का मान जो पद II से पद I की समीकरण से प्राप्त हुआ हैं, को प्रतिस्थापन करें, इससे हमें y का मान प्राप्त होगा, इस तरह से हल मिलता है अर्थात् x व y के

टिप्पणी : सत्यापन (Verification) : उत्तर की जाँच करने हेतु सत्यापन करना बहुत आवश्यक है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.15 निम्न में से प्रत्येक समीकरण निकाय x के विलोपन (प्रतिस्थापन द्वारा) हल कीजिए :

(i) $x + y = 7$, $2x - 3y = 11$ (ii) $x + y = 7$, $12x + 5y = 7$

(iii) $2x - 7y = 1$, $4x + 3y = 15$ (iv) $3x - 5y = 1$, $5x + 2y = 19$

(v) $5x + 8y = 9$, $2x + 3y = 4$

Sol. (i) $x + y = 7 \quad ....(1)$

$2x - 3y = 11 \quad ....(2)$

अब हम x का विलोपन करेंगे, इस हेतु इसका मान समीकरण से दूसरी समीकरण में प्रतिस्थापित करते है। समीकरण (1) से,

$x + y = 7 \Rightarrow x = 7 - y$

समीकरण (2) में, x का मान प्रतिस्थापन करने से,

$2 \times (7 - y) - 3y = 11$

$\Rightarrow 14 - 2y - 3y = 11$

$\Rightarrow -5y = -3$ or, $y = 3/5$.

अब y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$x + 3/5 = 7 \Rightarrow x = 32/5$.

अतः $x = 32/5$ एवं $y = 3/5$.

(ii) $x + y = 7 \quad ....(1)$

$12x + 5y = 7 \quad ....(2)$

समीकरण (1) से,

$x + y = 7 \Rightarrow x = 7 - y$

अब y का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$\Rightarrow 12(7 - y) + 5y = 7$

$\Rightarrow 84 - 12y + 5y = 7$

$\Rightarrow -7y = -77 \Rightarrow y = 11$

अब y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$x + 11 = 7 \quad \Rightarrow \quad x = -4$

अतः $x = -4, \quad y = 11.$

(iii) $2x - 7y = 1$ ....(1)

$4x + 3y = 15$ ....(2)

समीकरण (1) से,

$2x - 7y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7y+1}{2}$

x का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$\Rightarrow \quad 4 \times \frac{7y+1}{2} + 3y = 15$

$\Rightarrow \quad \frac{28y+4}{2} + 3y = 15$

$\Rightarrow \quad 28y + 4 + 6y = 30$

$\Rightarrow \quad 34y = 26 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{26}{34} = \frac{13}{17}$

अब y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$2x - 7 \times \frac{13}{17} = 1$

$\Rightarrow \quad 2x = 1 + \frac{91}{17} = \frac{108}{17} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{108}{34} = \frac{54}{17}$

अतः $x = \frac{54}{17}, y = \frac{13}{17}$

(iv) $3x - 5y = 1$ .... (1)

$5x + 2y = 19$ .... (2)

समीकरण (1) से,

$3x - 5y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5y+1}{3}$

x का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$\Rightarrow \quad 5 \times \frac{5y+1}{3} + 2y = 19$

$\Rightarrow \quad 25y + 5 + 6y = 57 \quad \Rightarrow \quad 31y = 52$

अतः $y = \frac{52}{31}$

अब y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$3x - 5 \times \frac{52}{31} = 1$

$\Rightarrow \quad 3x - \frac{260}{31} = 1 \Rightarrow 3x = \frac{291}{31}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{291}{31 \times 3} = \frac{97}{31}$

अतः $x = \frac{97}{31}, \quad y = \frac{52}{31}$

(v) $5x + 8y = 9$ ....(1)

$2x + 3y = 4$ ....(2)

समीकरण (1) से,

$5x + 8y = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9-8y}{5}$

x का मान (2) में रखने पर,

$\Rightarrow \quad 2 \times \frac{9-8y}{5} + 3y = 4$

$\Rightarrow \quad 18 - 16y + 15y = 20$

$\Rightarrow \quad -y = 2 \quad \text{or} \quad y = -2$

अब y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$5x + 8(-2) = 9$

$\Rightarrow \quad 5x = 25 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

अतः, $x = 5, \quad y = -2.$

Ex.16 निम्न समीकरण निकाय को 'y' के विलोपन (प्रतिस्थापित द्वारा) से हल कीजिए :

(i) $3x - y = 3$ (ii) $7x + 11y - 3 = 0$

$7x + 2y = 20$ $\quad 8x + y - 15 = 0$

(iii) $2x + y - 17 = 0$

$17x - 11y - 8 = 0$

Sol. (i) $3x - y = 3$ ....(1)

$7x + 2y = 20$ ....(2)

समीकरण (1) से,

$3x - y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 3$

'y' का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$\Rightarrow \quad 7x + 2 \times (3x - 3) = 20$

$\Rightarrow \quad 7x + 6x - 6 = 20$

$\Rightarrow \quad 13x = 26 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

अब x = 2 समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$3 \times 2 - y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3$

अतः $x = 2, \quad y = 3.$

(ii) $7x + 11y - 3 = 0$ ....(1)

$8x + y - 15 = 0$ .....(2)

समीकरण (1) से,

$7x + 11y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3-7x}{11}$

'y' का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$\Rightarrow \; 8x + \frac{3-7x}{11} = 15$

$\Rightarrow \; 88x + 3 - 7x = 165$

$\Rightarrow \; 81x = 162 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

अब, x = 2 समीकरण (2) में रखने पर,

$8 \times 2 + y = 15 \quad \Rightarrow \quad y = -1$

अतः, $x = 2, \; y = -1$.

(iii) $2x + y = 17$ ....(1)

$17x - 11y = 8$ ....(2)

समीकरण (1) से,

$2x + y = 17 \quad \Rightarrow \quad y = 17 - 2x$

'y' का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$17x - 11(17 - 2x) = 8$

$\Rightarrow \; 17x - 187 + 22x = 8$

$\Rightarrow \; 39x = 195 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

अब, 'x' का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$2 \times 5 + y = 17 \quad \Rightarrow \quad y = 7$

अत, $x = 5, \; y = 7$.

Ex.17 निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{15}{u} + \frac{2}{v} = 17$

$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{36}{5}$

(ii) $\frac{11}{v} - \frac{7}{u} = 1$

$\frac{9}{v} - \frac{4}{u} = 6$

Sol. (i) दी गई समीकरण निकाय है ;

$\frac{15}{u} + \frac{2}{v} = 17$ ....(1)

$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{36}{5}$ ....(2)

मानलो कि $1/u = x$, $1/v = y$, तब रेखीय समीकरण निकाय को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$15x + 2y = 17$ ....(3)

$x + y = \frac{36}{5}$ ....(4)

समीकरण (4) को 15 से एवं (iii) को 1 से गुणा करने पर,

$15x + 2y = 17$ ....(5)

$15x + 15y = \frac{36}{5} \times 15 = 108$ ....(6)

समीकरण (6) को समीकरण (5) से घटाने पर,

$-13y = -91 \quad \Rightarrow \quad y = 7$

अब y = 7 समीकरण (4) में प्रतिस्थापित करने पर,

$x + 7 = \frac{36}{5} \quad \Rightarrow x = \frac{36}{5} - 7 = \frac{1}{5}$

परन्तु, $y = \frac{1}{v} = 7 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{7}$

एवं, $x = \frac{1}{u} = \frac{1}{5} \Rightarrow u = 5$

अतः, दिये गये समीकरण निकाय का हल $u = 5$, $v = 1/7$ हैं।

(ii) दी गई समीकरण निकाय है ;

$\frac{11}{v} - \frac{7}{u} = 1; \qquad \frac{9}{v} - \frac{4}{u} = 6$

मानलो कि $1/v = x$ एवं $1/u = y$, तब उपरोक्त समीकरण निकाय को लिखा जा सकता है ;

$11x - 7y = 1$ ....(1)

$9x - 4y = 6$ ....(2)

समीकरण (1) को 4 से तथा (2) को 7 से गुणा करने पर,

$44x - 28y = 4$ ....(3)

$63x - 28y = 42$ ....(4)

समीकरण (4) को (3) से घटाने पर,

$-19x = -38 \Rightarrow x = 2$

x का उपरोक्त मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$9 \times 2 - 4y = 6 \Rightarrow -4y = -12$

$\Rightarrow y = 3$

परन्तु, $x = \frac{1}{v} = 2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}$

एवं, $y = \frac{1}{u} = 3 \Rightarrow u = \frac{1}{3}$

अतः, दी गई समीकरण का अभीष्ट हल है ;

$v = \frac{1}{2}, \quad u = \frac{1}{3}$

Ex.18 निम्न समीकरण निकाय को विलोपन विधि (प्रतिस्थापन) से हल करो

$(a + b)\, x + (a - b)\, y = a^2 + b^2$

$(a - b)\, x + (a + b)\, y = a^2 + b^2$

Sol. दी गई समीकरण निकाय है

$(a + b)\, x + (a - b)\, y = a^2 + b^2$ ....(1)

$(a - b)\, x + (a + b)\, y = a^2 + b^2$ ....(2)

समीकरण (2) से,

$(a + b)\, y = a^2 + b^2 - (a - b)\, x$

$\Rightarrow y = \frac{a^2+b^2}{a+b} - \frac{a-b}{a+b}x$ ....(3)

अब $y = \frac{a^2+b^2}{a+b} - \frac{a-b}{a+b}x$ समीकरण (1) में रखने पर,

$(a + b)\, x + (a - b)\left[\frac{a^2+b^2}{a+b} - \frac{a-b}{a+b}x\right] = a^2 + b^2$

$\Rightarrow (a + b)\, x + \frac{(a-b)(a^2+b^2)}{a+b} - \frac{(a-b)^2}{(a+b)}x$

$= a^2 + b^2$

$\Rightarrow (a + b)\, x - \left(\frac{a^2-2ab+b^2}{a+b}\right)x$

$= a^2 + b^2 - \frac{(a-b)(a^2+b^2)}{a+b}$

$\Rightarrow (a + b)\, x - \left(\frac{a^2-2ab+b^2}{a+b}\right)x$

$= (a^2 + b^2)\left[1 - \frac{a-b}{a+b}\right]$

$\Rightarrow \frac{(a^2+2ab+b^2)x - (a^2-2ab+b^2)x}{a+b}$

$= (a^2 + b^2)\left(\frac{a+b-a+b}{a+b}\right)$

$\Rightarrow \frac{4ab}{a+b}x = \frac{(a^2+b^2)2ab}{a+b}$

$\Rightarrow 4abx = 2b\,(a^2 + b^2) \Rightarrow x = \frac{a^2+b^2}{2a}$

अब $x = \frac{a^2+b^2}{2a}$ समीकरण (3) में रखने पर,

$y = \frac{a^2+b^2}{a+b} - \frac{(a-b)}{a+b}\,\frac{(a^2+b^2)}{2a}$

$\Rightarrow y = \frac{(a^2+b^2)}{a+b}\left[1 - \frac{a-b}{2a}\right]$

$= \left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\left(\frac{2a-a+b}{2a}\right)$

$\Rightarrow y = \left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\left(\frac{a+b}{2a}\right)$

$\Rightarrow y = \frac{a^2+b^2}{2a}$

अतः, अभीष्ट हल है

$x = \frac{a^2+b^2}{2a}, \quad y = \frac{a^2+b^2}{2a}$

Ex.19 समीकरण निकाय $2x + 3y = 11$ व $2x - 4y = -24$ का हल ज्ञात कीजिए एवं 'm' का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ है।

Sol. $2x + 3y = 11$ ....(1)

$2x - 4y = -24$ ....(2)

समीकरण (1) से,

$2x = 11 - 3y$

$2x = 11 - 3y$ समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने

$11 - 3y - 4y = -24$

$-7y = -24 - 11$

$\Rightarrow -7y = -35 \Rightarrow y = 5$

$y = 5$ समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$2x + 3 \times 5 = 11$

$2x = 11 - 15$

$\Rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2$

अतः, $x = -2$ एवं $y = 5$

पुनः $x = -2$ व $y = 5$ समीकरण $y = mx + 3$ में रखने पर,

$5x = m(-2) + 3$

$\Rightarrow -2m = 5 - 3$

$\Rightarrow m = \frac{2}{-2} = -1$

➢ गुणांकों की तुलना द्वारा विलोपन करने की विधि

पद I : मानाकि दो समीकरण निम्न हैं

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ....(1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ....(2)

पद II : दी गई समीकरण का गुणन इस प्रकार करें कि विलोपन होने वाले चर का गुणांक समान हो जाये

पद III : पद II से प्राप्त समीकरणों को जोड़ें या घटायें ताकि एक समान गुणांक वाले पद या तो विपरीत चिन्ह या समान चिन्ह के हों।

पद IV : पद III से प्राप्त एक चर वाली समीकरण को हल कीजिए।

पद V : पद IV से प्राप्त मान को दी गई समीकरणों में से किसी भी एक में रखें, तत्पश्चात् दूसरे चर का मान परिकलित कीजिए।

प्रकार I : दो चरों की रेखीय युगपत समीकरण को हल करना

❖ उदाहरण ❖

Ex.20 निम्न रेखीय समीकरण निकाय के गुणांको की तुलना द्वारा विलोपन विधि से हल कीजिए :

(i) $4x - 3y = 4$ (ii) $5x - 6y = 8$

$2x + 4y = 3$ $3x + 2y = 6$

Sol. (i) $4x - 3y = 4$ ....(1)

$2x + 4y = 3$ ....(2)

अब दी गई समीकरण से x का विलोपन कीजिए। चूँकि x का गुणांक 4 व 2 क्रमशः है। हम 4 व 2 का ल॰स॰प॰ ज्ञात करते हैं जो 4 है। अब इन दो समीकरणों में x के गुणांक को 4 बनाइये।

समीकरण (1) को 1 से तथा समीकरण (2) को 2 से गुणा करने पर,

$4x - 3y = 4$ ....(3)

$4x + 8y = 6$ ....(4)

समीकरण (4) को समीकरण (3) से घटाने पर,

$-11y = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{11}$

$y = 2/11$ समीकरण (1) में रखने पर,

$4x - 3 \times \frac{2}{11} = 4$

$\Rightarrow 4x - \frac{6}{11} = 4 \Rightarrow 4x = 4 + \frac{6}{11}$

$\Rightarrow 4x = \frac{50}{11} \Rightarrow x = \frac{50}{44} = \frac{25}{22}$

अतः दी गई समीकरण निकाय का हल है :

$x = \frac{25}{22}, \quad y = \frac{2}{11}$

(ii) $5x - 6y = 8$ ....(1)

$3x + 2y = 6$ ....(2)

दी गई समीकरण निकाय से y का विलोपन करने पर एवं दी गई समीकरण में y का गुणांक क्रमशः 6 व 2 है तथा 6 व 2 का ल॰स॰प॰ 6 है। अब हमें दोनों गुणांकों को 6 के तुल्य बनाना है, इसलिए समीकरण (1) को दोनों पक्षों में 1 से गुणा करें एवं समीकरण (2) को 3 से गुणा करें,

$5x - 6y = 8$ ....(3)

$9x + 6y = 18$ ....(4)

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर,

$$14x = 26 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$

x = 13/7 समीकरण (1) में रखने पर,

$$5 \times \frac{13}{7} - 6y = 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{65}{7} - 6y = 8$$

$$\Rightarrow \; 6y = \frac{65}{7} - 8 = \frac{65-56}{7} = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow \; y = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$$

अतः समीकरण निकाय का हल $x = \frac{13}{7}, y = \frac{3}{14}$ है।

Ex.21 निम्न समीकरण निकाय को गुणांकों की तुलना द्वारा विलोपन विधि प्रयोग से हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{5} + 2 = 10; \; \frac{2x}{7} - \frac{y}{2} + 1 = 9$$

Sol. दी गई समीकरण निकाय है

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{5} + 2 = 10 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{2y}{5} = 8 \quad ...(1)$$

$$\frac{2x}{5} - \frac{y}{2} + 1 = 9 \quad \Rightarrow \frac{2x}{7} - \frac{y}{2} = 8 \quad ....(2)$$

समीकरण (1) को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\frac{5x+4y}{10} = 8 \quad \Rightarrow \quad 5x + 4y = 80 \quad ....(3)$$

इसी तरह, समीकरण (2) को भी निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\frac{4x-7y}{14} = 8 \Rightarrow \; 4x - 7y = 112 \quad ....(4)$$

अब समीकरण निकाय नये रूप में निम्न प्रकार है

$$5x + 4y = 80 \quad ....(5)$$

$$4x - 7y = 112 \quad ....(6)$$

अब समीकरण (5) को 4 से तथा समीकरण (6) को 5 से गुणा करने पर,

$$20x - 16y = 320 \quad ....(7)$$

$$20x + 35y = 560 \quad ....(8)$$

समीकरण (7) को समीकरण (8) से घटाने पर,

$$y = \frac{-240}{51}$$

$y = \frac{-240}{51}$ समीकरण (5) में रखने पर,

$$5x + 4 \times \left(\frac{-240}{51}\right) = 80 \Rightarrow \quad 5x - \frac{960}{51} = 80$$

$$\Rightarrow \; 5x = 80 + \frac{960}{51} = \frac{4080+960}{51} = \frac{5040}{51}$$

$$\Rightarrow \; x = \frac{5040}{255} = \frac{1008}{51} = \frac{336}{17} \; \Rightarrow x = \frac{336}{17}$$

अतः समीकरण निकाय हल $x = \frac{336}{17}, y = \frac{-80}{17}$ हैं।

Ex.22 गुणांको की तुलना द्वारा विलोपन विधि प्रयोग से निम्न रेखीय समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$$3x + 4y = 25 ; \qquad 5x - 6y = -9$$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय है

$$3x + 4y = 25 \quad ....(1)$$

$$5x - 6y = -9 \quad ....(2)$$

अब हमें y का विलोपन करना है और चूँकि y के गुणांक 4 व – 6 हैं एवं 4 व 6 का ल॰स॰प॰ 12 है।

अब, हम y का गुणांक 12 व – 12 बनाऐंगे।

समीकरण (1) को 3 से तथा समीकरण (2) को 2 से गुणा करने पर,

$$9x + 12y = 75 \quad ....(3)$$

$$10x - 12y = -18 \quad ....(4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर,

$$19x = 57 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

x = 3 समीकरण (1) में रखने पर,

$$3 \times 3 + 4y = 25$$

$$\Rightarrow \; 4y = 25 - 9 = 16 \; \Rightarrow \; y = 4$$

अतः, अभीष्ट हल है x = 3, y = 4.

सत्यापन (Verification) : दोनों समीकरण x = 3 व y = 4 से संतुष्ट होती है, जो दर्शाते हैं कि हल सही है।

Ex.23 निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$15x + 4y = 61;\ 4x + 15y = 72$$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय है

$$15x + 4y = 61 \quad ....(1)$$

$$4x + 15y = 72 \quad ....(2)$$

अब हम y का विलोपन करेंगे, यहाँ y के गुणांक 4 व 15 हैं, अब 4 व 15 का ल॰स॰प॰ 60 आता है इसलिए y के गुणांक 60 बनाइये एवं समीकरण (1) को 15 से तथा (2) को 4 से गुणा करने पर,

$$225x + 60y = 915 \quad ....(3)$$

$$16x + 60y = 288 \quad ....(4)$$

समीकरण (4) को समीकरण (3) से घटाने पर,

$$209x = 627 \qquad \Rightarrow\ x = \frac{627}{209} = 3$$

x = 3 समीकरण (1) में रखने पर,

$$15 \times 3 + 4y = 61 \Rightarrow\ 45 + 4y = 61$$

$$\Rightarrow\ 4y = 61 - 45 = 16 \qquad \Rightarrow\ y = \frac{16}{4} = 4$$

अतः, अभीष्ट हल x = 3, y = 4 है।

सत्यापन (Verification) : x = 3 व y = 4 दिये गये समीकरणों में रखने पर ये संतुष्ट होता हैं, अतः हल सही हैं।

Ex.24 गुणांकों की तुलना द्वारा विलोपन विधि से निम्न रेखीय समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\,y = \sqrt{3}\ ;\ \sqrt{5}\,x + \sqrt{3}\,y = \sqrt{2}$$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय है

$$\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\,y = \sqrt{3} \quad ....(1)$$

$$\sqrt{5}\,x + \sqrt{3}\,y = \sqrt{2} \quad ....(2)$$

अब हमें y का विलोपन करना है, गुणांकों को एक समान बनाने हेतु हम समीकरण (1) को $\sqrt{3}$ से तथा (2) को $\sqrt{2}$ से गुणा करेंगे

$$3x - \sqrt{6}\,y = 3 \quad ....(3)$$

$$\sqrt{10}\,x + \sqrt{6}\,y = 2 \quad ....(4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर,

$$3x + \sqrt{10}\,x = 5\ \Rightarrow\ (3 + \sqrt{10})\,x = 5$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{5}{3+\sqrt{10}} = \left(\frac{5}{\sqrt{10}+3}\right) \times \left(\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}-3}\right)$$

$$= \frac{5(\sqrt{10}-3)}{10-9} = 5(-3)$$

x = 5($\sqrt{10}$ – 3) समीकरण (1) में रखने

$$\sqrt{3} \times 5(\sqrt{10} - 3) - \sqrt{2}\,y = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\ 5\sqrt{30} - 15\sqrt{3} - \sqrt{2}\,y = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2}\,y = 5\sqrt{30} - 15\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2}\,y = 5\sqrt{30} - 16\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{5\sqrt{30}}{\sqrt{2}} - \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{15} - 8\sqrt{6}$$

अतः, अभीष्ट हल x = 5 ($\sqrt{10}$ – 3) तथा y = 5$\sqrt{15}$ – 8$\sqrt{6}$ है।

सत्यापन (Verification) : जाँचने के पश्चात्, हमें सही हल प्राप्त हुये हैं।

Ex.25 x व y के लिए निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a + b\ ;\ ax - by = 2ab$$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय है

$$\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a + b \quad ....(1)$$

$$ax - by = 2ab \quad ....(2)$$

समीकरण (2) को a से विभाजित करने पर,

$$x - \frac{by}{a} = 2b \quad ....(3)$$

समीकरण (3) को समीकरण (1) से घटाने पर,

$$\frac{ax}{b} - x = a - b \quad \Rightarrow\ x\left(\frac{a}{b} - 1\right) = a - b$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{(a-b)b}{a-b} = b\ \Rightarrow\ x = b$$

x का मान (3) में रखने पर, हम पाते हैं कि

$$b - \frac{by}{a} = 2b \qquad \Rightarrow\ b\left(1 - \frac{y}{a}\right) = 2b$$

$\Rightarrow\ 1 - \frac{y}{a} = 2 \qquad \Rightarrow\ \frac{y}{a} = 1 - 2$

$\Rightarrow\ \frac{y}{a} = -1 \qquad \Rightarrow\ y = -a$

अत:, समीकरण का हल है

$x = b, \quad y = -a$

Ex.26 निम्न रेखीय समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$2(ax - by) + (a + 4b) = 0$

$2(bx + ay) + (b - 4a) = 0$

Sol. $2ax - 2by + a + 4b = 0 \quad .... (1)$

$2bx + 2ay + b - 4a = 0 \quad .... (2)$

समीकरण (1) को b से तथा (2) को a से गुणाकर, घटाने पर,

$2(b^2 + a^2)\, y = 4\,(a^2 + b^2) \ \Rightarrow y = 2$

समीकरण (1) को a से तथा (2) को b से गुणाकर, घटाने पर,

$2(a^2 + b^2)\, x + a^2 + b^2 = 0$

$\Rightarrow\ 2(a^2 + b^2)\, x = -(a^2 + b^2) \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2}$

अत: $x = -1/2$, एवं $y = 2$

Ex.27 हल कीजिए $(a - b)\, x + (a + b)\, y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)\,(x + y) = a^2 + b^2$

Sol. दी गई समीकरण निकाय है

$(a - b)\, x + (a + b)\, y = a^2 - 2ab - b^2 \quad ....(1)$

$(a + b)\,(x + y) = a^2 + b^2 \quad ....(2)$

$\Rightarrow\ (a + b)\, x + (a + b)\, y = a^2 + b^2 \quad ....(3)$

समीकरण (3) को समीकरण (1) से घटाने पर,

$(a - b)\, x - (a + b)\, x = (a^2 - 2ab - b^2) - (a^2 + b^2)$

$\Rightarrow\ -2bx = -2ab - 2b^2$

$\Rightarrow\ x = \frac{-2ab}{-2b} - \frac{2b^2}{-2b} = a + b$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$(a - b)\,(a + b) + (a + b)\, y = a^2 - 2ab - b^2$

$\Rightarrow\ (a + b)\, y = a^2 - 2ab - b^2 - (a^2 - b^2)$

$\Rightarrow\ (a + b)\, y = -2ab \ \Rightarrow\ y = \frac{-2ab}{a + b}$

$\Rightarrow$ अत:, अभीष्ट हल $x = a + b$,

$y = \frac{-2ab}{a + b}$ है

प्रकार II : उस समीकरण निकाय को हल करना जिसको रेखीय समीकरणों के युगपत निकाय में परिवर्त किया जा सकता हो

❖ उदाहरण ❖

Ex.28 निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए

$\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1; \ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8$

Sol. $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1 \quad ....(1)$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8 \quad ....(2)$

मानलो कि $1/x = u$ व $1/y = v$ हैं

अब $1/x = u$ व $1/y = v$ उपरोक्त समीकरणों में रखने पर,

$\frac{u}{2} - v = -1 \quad ....(3)$

$u + \frac{v}{2} = 8 \quad ....(4)$

अब हम v को समीकरण निकाय से विलोपित करेंगे इस हेतु हम समीकरण (3) को 1/2 से तथा समीकरण (4) को 1 से गुणा करते है, तब

$\frac{u}{4} - \frac{v}{2} = -\frac{1}{2} \quad ....(5)$

$u + \frac{v}{2} = 8 \quad ....(6)$

समीकरण (5) व (6) का जोड़ने पर,

$\frac{u}{4} + u = \frac{-1}{2} + 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{5u}{4} = \frac{15}{2}$

$\Rightarrow\ u = \frac{15}{2} \times \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad u = 6$

$\because\ \frac{1}{x} = u \Rightarrow \frac{1}{x} = 6 \quad \Rightarrow\ x = \frac{1}{x}$

1/x = 6 समीकरण (2) में रखने पर,

$$6 + \frac{1}{2y} = 8 \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{2y} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = 4 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}$$

अतः, निकाय का अभीष्ट हल है,

$$x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{4}$$

Ex.29 हल कीजिए,

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \; ; \; \frac{3}{x} + \frac{2}{3y} = 2$$

एवं 'a' का मान भी ज्ञात कीजिए जिसके लिये $y = ax - 2$ है।

Sol. मानाकि 1/x = u व 1/y = v हो, तब दिया गया समीकरण निकाय

$$2u + \frac{v}{3} = \frac{1}{5} \qquad \Rightarrow \quad \frac{6u + v}{3} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 30u + 5v = 3 \qquad ....(1)$$

$$3u + \frac{2v}{3} = 2 \Rightarrow 9u + 2v = 6 \qquad ....(2)$$

अब समीकरण (1) को 2 से तथा (2) को 5 से गुणा करने पर,

$$60u + 10v = 6 \qquad ....(3)$$

$$45u + 10v = 30 \qquad ....(4)$$

समीकरण (4) को समीकरण (3) से घटाने पर,

$$15u = -24 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-24}{15} = \frac{-8}{5}$$

$u = \frac{-8}{5}$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$9 \times \left(\frac{-8}{5}\right) + 2v = 6 \Rightarrow \frac{-72}{5} + 2v = 6$$

$$\Rightarrow \quad 2v = 6 + \frac{72}{5} = \frac{102}{5}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{102}{2 \times 5} = \frac{51}{5}$$

यहाँ $\frac{1}{x} = u = -\frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{5}{8}$

एवं, $\frac{1}{y} = v = \frac{51}{5} \Rightarrow \quad y = \frac{5}{51}$

$x = \frac{-5}{8}$ व $y = \frac{5}{51}$ समीकरण $y = ax - 2$ में रखने पर,

$$\frac{5}{51} = \frac{-5a}{8} - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5a}{8} = -2 - \frac{5}{51} = \frac{-102 - 5}{51} = \frac{-107}{51}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{-107}{51} \times \frac{8}{5} = \frac{-856}{255} \Rightarrow a = \frac{-856}{255}$$

Ex.30 हल कीजिए,

$$\frac{2}{x + 2y} + \frac{6}{2x - y} = 4$$

$$\frac{5}{2(x + 2y)} + \frac{1}{3(2x - y)} = 1$$

जहाँ, $x + 2y \neq 0$ एवं $2x - y \neq 0$

Sol. $\frac{1}{x + 2y} = u$ व $\frac{1}{2x - y} = v$ उपरोक्त समीकरण निकाय में रखने पर

$$2u + 6v = 4 \qquad ....(1)$$

$$\frac{5u}{2} + \frac{v}{3} = 1 \qquad ....(2)$$

समीकरण (2) को 18 से गुणा करने पर,

$$45u + 6v = 18 \qquad ....(3)$$

अब, समीकरण (3) को समीकरण (1) में से घटाने पर,

$$-43u = -14 \qquad \Rightarrow \quad u = \frac{14}{43}$$

u = 14/43 समीकरण (1) में रखने पर,

$$2 \times \frac{14}{43} + 6v = 4$$

$$\Rightarrow \quad 6v = 4 - \frac{28}{43} = \frac{172 - 28}{43} \Rightarrow v = \frac{144}{43}$$

अब, $u = \frac{14}{43} = \frac{1}{x + 2y}$

$$\Rightarrow \quad 14x + 28y = 43 \qquad ....(4)$$

एवं, $v = \frac{144}{43} = \frac{1}{2x - y}$

$\Rightarrow$ $288x - 144y = 43$ ....(5)

समीकरण (4) को 288 से तथा (5) को 14 से गुणा करने पर, समीकरण निकाय निम्न हो जाता है

$288 \times 14x + 28y \times 288 = 43 \times 288$

$288x \times 14 - 144y \times 14 = 43 \times 4$

$\Rightarrow$ $4022x + 8064y = 12384$ ....(6)

$4022x - 2016y = 602$ ....(7)

समीकरण (7) को समीकरण (6) में से घटाने पर,

$10080y = 11782 \Rightarrow y = 1.6$(लगभग)

अब, समीकरण (4) में 1.6 रखने पर,

$14x + 28 \times 1.6 = 63$

$\Rightarrow$ $14x + 44.8 = 63$ $\Rightarrow$ $14x = 18.2$

$\Rightarrow$ $x = \frac{18.2}{14} = 1.3$ (लगभग)

इस प्रकार, दी गई समीकरण निकाय का अभीष्ट हल x = 1.3 (लगभग), y = 1.6 (लगभग).

Ex.31 हल कीजिए,

$$\frac{1}{x + y} + \frac{2}{x - y} = 2$$

$$\frac{2}{x + y} - \frac{1}{x - y} = 3$$

जहाँ $x + y \neq 0$ एवं $x - y \neq 0$

Sol. $\frac{1}{x + y} = u$ एवं $\frac{1}{x - y} = v$ उपरोक्त समीकरण निकाय में रखने पर

$u + 2v = 2$ ....(1)

$2u - v = 3$ ....(2)

समीकरण (1) को 2 से, तथा (2) को 1 से गुणा करने पर,

$2u + 4v = 4$ ....(3)

$2u - v = 3$ ....(4)

समीकरण (4) को समीकरण (3) से घटाने पर,

$5v = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{5}$

v = 1/5 समीकरण (1) में रखने पर,

$u + 2 \times \frac{1}{5} = 2 \Rightarrow u = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$

यहाँ, $u = \frac{8}{5} = \frac{1}{x + y} \Rightarrow 8x + 8y = 5$ ....(5)

एवं, $v = \frac{1}{5} = \frac{1}{x - y} \Rightarrow x - y = 5$ ....(6)

समीकरण (5) को 1 से तथा (6) को 8 से गुणा करने पर,

$8x + 8y = 5$ ....(7)

$8x - 8y = 40$ ....(8)

समीकरण (7) व (8) को जोड़ने पर,

$16x = 45 \Rightarrow x = \frac{45}{16}$

अब, x का उपरोक्त मान समीकरण (6) में रखने पर,

$\frac{45}{16} - y = 5 \Rightarrow y = \frac{45}{16} - 5 = \frac{-35}{16}$

अतः, दी गई समीकरण निकाय का हल है ;

$x = \frac{45}{16}$, $y = \frac{-35}{16}$

प्रकार -III : जब समीकरण, ax + by = c एवं bx + ay = d जहाँ a ≠ b रूप में हों

उपरोक्त प्रकार की समीकरणों को हल करने हेतु निम्न विधि का प्रयोग किया जाता है।

प्रक्रिया पद :

पद I : समीकरणों को निम्न रूप में लिखते हैं

$ax + by = c$

$bx + ay = d$

पद II : उपरोक्त प्रकार की दोनों समीकरणों को जोड़ने तथा घटाने पर, हम पाते हैं कि :

$(a + b) x + (a + b) y = c + d$

$\Rightarrow$ $x + y = \frac{c + d}{a + b}$ ....(1)

$(a - b) x - (a - b)y = c - d$

$\Rightarrow$ $x - y = \frac{c - d}{a - b}$ ....(2)

पद III : समीकरण (1) व (2) को जोड़ने या घटाने के पश्चात् हम x व y के मान प्राप्त करते हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.32 निम्न समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए

$156x + 112y = 580;\ 112x + 156y = 492$

Sol. दी गई समीकरण निकाय है

$156x + 112y = 580$ ....(1)

$112x + 156y = 492$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$268x + 268y = 1072$

$\Rightarrow\ 268(x + y) = 1072$

$\Rightarrow\ x + y = 4$ ....(3)

समीकरण (2) को समीकरण (1) से घटाने पर,

$44x - 44y = 88$

$x - y = 2$ ....(4)

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर,

$2x = 6 \ \Rightarrow\ x = 3$

x = 3 समीकरण (3) में रखने पर,

$y = 1$

अतः, समीकरण निकाय का अभीष्ट हल

$x = 3, y = 1$

Ex.33 निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए।

$43x + 35y = 207; 35x + 43y = 183$

Sol. दी गई समीकरण निकाय है ;

$43x + 35y = 207$ ....(1)

$35x + 43y = 183$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$78x + 78y = 390 \Rightarrow 78(x + y) = 390$

$\Rightarrow\ x + y = 5$ ....(3)

समीकरण (2) को (1) से घटाने पर,

$8x - 8y = 24$

$\Rightarrow\ x - y = 3$ ....(4)

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर,

$2x = 8 \ \Rightarrow\ x = 4$

x = 4 समीकरण (3) में रखने पर,

$4 + y = 5 \Rightarrow y = 1$

अतः, समीकरण निकाय का अभीष्ट हल है ; x = 4, y = 1.

प्रकार IV : जब समीकरण निम्न रूप में हों,

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

उपरोक्त प्रकार की समीकरण को हल करने हेतु निम्न विधि काम में लेते हैं।

प्रक्रिया में निहित पद :

पद I : दी गई तीन समीकरणों में से कोई एक समीकरण का चयन करें।

पद II : कोई एक चर, मान लो z का मान इस समीकरण से ज्ञात करें।

पद III : z का मान जो पद II से मिला है को अन्य दो समीकरणों में प्रतिस्थापित कीजिए फिर हमें x, y में दो रेखीय समीकरण मिलेंगी।

पद IV : विलोपन विधि सें, समीकरण जो x, y में हमें पद III से मिली हैं, को हल कीजिए।

पद V : x, y के मान जो पद IV व पद II से मिले हैं, के प्रतिस्थापन से z का मान ज्ञात कीजिए।

❖ उदाहरण ❖

Ex.34 निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$x - z = 5$

$y + z = 3$

$x - y = 2$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय ;

$x - z = 5$ ....(1)

$y + z = 3$ ....(2)

$x - y = 2$ .....(3)

समीकरण (1) से,

$z = x - 5$

z = x – 5 समीकरण (2) में रखने पर,

$y + x - 5 = 3$

$\Rightarrow\ x + y = 8$ ....(4)

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर,

$2x = 10 \Rightarrow x = 5$

पुनः x = 5 समीकरण (1) में रखने पर,

$5 - z = 5 \Rightarrow z = 0$

अतः, दिये गये समीकरण निकाय का अभीष्ट हल $x = 5, y = 3, z = 0$

अन्य विधि : तीनों समी. को जोड़ने पर

$2x = 10 \Rightarrow x = 5$

x का मान समी. (1) व (3) मे रखने पर

$z = 0, y = 3$ (क्रमशः)

अतः $x = 5, y = 3, z = 0$

Ex.35 निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$x + 2y + z = 12$$
$$2x - z = 4$$
$$x - 2y = 4$$

Sol. हम जानते हैं कि,

$$x + 2y + z = 12 \quad ....(1)$$
$$2x - z = 4 \quad ....(2)$$
$$x - 2y = 4 \quad ....(3)$$

समीकरण (1) से, हम जानते है कि $z = 12 - x - 2y$

$z = 12 - x - 2y$ समीकरण (2) में रखने पर, हम पाते हैं कि;

$$2x - (12 - x - 2y) = 4$$
$$\Rightarrow 2x - 12 + x + 2y = 4$$
$$\Rightarrow 3x + 2y = 16 \quad ....(4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि;

$$4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

$x = 5$ समीकरण (2) में रखने पर, हम पाते हैं कि

$$2 \times 5 - z = 4 \Rightarrow z = 10 - 4 = 6$$

पुनः $x = 5$ समीकरण (3) में रखने पर, हम पाते हैं कि

$$5 - 2y = 4 \Rightarrow y = 1/2$$

अतः, समीकरण निकाय का अभीष्ट हल ;

$$x = 5, y = 1/2, z = 6$$

➤ वज्र – गुणन विधि

प्रतिस्थापन द्वारा विलोपन विधि से हम केवल उन समीकरणों को हल कर सकते हैं, जिनका अद्वितीय हल होता है। परन्तु वज्र-गुणन विधि से जो नीचे समझाई गई है, यह सभी स्थितियों में लागू होती है जैसे निकाय के अद्वितीय हल में, कोई हल नहीं में, या अनन्त हल वाली स्थितियों में से कोई भी स्थिति हो।

निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad ....(1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad ....(2)$$

समीकरण (1) को b_2 से तथा (2) को b_1 से गुणा करने पर,

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \quad ....(3)$$
$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad ....(4)$$

समीकरण (4) को (3) में से घटाने पर,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\left[\begin{matrix} a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \\ \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \end{matrix}\right]$$

इसी प्रकार, $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

x तथा y के ये मान निम्न प्रकार से लिखे जा सकते हैं

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{-y}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

❖ उदाहरण ❖

Ex.36 निम्न समीकरण निकाय को वज्र-गुणन विधि से हल कीजिए

$$2x + 3y + 8 = 0$$
$$4x + 5y + 14 = 0$$

Sol. दी गई समीकरण निकाय है

$$2x + 3y + 8 = 0$$
$$4x + 5y + 14 = 0$$

वज्र-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{matrix}3 \times 8\\ 5 \times 14\end{matrix}} = \frac{-y}{\begin{matrix}2 \times 8\\ 4 \times 14\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}2 \times 3\\ 4 \times 5\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3\times14 - 5\times8} = \frac{-y}{2\times14 - 4\times8} = \frac{1}{2\times5 - 4\times3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{42 - 40} = \frac{-y}{28 - 32} = \frac{1}{10 - 12}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{-y}{-4} = \frac{1}{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$$

एवं $\frac{-y}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -2.$

अतः, अभीष्ट हल $x = -1, y = -2$

हम इस हल का सत्यापन कर सकते हैं।

Ex.37 वज्र-गुणन विधि से निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए

$2x - 6y + 10 = 0$

$3x - 7y + 13 = 0$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय है

$2x - 6y + 10 = 0$ ....(1)

$3x - 7y + 13 = 0$ ....(2)

अब, वज्र-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{matrix}-6 & 10\\ -7 & 13\end{matrix}} = \frac{-y}{\begin{matrix}2 & 10\\ 3 & 13\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}2 & -6\\ 3 & -7\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-6\times13-(-7)\times10} = \frac{-y}{2\times13-3\times10} = \frac{1}{2\times(-7)-3\times(-6)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-78+70} = \frac{-y}{26-30} = \frac{1}{-14+18}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-8} = \frac{-y}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-8} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow \frac{-y}{-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 1$$

अतः, अभीष्ट हल $x = -2, y = 1$ है।

Ex.38 वज्र-गुणन विधि से निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए।

$11x + 15y = -23; 7x - 2y = 20$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय है

$11x + 15y + 23 = 0$

$7x - 2y - 20 = 0$

अब, वज्र-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{matrix}15 & 23\\ -2 & -20\end{matrix}} = \frac{-y}{\begin{matrix}11 & 23\\ 7 & -20\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}11 & 15\\ 7 & -2\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15\times(-20)-(-2)\times23} = \frac{-y}{11\times(-20)-7\times23} = \frac{1}{11\times(-2)-7\times15}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-300+46} = \frac{-y}{-220-161} = \frac{1}{-22-105}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-254} = \frac{-y}{-381} = \frac{1}{-127}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-254} = \frac{1}{-127} \Rightarrow x = 2$$

एवं $\frac{-y}{-381} = \frac{1}{-127} \Rightarrow y = -3$

अतः अभीष्ट हल $x = 2, y = -3$ है।

Ex.39 वज्र-गुणन विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए

$ax + by = a - b; bx - ay = a + b$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को हम पुनः निम्न प्रकार से लिखते हैं,

$ax + by - (a - b) = 0$

$bx - ay - (a + b) = 0$

वज्र-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{matrix}b & -(a-b)\\ -a & -(a+b)\end{matrix}} = \frac{-y}{\begin{matrix}a & -(a-b)\\ b & -(a+b)\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}a & b\\ b & -a\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{b\times\{-(a+b)\}-(-a)\times\{-(a-b)\}} = \frac{-y}{-a(a+b)+b(a-b)} = \frac{1}{-a^2-b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-ab-b^2-a^2+ab} = \frac{-y}{-a^2-ab+ab-b^2} = \frac{1}{-(a^2+b^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-(a^2+b^2)} = \frac{-y}{-(a^2+b^2)} = \frac{1}{-(a^2+b^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-(a^2+b^2)} = \frac{1}{-(a^2+b^2)} \Rightarrow x = 1$$

एवं $\frac{-y}{-(a^2+b^2)} = \frac{1}{-(a^2+b^2)} \Rightarrow y = -1$

अतः, अभीष्ट हल $x = 1, y = -1$ है।

Ex.40 वज्र-गुणन विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$x + y = a - b;\ ax - by = a^2 + b^2$$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को निम्न प्रकार लिखने पर :

$$x + y - (a - b) = 0$$

$$ax - by - (a^2 + b^2) = 0$$

वज्र-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{array}{cc}1 & -(a-b)\\ -b & -(a^2+b^2)\end{array}} = \frac{-y}{\begin{array}{cc}1 & -(a-b)\\ a & -(a^2+b^2)\end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc}1 & 1\\ a & -b\end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-(a^2+b^2)-(-b)\times\{-(a-b)\}} = \frac{-y}{-(a^2+b^2)-a\times\{-(a-b)\}}$$

$$= \frac{1}{-b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-(a^2+b^2)-b(a-b)} = \frac{-y}{-(a^2+b^2)+a(a-b)} = \frac{1}{-(b+a)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-a^2-b^2-ab+b^2} = \frac{-y}{-a^2-b^2+a^2-ab} = \frac{1}{-(a+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-a(a+b)} = \frac{-y}{-b(a+b)} = \frac{1}{-(a+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-a(a+b)} = \frac{1}{-(a+b)} \Rightarrow x = a$$

एवं $\frac{-y}{-b(a+b)} = \frac{1}{-(a+b)} \Rightarrow y = -b$

अतः, अभीष्ट हल $x = a,\ y = -b$ है।

Ex.41 वज्र-गुणन विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2$$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय निम्न प्रकार से लिखा जाता है :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - (a + b) = 0 \qquad ....(1)$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} - 2 = 0 \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) को ab से गुणा करने पर,

$$bx + ay - ab\,(a + b) = 0 \qquad ....(3)$$

समीकरण (2) को $a^2\,b^2$ से गुणा करने पर,

$$b^2x + a^2y - 2a^2b^2 = 0 \qquad ....(4)$$

वज्र-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{array}{cc}a & -ab(a+b)\\ a^2 & -2a^2b^2\end{array}} = \frac{-y}{\begin{array}{cc}b & -ab(a+b)\\ b^2 & -2a^2b^2\end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc}b & a\\ b^2 & a^2\end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2a^3b^2+a^3b(a+b)} = \frac{-y}{-2a^2b^3+ab^3(a+b)} = \frac{1}{a^2b-ab^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2a^3b^2+a^4b+a^3b^2} = \frac{-y}{-2a^2b^3+a^2b^3+ab^4} = \frac{1}{ab(a-b)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a^4b-a^3b^2} = \frac{-y}{ab^4-a^2b^3} = \frac{1}{ab(a-b)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a^3b(a-b)} = \frac{y}{ab^3(a-b)} = \frac{1}{ab(a-b)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a^3b(a-b)} = \frac{1}{ab(a-b)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a^3b(a-b)}{ab(a-b)} = a^2$$

एवं $\frac{y}{ab^3(a-b)} = \frac{1}{ab(a-b)}$

$$\Rightarrow \frac{ab^3(a-b)}{ab(a-b)} = b^2$$

अतः, अभीष्ट हल $x = a^2,\ y = b^2$

Ex.42 वज्र-गुणन विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए -

$$ax + by = 1;\ bx + ay = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - 1$$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$ax + by - 1 = 0 \qquad ....(1)$$

$$bx + ay = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - 1$$

$$\Rightarrow \; bx + ay = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \; bx + ay = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \; bx + ay - \frac{2ab}{a^2 + b^2} = 0 \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) व (2) को पुनः लिखने पर,

$$ax + by - 1 = 0$$

$$bx + ay - \frac{2ab}{a^2 + b^2} = 0$$

अब, वज्र-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{matrix} b & \times & -1 \\ a & & -\frac{2ab}{a^2+b^2} \end{matrix}} = \frac{-y}{\begin{matrix} a & \times & -1 \\ b & & -\frac{2ab}{a^2+b^2} \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a & \times & b \\ b & & a \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{b \times \left(\frac{-2ab}{a^2+b^2}\right) - a \times (-1)} = \frac{-y}{a \times \left(\frac{-2ab}{a^2+b^2}\right) - b \times (-1)}$$

$$= \frac{1}{a \times a - b \times b}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{-\frac{2ab^2}{a^2+b^2} + a} = \frac{-y}{\frac{-2a^2b}{a^2+b^2} + b} = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{\frac{-2ab^2 + a^3 + ab^2}{a^2+b^2}} = \frac{-y}{\frac{-2a^2b + a^2b + b^3}{a^2+b^2}} = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}} = \frac{-y}{\frac{b(b^2-a^2)}{a^2+b^2}} = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}} = \frac{1}{a^2-b^2} \Rightarrow x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

एवं $\dfrac{-y}{\frac{b(b^2-a^2)}{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{a^2-b^2} \Rightarrow y = \dfrac{b}{a^2+b^2}$

अतः, अभीष्ट हल $x = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $y = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ है।

Ex.43 वज्र-गुणन विधि से x व y में दी गई समीकरण निकाय को हल कीजिए

$(a - b)\,x + (a + b)\,y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

Sol. दी गई समीकरण निकाय को पुनः लिखने पर :

$(a - b)\,x + (a + b)\,y - (a^2 - 2ab - b^2) = 0$

$(a + b)\,x + (a + b)\,y - (a^2 + b^2) = 0$

वज्र-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{matrix} (a+b) & \times & -(a^2-2ab-b^2) \\ (a+b) & & -(a^2+b^2) \end{matrix}} = \frac{-y}{\begin{matrix} (a-b) & \times & -(a^2-2ab-b^2) \\ (a+b) & & -(a^2+b^2) \end{matrix}}$$

$$= \frac{1}{\begin{matrix} (a-b) & \times & (a+b) \\ (a+b) & & (a+b) \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{(a+b) \times \{-(a^2+b^2)\} - (a+b) \times \{-(a^2-2ab-b^2)\}}$$

$$= \frac{-y}{(a-b) \times \{-(a^2+b^2)\} - (a+b) \times \{-(a^2-2ab-b^2)\}}$$

$$= \frac{1}{(a-b) \times (a+b) - (a+b) \times (a+b)}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{-(a+b)(a^2+b^2) + (a+b)(a^2-2ab-b^2)}$$

$$= \frac{-y}{-(a-b)(a^2+b^2) + (a+b)(a^2-2ab-b^2)}$$

$$= \frac{1}{(a-b)(a+b) - (a+b)^2}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{(a+b)[-(a^2+b^2) + (a+b)(a^2-2ab-b^2)]}$$

$$= \frac{-y}{(a+b)(a^2-2ab-b^2) - (a-b)(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{1}{(a+b)(a-b-a-b)}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{(a+b)(-2ab-2b^2)}$$

$$= \frac{-y}{a^3 - a^2b - 3ab^2 - b^3 - a^3 - ab^2 + a^2b + b^3}$$

$$= \frac{1}{(a+b)(-2b)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-(a+b)(2a+2b)b} = \frac{-y}{-4ab^2} = \frac{1}{-2b(a+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2(a+b)(a+b)b} = \frac{1}{-2b(a+b)}$$

$$\Rightarrow x = a + b$$

एवं $\frac{-y}{-4ab^2} = \frac{1}{-2b(a+b)} \Rightarrow y = -\frac{2ab}{a+b}$

अतः समीकरण निकाय का हल $x = a + b$, $y = -\frac{2ab}{a+b}$ है।

Ex.44 वज्र-गुणन विधि से, निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$a(x + y) + b(x - y) = a^2 - ab + b^2$$
$$a(x + y) - b(x - y) = a^2 + ab + b^2$$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को पुनः लिखने पर

$ax + bx + ay - by - (a^2 - ab + b^2) = 0$

$\Rightarrow (a + b)x + (a - b)y - (a^2 - ab + b^2) = 0$ ....(1)

व $ax - bx + ay + by - (a^2 + ab + b^2) = 0$

$\Rightarrow (a - b)x + (a + b)y - (a^2 + ab + b^2) = 0$ ...(2)

अब, वज्र-गुणन विधि से, हम जानते है कि

$$\frac{x}{\begin{matrix}(a-b) & -(a^2-ab+b^2)\\ (a+b) & -(a^2+ab+b^2)\end{matrix}} = \frac{-y}{\begin{matrix}(a+b) & -(a^2-ab+b^2)\\ (a-b) & -(a^2+ab+b^2)\end{matrix}}$$

$$= \frac{1}{\begin{matrix}(a+b) & (a-b)\\ (a-b) & (a+b)\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(a-b)\times\{-(a^2+ab+b^2)\} - (a+b)\times\{-(a^2-ab+b^2)\}}$$

$$= \frac{-y}{(a+b)\times\{-(a^2+ab+b^2)\} - (a-b)\times\{-(a^2-ab+b^2)\}}$$

$$= \frac{1}{(a+b)\times(a+b) - (a-b)(a-b)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-(a-b)(a^2+ab+b^2) + (a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$= \frac{-y}{-(a+b)(a^2+ab+b^2) + (a-b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$= \frac{1}{(a+b)^2 - (a-b)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-(a^3-b^3) + (a^3+b^2)}$$

$$= \frac{-y}{-a^3 - 2a^2b - 2ab^2 - b^3 + a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3}$$

$$= \frac{1}{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2b^3} = \frac{-y}{-4a^2b - 2b^3} = \frac{1}{4ab}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2b^3} = \frac{-y}{-2b(2a^2+b^2)} = \frac{1}{4ab}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2b^3} = \frac{1}{4ab} \Rightarrow x = \frac{b^2}{2a}$$

एवं $\frac{-y}{-2b(2a^2+b^2)} = \frac{1}{4ab} \Rightarrow y = \frac{2a^2+b^2}{2a}$

अतः, अभीष्ट हल $x = \frac{b^2}{2a}$, $y = \frac{2a^2+b^2}{2a}$ है।

Ex.45 वज्र-गुणन विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = 0 \; ; \; \frac{ab^2}{x} + \frac{a^2b}{y} = a^2 + b^2 \; ;$$

जहाँ $x \neq 0, y \neq 0$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय है

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = 0 \quad ....(1)$$

$$\frac{ab^2}{x} + \frac{a^2b}{y} - (a^2 + b^2) = 0 \quad ....(2)$$

$\frac{a}{x} = u$ एवं $\frac{b}{y} = v$ समीकरण (1) में व (2) में रखने पर समीकरण निकाय निम्न रूप में परिवर्त हो जाता है।

$$u - v + 0 = 0$$

$$b^2u + a^2v - (a^2 + b^2) = 0$$

वज्र-गुजन विधि से,

$$\frac{u}{\begin{matrix}-1 & 0\\ a^2 & -(a^2+b^2)\end{matrix}} = \frac{-v}{\begin{matrix}1 & 0\\ b^2 & -(a^2+b^2)\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}1 & -1\\ b^2 & a^2\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{a^2+b^2-a^2\times 0} = \frac{-v}{-(a^2+b^2)-b^2\times 0} = \frac{1}{a^2-(-b^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{a^2+b^2} = \frac{-v}{-(a^2+b^2)} = \frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{a^2+b^2} = \frac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow u = 1$$

एवं $\frac{-v}{-(a^2+b^2)} = \frac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow v = 1$

एवं $u = \frac{a}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = a$

$v = \frac{b}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = b$

अतः दिये गये समीकरण निकाय का हल है $x = a$, $y = b$.

समीकरण निकाय निम्न है

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ....(1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ....(2)

(a) यह संगत निकाय है यदि इसका अद्वितीय हल विद्यमान हो, यदि

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

यह प्रदर्शित करता है कि समीकरण (1) व (2) द्वारा निरूपित रेखाऐं समान्तर नहीं है।

(b) यह निकाय संगत है एवं इसके अनन्त हल होंगे, यदि

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

यह दर्शाता है कि समीकरण (1) व (2) द्वारा निरूपित रेखाऐं संपाती है।

(c) यह असंगत निकाय है, यदि

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

यह दर्शाता है कि समीकरण (1) व (2) द्वारा निरूपित रेखाऐं समान्तर हैं तथा संपाती नहीं है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.46 प्रदर्शित करो कि निम्न समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है।

$$2x - 3y = 6; \; x + y = 1.$$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को लिखा जा सकता है

$$2x - 3y - 6 = 0$$
$$x + y - 1 = 0$$

दी गई समीकरण निम्न रूप में है

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ, $a_1 = 2, \; b_1 = -3, c_1 = -6$

एवं $a_2 = 1, \; b_2 = 1, c_2 = -1$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1} = 2, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{1} = 3$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-6}{-1} = 6$$

स्पष्टतः, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अतः दी गई समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है अर्थात् यह संगत है।

Ex.47 प्रदर्शित करो कि निम्न समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है :

$x - 2y = 2 ; 4x - 2y = 5$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से लिखने पर

$$x - 2y - 2 = 0$$
$$4x - 2y - 5 = 0$$

दी गई समीकरण निम्न रूप में है

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ, $a_1 = 1, \quad b_1 = -2, \; c_1 = -2$

एवं $a_2 = 4, \quad b_2 = -2, \; c_2 = -5$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{4}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-2} = 1, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

स्पष्टतः, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अतः दी गई समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है अर्थात् यह संगत है।

Ex.48 k के किस मान के लिए, निम्न समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है :

$x - ky = 2 ; 3x + 2y = -5$

Sol. दी गई समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$x - ky - 2 = 0$$
$$3x + 2y + 5 = 0$$

दी गई समीकरण निकाय निम्न रूप में है

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ, $a_1 = 1, \; b_1 = -k, \; c_1 = -2$

एवं $a_2 = 3, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = 5$

स्पष्टतः, अद्वितीय हल के लिए $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{-k}{2} \quad \Rightarrow k \neq \frac{-2}{3}$$

Ex.49 प्रदर्शित करो कि निम्न समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं।

$x = 3y + 3 ; \; 9y = 3x - 9$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से लिखने पर

$$x - 3y - 3 = 0$$
$$3x - 9y - 9 = 0$$

दी गई समीकरण निम्न रूप में हैं

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ, $a_1 = 1, \quad b_1 = -3, c_1 = -3$

एवं $a_2 = 3, \quad b_2 = -9, c_2 = -9$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

स्पष्टतः, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ अतः दी गई समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं।

Ex.50 प्रदर्शित कीजिए कि निम्न समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं :

$2y = 4x - 6 ; \; 2x = y + 3$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से लिख सकते है

$$4x - 2y - 6 = 0$$
$$2x - y - 3 = 0$$

दिया गया समीकरण निकाय निम्न रूप में है

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ, $a_1 = 4, b_1 = -2, c_1 = -6$

एवं $a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = -3$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = 2,\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-1} = 2,\ \frac{c_1}{c_2} = \frac{-6}{-3} = 2$

स्पष्टतः, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, अतः दिया गया समीकरण निकाय अनन्त हल रखता है।

Ex.51 k का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्न समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं।

$(k - 1)\ x + 3y = 7;\ (k + 1)\ x + 6y = (5k - 1)$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से लिखने पर

$(k - 1)x + 3y - 7 = 0$

$(k + 1)\ x + 6y - (5k - 1) = 0$

यहाँ $a_1 = (k - 1), b_1 = 3, c_1 = -7$

एवं $a_2 = (k + 1), b_2 = 6, c_2 = -(5k - 1)$

समीकरण निकाय के अनन्त हल होने के लिए आवश्यक है कि

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{k-1}{k+1} = \frac{3}{6} = \frac{-7}{-(5k-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{k-1}{k+1} = \frac{1}{2} = \frac{7}{5k-1}$$

I व II लेने पर

$$\frac{k-1}{k+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2k - 2 = k + 1 \Rightarrow k = 3$

II व III लेने पर

$$\frac{1}{2} = \frac{7}{5k-1} \Rightarrow 5k - 1 = 14$$

$\Rightarrow 5k = 15 \Rightarrow k = 3$

अतः, $k = 3$.

Ex.52 a व b के किन मानों के लिए, निम्न समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं:

$2x + 3y = 7;\ (a - b)\ x + (a + b)\ y = 3a + b - 2$

Sol. दिया गया रेखीय समीकरण निकाय को निम्न प्रकार लिखने पर

$2x + 3y - 7 = 0$

$(a - b)\ x + (a + b)\ y - (3a + b - 2) = 0$

उपरोक्त समीकरण निकाय निम्न रूप में है

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$

जहाँ $a_1 = 2, b_1 = 3,\ c_1 = -7$

$a_2 = (a - b),\ b_2 = (a + b),\ c_2 = -(3a + b - 2)$

दिये गये समीकरण निकाय के अनन्त हल होने हेतु

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{a-b},\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{a+b}$ एवं

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-(3a+b-2)} = \frac{7}{3a+b-2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b} \text{ एवं } \frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$$

$\Rightarrow 2a + 2b = 3a - 3b$ एवं $9a + 3b - 6 = 7a + 7b$

$\Rightarrow 2a - 3a = -3b - 2b$ एवं $9a - 7a = 7b - 3b + 6$

$\Rightarrow -a = -5b$ एवं $2a = 4b + 6$

$\Rightarrow a = 5b$ .... (3) एवं $a = 2b + 3$ .... (4)

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर

$5b = 2b + 3 \Rightarrow b = 1$

$b = 1$ समीकरण (3) में रखने पर,

$a = 5 \times 1 = 5$

इस प्रकार, $a = 5$ व $b = 1$

अतः, दिये गये समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं जबकि

$$a = 5, b = 1$$

Ex.53 प्रदर्शित करो कि निम्न समीकरण निकाय असंगत है

$$2x + 7y = 11;\ 5x + \frac{35}{2}\ y = 25$$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से लिख सकते है

$$2x + 7y - 11 = 0$$

$$5x + \frac{35}{2}y - 25 = 0$$

दी गई समीकरण निम्न रूप में हैं

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ, $a_1 = 2,\ b_1 = 7, c_1 = -11$

एवं $a_2 = 5,\quad b_2 = \frac{35}{2}, c_2 = -25$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{5}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{7}{\frac{35}{2}} = \frac{2}{5}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-11}{-25} = \frac{11}{25}$$

स्पष्टतः, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अर्थात्, दिया गया समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है अर्थात् निकाय असंगत निकाय है। **इतिसिद्धम**

Ex.54 प्रदर्शित करो कि निम्न समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है :

$$2x + 4y = 10\ ;\ 3x + 6y = 12$$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को निम्न प्रकर से लिखा जा सकता है

$$2x + 4y - 10 = 0$$

$$3x + 6y - 12 = 0$$

दी गई समीकरण निम्न रूप में हैं

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ $a_1 = 2, b_1 = 4, c_1 = -10$

एवं $a_2 = 3, b_2 = 6,\ c_2 = -12$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}$$

स्पष्टतः, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अतः, दिये गये समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है। अर्थात् यह असंगत निकाय है। **इतिसिद्धम**

Ex.55 k के किस मान के लिए निम्न रेखीय समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

$$3x + y = 1;\ (2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$$

Sol. दिये गये समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से लिखने पर

$$3x + y - 1 = 0$$

$$(2k - 1)x + (k - 1)y - (2k + 1) = 0$$

उपरोक्त समीकरण निकाय निम्न रूप में है

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ $a_1 = 3,\ b_1 = 1, c_1 = -1$

एवं $a_2 = (2k - 1), b_2 = (k - 1), c_2 = -(2k+1)$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2k-1}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{k-1}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-1}{-(2k+1)}$$

स्पष्टतः, कोई हल नहीं होने की शर्त

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2k-1} = \frac{1}{k-1}$$

$$\Rightarrow 3k - 3 = 2k - 1 \Rightarrow k = 2$$

एवं $\frac{1}{k-1} \neq \frac{-1}{-(2k+1)}$

$$\Rightarrow 2k + 1 \neq k - 1 \quad \Rightarrow k \neq -2$$

एवं $\frac{3}{2k-1} \neq \frac{1}{2k+1}$

$$\Rightarrow 6k + 3 \neq 2k - 1 \Rightarrow 4k \neq -4 \Rightarrow k \neq -1$$

अतः दिया गया समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है। जबकि $k = 2$ एवं $k \neq -2$ तथा $k \neq -1$.

Ex.56 k का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए नीचे दिया गया प्रत्येक समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल / सुसंगत हल हो

(i) $2x + 3y - 5 = 0;\ kx - 6y = 8$

(ii) $2x + ky = 1;\ 5x - 7y - 5 = 0$

Sol. (i) दिये गये समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से लिखने पर

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$kx - 6y - 8 = 0$$

यहाँ, $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 5,$

$a_2 = k, b_2 = -6, c_2 = -8$

जैसा कि दिये गये समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है, अतः

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{k} \text{ एवं } \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{-6} = \frac{-1}{2}$$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\Rightarrow \frac{2}{k} \neq \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow k \neq -4$

इस प्रकार समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है जबकि k का कोई भी वास्तविक मान हो केवल –4 को छोड़कर।

(ii) दिया समीकरण निकाय निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$2x + ky - 1 = 0$

$5x - 7y - 5 = 0$

यहाँ, $a_1 = 2, b_1 = k, c_1 = -1,$

$a_2 = 5, b_2 = -7, c_2 = -5$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{5} \text{ एवं } \frac{b_1}{b_2} = \frac{k}{-7} = \frac{-k}{7}$$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{2}{5} \neq \frac{-k}{7}$

यह उस शर्त को संतुष्ट करते हैं कि दिया गया समीकरण निकाय एक अद्वितीय हल रखता है।

अतः, $\frac{2}{5} \neq \frac{-k}{7}$

$\Rightarrow k \neq \frac{-14}{5}$

इस प्रकार, दिया गया समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है, जो k के सभी वास्तविक मानों के लिए है, केवल $\frac{-14}{5}$ को छोड़कर।

Ex.57 k का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए नीचे दिये समीकरण निकाय का अद्वितीय हल/सुसंगत हल विद्यमान हो।

(i) $x - ky - 2 = 0; 3x + 2y + 5 = 0$

(ii) $2x - 3y - 1 = 0; kx + 5y - 7 = 0$

Sol. (i) $x - ky - 2 = 0$

$3x + 2y + 5 = 0$

यहाँ, $a_1 = 1, b_1 = -k, c_1 = -2,$

$a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 = 5$

चूँकि, दिये गये समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल विद्यमान है, अतः हम जानते हैं कि इसकी आवश्यक शर्त निम्न है

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ या $\frac{1}{3} \neq \frac{-k}{2}$

$\Rightarrow k \neq \frac{-2}{3}$

इस प्रकार, दिया गया समीकरण निकाय k के सभी मानों के लिए हल रखता है केवल $\frac{-2}{3}$ को छोड़कर

(ii) $2x - 3y - 1 = 0$

$kx + 5y - 7 = 0$

यहाँ, $a_1 = 2, b_1 = -3, c_1 = -1,$

$a_2 = k, b_2 = 5, c_2 = -7$

चूँकि, दिया गया समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है, अतः

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\Rightarrow \frac{2}{k} \neq \frac{-3}{5} \Rightarrow k \neq \frac{-10}{3}$

इस प्रकार, दिया गया समीकरण निकाय का k के सभी मानों केवल $\frac{-10}{3}$ को छोड़कर, अद्वितीय हल रखता है

Ex.58 k के मान ज्ञात कीजिए ताकि निम्न समीकरण निकाय के अनन्त हल हों

(i) $2x + 3y = k; (k - 1) x + (k + 2) y = 3k$

(ii) $2x + 3y = 2; (k + 2) x + (2k + 1) y = 2 (k - 1)$

Sol. (i) $2x + 3y - k = 0$

$(k - 1) x + (k + 2) y - 3k = 0$

यहाँ $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = -k,$

$$a_2 = k - 1, b_2 = k + 2, c_2 = -3k$$

चूँकि, दी गई समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं, अतः

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{k-1}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k+2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-k}{-3k}$$

एवं $\quad \frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$\Rightarrow \frac{2}{k-1} = \frac{3}{k+2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k-1} = \frac{3}{k+2} \quad \text{या} \quad \frac{3}{k+2} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow 2k + 4 = 3k - 3$ या $k + 2 = 9$

$\Rightarrow 3k - 2k = 4 + 3$ या $k = 7$

$\Rightarrow k = 7$ या $k = 7$

$\Rightarrow k = 7$

जो दर्शाता हैं कि दिया गया समीकरण निकाय $k = 7$ पर अनन्त हल रखता है।

(ii) $2x + 3y - 2 = 0$

$(k + 2) x + (2k + 1) y - 2 (k - 1) = 0$

यहाँ, $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = -2,$

$$a_2 = k + 2, b_2 = 2k + 1, c_2 = -2 (k - 1)$$

चूँकि, दी गई समीकरण निकाय के अनन्त हल है, अतः

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{k+2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{3k+1}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-2(k-1)}$$

एवं $\quad \frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$\Rightarrow \frac{2}{k+2} = \frac{3}{2k+1} = \frac{1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k+2} = \frac{3}{2k+1} \quad \text{या} \quad \frac{3}{2k+1} = \frac{1}{k-1}$$

$\Rightarrow 4k + 2 = 3k + 6$ या $3k - 3 = 2k + 1$

$\Rightarrow 4k - 3k = 6 - 2$ या $3k - 2k = 1 + 3$

$\Rightarrow k = 4$ या $k = 4$

$\Rightarrow k = 4$

Ex.59 निम्न समीकरण निकाय का यदि कोई हल नहीं हो तो k के मान ज्ञात कीजिए

$$x + 2y = 0; \ 2x + ky = 5$$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$x + 2y = 0$$
$$2x + ky - 5 = 0$$

यहाँ, $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 0, a_2 = 2, b_2 = k, c_2 = -5$

दिये गये समीकरण निकाय का कोई हल नहीं हैं, अतः

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{k} \neq \frac{c_1}{c_2} = \frac{0}{-5}$$

इस हेतु आवश्यक शर्त है

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{k}$$

$\Rightarrow k = 4$

यहाँ, k के इस मान के लिए,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Ex.60 k का मान ज्ञात कीजिए यदि निम्न समीकरण निकाय के अनन्त हल हों

$$2x - 3y = 7; \ (k + 2) x - (2k + 1) y = 3(2k - 1)$$

Sol. दी गई समीकरण निकाय के अनन्त हल होगें यदि

$$\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

अतः

$$\Rightarrow \frac{2}{k+2} = \frac{-3}{-(2k+1)} = \frac{7}{3(2k-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k+2} = \frac{3}{2k+1} \quad \text{या} \quad \frac{3}{2k+1} = \frac{7}{6k-3}$$

$\Rightarrow 4k + 2 = 3k + 6$ या $18k - 9 = 14k + 7$

$\Rightarrow k = 4$ or $k = 4 \qquad \Rightarrow k = 4$

इस प्रकार, दिया गया समीकरण निकाय के $k = 4$ पर अनन्त हल होते हैं।

Ex.61 a व b का मान ज्ञात कीजिए ताकि निम्न रेखीय समीकरण निकाय के अनन्त हल विद्यमान हो

$2x - (2a + 5) y = 5 ; \; (2b + 1) x - 9y = 15$

Sol. $2x - (2a + 5) y - 5 = 0$

$(2b + 1) x - 9y - 15 = 0$

अतः, $a_1 = 2, b_1 = -(2a + 5), c_1 = -5,$

$a_2 = 2b + 1, b_2 = -9, c_2 = -15 :$

दी गई समीकरण निकाय के अनन्त हल होते हैं, यदि

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{2b+1} = \frac{-(2a+5)}{-9} = \frac{-5}{-15}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2b+1} = \frac{2a+5}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2b+1} = \frac{1}{3} \text{ एवं } \frac{2a+5}{9} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow 2b + 1 = 6$ या $6a + 15 = 9$

$\Rightarrow b = \frac{5}{2}$ एवं $a = -1$

इस प्रकार, दिया गया समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं, यदि $a = -1, b = \frac{5}{2}$ हो

Ex.62 c का मान ज्ञात कीजिए, यदि निम्न समीकरण निकाय का कोई हल नहीं हो

$cx + 3y = 3; \; 12x + cy = 5$

Sol. $cx + 3y - 3 = 0$

$12x + cy - 6 = 0$

दिये गये समीकरण निकाय कोई हल नहीं हैं, यदि

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ जबकि } \frac{c}{12} = \frac{3}{c} \neq \frac{-3}{-6}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{12} = \frac{3}{c} \text{ एवं } \frac{3}{c} \neq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow c^2 = 36$

$\Rightarrow c = \pm 6$

इस प्रकार, दिया गया समीकरण निकाय का $c = \pm 6$ पर कोई हल नहीं है।

Ex.63 p के किस मान के लिए, निम्न समीकरण का कोई हल नहीं है?

$px - (p - 3) = -3y; \; py = p - 12x$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय को लिख सकते हैं

$px + 3y - (p - 3) = 0$

$12x + py - p = 0$

यहाँ, $a_1 = p, b_1 = 3, c_1 = -(p - 3),$

$a_2 = 12, b_2 = p, c_2 = -p$

दिये गये समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है, यदि $\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

इस हेतु, $\frac{p}{12} = \frac{3}{p}$ एवं $\frac{3}{p} \neq \frac{p-3}{p}$

$\Rightarrow p_2 = 36 \Rightarrow p = \pm 6$

जब $p = 6$, $\frac{3}{p} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ एवं $\frac{p-3}{p} = \frac{6-3}{6} = \frac{1}{2}$

अतः, $\frac{3}{p} = \frac{p-3}{p} = \frac{1}{2}$ इस प्रकार, $p = 6$ समीकरण को संतुष्ट नहीं करता $\frac{3}{p} \neq \frac{p-3}{p}$

जब $p = -6$, $\frac{3}{p} = \frac{3}{-6} = \frac{-1}{2}$

एवं $\frac{p-3}{p} = \frac{-6-3}{-6} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$

अतः, $\frac{3}{p} \neq \frac{p-3}{p}$

इस प्रकार, $p = -6$ समीकरण $\frac{3}{p} \neq \frac{p-3}{p}$ को संतुष्ट करता है

अतः, समीकरण निकाय का कोई हल नहीं होगा यदि $p = -6$

Ex.64 k का मान ज्ञात कीजिए ताकि निम्न समीकरण निकाय को कोई हल नहीं हो

$(3k + 1) x + 3y = 2 ; (k^2 + 1) x - 5 = -(k - 2)y$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय लिखा जा सकता है

$(3k + 1) x + 3y - 2 = 0$

$(k^2 + 1) x + (k - 2) y - 5 = 0$

यहाँ, $a_1 = 3k + 1, b_1 = 3, c_1 = -2,$

$a_2 = k^2 + 1, b_2 = k - 2, c_2 = -5$

चूँकि दिया गया समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है, अतः

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{3k+1}{k^2+1} = \frac{3}{k-2} \neq \frac{-2}{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{3k+1}{k^2+1} = \frac{3}{k-2} \text{ एवं } \frac{3}{k-2} \neq \frac{2}{5}$$

अतः, $\frac{3k+1}{k^2+1} = \frac{3}{k-2}$

$\Rightarrow 3k^2 - 6k + k - 2 = 3k^2 + 3$

$\Rightarrow -5k = 5 \Rightarrow k = -1$

$k = -1$ समीकरण $\frac{3}{k-2} \neq \frac{2}{5}$ में रखने पर,

$$\frac{3}{-1-2} = -1 \neq \frac{2}{5}$$

इस प्रकार, $k = -1$ समीकरण $\frac{3}{k-2} \neq \frac{2}{5}$ को संतुष्ट करता है

अतः, दिया गया समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है यदि $k = -1$ हो।

Ex.65 a व b का मान ज्ञात कीजिए ताकि निम्न समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं।

$3x + 4y - 12 = 0$

$2(a - b) y - (5a - 1) = -(a + b) x$

Sol. दिया गया समीकरण निकाय को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$3x + 4y - 12 = 0$

$(a + b) x + 2 (a - b) y - (5a - 1) = 0$

यहाँ, $a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = -12,$

$a_2 = a + b, b_2 = 2 (a - b), c_2 = -(5a - 1)$

चूँकि, दिया गया समीकरण निकाय अनन्त हल रखता है, अतः

$$\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{a+b} = \frac{4}{2(a-b)} = \frac{-12}{-(5a-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{a+b} = \frac{4}{2(a-b)} \text{ एवं } \frac{4}{2(a-b)} = \frac{12}{(5a-1)}$$

$\Rightarrow 6a - 6b = 4a + 4b$ एवं $20a - 4 = 24a - 24b$

$\Rightarrow 6a - 4a - 6b - 4b = 0$ एवं

$20a - 24a + 24b = 4$

$\Rightarrow 2a - 10b = 0$ एवं $24b - 4a = 4$

$\Rightarrow a - 5b = 0$ एवं $6b - a = 1$

उपरोक्त दोनों समीकरण को जोड़ने पर,

$-5b + 6b = 1$

$\Rightarrow b = 1$

$b = 1$ समीकरण $6b - a = 1$ में रखने पर,

$6 \times 1 - a = 1 \Rightarrow 6 - a = 1$

$\Rightarrow a = 5$

इस प्रकार, दिया गया समीकरण निकाय अनन्त हल रखता है, यदि $= 5, b = 1$.

➤ समघातीय समीकरण

समीकरण निकाय

$a_1x + b_1y = 0$

$a_2x + b_2y = 0$

समघातीय समीकरण कहलाता है, जिसका केवल हल $x = 0, y = 0$ जबकि, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(i) जब $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,

तब समीकरण निकाय का केवल एक हल होता है एवं निकाय संगत निकाय होता है।

(ii) जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

तब समीकरण निकाय के अनन्त हल होते हैं एवं निकाय संगत होता है।

Ex.66 k का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण निकाय $4x + 5y = 0; kx + 10y = 0$ के अनन्त हल हों।

Sol. दिया गया निकाय निम्न रूप में है

$$a_1x + b_1y = 0$$

$$a_2x + b_2y = 0$$

$a_1 = 4, b_1 = 5$ एवं $a_2 = k, \; b_2 = 10$

यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ तब निकाय के अनन्त हल होते हैं।

$\Rightarrow \; \frac{4}{k} = \frac{5}{10} \Rightarrow k = 8$

➢ रेखीय युगपत समीकरण शाब्दिक समस्या (भाषाई कथन) से बनाना

वस्तुओं पर आधारित समस्याऐं

❖ उदारण ❖

Ex.67 एक क्रिकेट टीम का कोच 7 बल्ले व 6 गेंद ₹ 3800 में खरीदता है। इसके पश्चात् उसने 3 बल्ले व 5 गेंद ₹ 1750 में खरीदी हों, तो प्रत्येक बल्ले व प्रत्येक गेंद की कीमत ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि एक बल्ले की कीमत ₹ x हैं तथा एक गेंद की कीमत ₹ y हैं, तब

$$7x + 6y = 3800 \quad ....(1)$$

$$3x + 5y = 1750 \quad ....(2)$$

(1) से $y = \frac{3800 - 7x}{6}$

$y = \frac{3800 - 7x}{6}$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$3x + 5\left(\frac{3800 - 7x}{6}\right) = 1750 \quad ....(3)$$

समीकरण (3) को 6 से गुणा करने पर,

$18x + 5(3800 - 7x) = 10500$

$\Rightarrow \; 18x + 19000 - 35x = 10500$

$\Rightarrow \; -17x = 10500 - 19000$

$\Rightarrow \; -17x = -8500 \qquad \Rightarrow \; x = 500$

$x = 500$ समीकरण (1) में रखने पर,

$7(500) + 6y = 3800$

$\Rightarrow \; 3500 + 6y = 3800$

$\Rightarrow \; 6y = 3800 - 3500$

$\Rightarrow \; 6y = 300 \qquad \Rightarrow \; y = 50$

इस प्रकार, एक बल्ले की कीमत = ₹ 500

एवं एक गेंद की कीमत = ₹ 50

Ex.68 मीना एक बैंक से ₹ 2000 निकलवाने गई, उसने कैशियर से कहा कि उसे सिर्फ ₹ 50 व ₹ 100 के ही नोट दिये जायें। यदि इस तरह मीना को 25 नोट कुल मिलते हों तो बतलाइये कि उसे ₹ 50 तथा ₹ 100 के कितने-कितने नोट मिले ?

Sol. मानाकि ₹ 50 के नोटों की संख्या x हैं एवं ₹ 100 के नोटों की संख्या y है।

तब प्रश्न के अनुसार,

$$x + y = 25 \quad ....(1)$$

$$50x + 100y = 2000 \quad ....(2)$$

समीकरण (1) को 50 से गुणा करने पर,

$$50x + 50y = 1250 \quad ....(3)$$

समीकरण (3) को (2) में से घटाने पर,

$50y = 750 \quad \Rightarrow \; y = 15$

$y = 15$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x + 15 = 25 \; \Rightarrow \; x = 25 - 15 = 10$

अतः, ₹ 50 के नोटों की संख्या 10 है तथा ₹ 100 के नोटों की संख्या 15 है।

Ex.69 यश ने एक परीक्षा में 40 अंक प्राप्त किये, उसने प्रत्येक सही उत्तर देने पर 3 अंक प्राप्त किये तथा गलत उत्तर देने पर प्रत्येक से 1 अंक काटा गया। यदि प्रत्येक सही उत्तर देने पर 4 अंक मिलते और प्रत्येक गलत उत्तर देने पर 2 अंक काटे जाते तो तब यश उस परीक्षा में 50 अंक प्राप्त करता। तो बतलाइये कि परीक्षा में कुल कितने प्रश्न पूछे गये ?

Sol. मानाकि यश के द्वारा दिये गये सही उत्तरों की संख्या x है तथा गलत उत्तरों की संख्या y है, तब प्रश्न के अनुसार :

स्थिति I. यश ने 40 अंक पाये जबकि उसे सही उत्तर देने पर 3 अंक मिले, व गलत उत्तर देने पर 1 अंक काटा गया तब

$$3x - y = 40 \quad ....(1)$$

स्थिति II. यश के 50 अंक होते अगर उसे सही उत्तर देने पर 4 अंक मिलते एवं गलत उत्तर पर 2 अंक काटे जाते, तब

$$4x - 2y = 50 \quad ....(2)$$

समीकरण (1) को 2 से गुणा करने पर,

$$6x - 2y = 80 \quad ....(3)$$

समीकरण (2) को (3) से घटाने पर,

$$2x = 30 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{30}{2} = 15$$

x = 15 समीकरण (1) में रखने पर,

$$3 \times 15 - y = 40$$

$$\Rightarrow \quad 45 - y = 40 \quad \Rightarrow \quad y = 5$$

कुल प्रश्नो की संख्या = सही उत्तरों की संख्या + गलत उत्तरों की संख्या

$$= 15 + 5 = 20$$

संख्याओं पर आधारित प्रश्न

Ex.70 दी गई संख्याओं 5, 9, 17, 27 में से प्रत्येक संख्या में कौनसी संख्या जोड़ी जाये कि ये संख्याऐं अनुक्रमानुपाती बन जाये ?

Sol. चार संख्याऐं अनुक्रमानुपाती होंगी, यदि

पहली संख्या × चौथी संख्या = दूसरी संख्या × तीसरी संख्या

मानाकि दी गई प्रत्येक संख्या में x जोड़ा गया है, जिससे ये संख्याऐं अनुक्रमानुपाती बन जाती हैं, तब

$$(5 + x)(27 + x) = (9 + x)(17 + x)$$

$$\Rightarrow \quad 135 + 32x + x^2 = 153 + 26x + x^2$$

$$\Rightarrow \quad 32x - 26x = 153 - 135$$

$$\Rightarrow \quad 6x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Ex.71 किसी परीक्षा में बैठने हेतु एक स्कूल के लड़कों का औसत स्कोर 71 है तथा लड़कियों का 73 है। इस परीक्षा में बैठने का उस स्कूल का औसत स्कोर 71.8 हो तो इस परीक्षा में बैठने वाले लड़को एवं लड़कियों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि लड़कों की संख्या = x

लड़कों का औसत स्कोर = 71

लड़कों का कुल स्कोर = 71x

मानाकि लड़कियों की संख्या = y

लड़कियों का औसत स्कोर = 73

लड़कियों का कुल स्कोर = 73 y

प्रश्न के अनुसार,

औसत स्कोर

$$= \frac{\text{कुल औसत}}{\text{विद्यार्थियों की कुल संख्या}}$$

$$\Rightarrow \quad 71.8 = \frac{71x + 73y}{x + y}$$

$$\Rightarrow \quad 71.8x + 71.8y = 71x + 73y \Rightarrow \quad 0.8x = 1.2y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{1.2}{0.8} = \frac{3}{2}$$

अतः, लड़को एवं लड़कियों की संख्या में अनुपात = 3 : 2.

Ex.72 दो संख्याओं का अन्तर 26 है तथा एक संख्या, दूसरी संख्या की तीन गुनी है, तो वे संख्याऐं ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि संख्याऐं x व y हैं।

दोनों संख्याओं का अन्तर 26 हैं,

अतः, $x - y = 26$ ....(1)

एक संख्या, दूसरी संख्या की तीन गुनी है,

अतः, $x = 3y$ ....(2)

x = 3y समीकरण (1) में रखने पर,

$$3y - y = 26$$

$$\Rightarrow \quad 2y = 26 \quad \Rightarrow \quad y = 13$$

y = 13 समीकरण (2) में रखने पर,

$$x = 3 \times 13 = 39$$

अतः, संख्याऐं x = 39 व y = 13 हैं।

आयु पर आधारित प्रश्न

Ex.73 एक पिता की आयु उसके दो बच्चों की आयु के योग की तीन गुना है। 5 वर्ष पश्चात् उसकी आयु दोनों बच्चों की आयु की दुगुनी हो जायेगी तो पिता की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि पिता की वर्तमान आयु = x वर्ष

एवं दोनों बच्चों की आयु का योग = y वर्ष

प्रश्नानुसार

पिता की आयु =3 × (दोनों बच्चों की आयु का योग)

$\Rightarrow$ $x = 3y$ ....(1)

5 वर्ष पश्चात् :

पिता की आयु = $(x + 5)$ वर्ष

दोनों बच्चों की आयु का योग

$= y + 5 + 5 = y + 10$

[प्रत्येक बच्चे की आयु में 5 वर्ष की वृद्धि होती है]

प्रश्नानुसार,

5 वर्ष पश्चात्

पिता की आयु =2 × (दोनों बच्चों की आयु का योग)

$\Rightarrow$ $x + 5 = 2 \times (y + 10)$

$\Rightarrow$ $x + 5 = 2y + 20$

$\Rightarrow$ $x - 2y = 15$ ....(2)

$x = 3y$ समीकरण (1) से (2) में रखने पर,

$3y - 2y = 15$

$\Rightarrow$ $y = 15$ वर्ष

एवं $x = 3y$ $\Rightarrow$ $x = 3 \times 15 = 45$

$\Rightarrow$ $x = 45$ वर्ष

अतः, पिता की आयु = 45 वर्ष

Ex.74 पाँच वर्ष पश्चात् जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु की तीन गुना हो जायेगी तथा पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु अपने पुत्र की आयु की सात गुना थी, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि जैकब व उसके पुत्र की वर्तमान आयु क्रमशः x व y हैं।

स्थिति I. पाँच वर्ष पश्चात् जैकब की आयु = $(x + 5)$, एवं पाँच वर्ष पश्चात् उसके पुत्र की आयु = $(y + 5)$

प्रश्नानुसार

$x + 5 = 3(y + 5)$

$\Rightarrow$ $x - 3y = 10$ ....(1)

स्थिति II. पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु = $x - 5$, एवं उसके पुत्र की आयु = $y - 5$ तब प्रश्नानुसार,

$x - 5 = 7(y - 5)$

$\Rightarrow$ $x = 7y - 30$ ....(2)

$x = 7y - 30$ समीकरण (2) से (1) में रखने पर,

$7y - 30 - 3y = 10$

$\Rightarrow$ $4y = 40 \Rightarrow y = 10$

$y = 10$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x - 3 \times 10 = 10$

$\Rightarrow$ $x = 10 + 30$ $\Rightarrow$ $x = 40$

अतः, जैकब की आयु 40 वर्ष, एवं उसके पुत्र की आयु 10 वर्ष है।

दो अंको की संख्याओं पर आधारित प्रश्न

Ex.75 दो अंको वाली एक संख्या एवं इसके अंकों को परस्पर बदलने पर बनी संख्या का योग 99 है। यदि अंकों का अन्तर 3 हो, तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि इकाई का अंक x हैं तथा दहाई का अंक y है

$\therefore$ मूल संख्या = $x + 10y$

अंकों को परस्पर बदलने पर बनने वाली संख्या $= 10x + y$

प्रश्नानुसार,

मूल संख्या + अंक परस्पर बदलने पर बनी संख्या = 99

$\Rightarrow$ $(x + 10y) + (10x + y) = 99$

$\Rightarrow$ $11x + 11y = 99$

$\Rightarrow$ $x + y = 9$

$\Rightarrow$ $x = 9 - y$ ....(1)

अंकों का अन्तर = 3

$\Rightarrow$ $x - y = 3$ ....(2)

$x = 9 - y$ समीकरण (1) से (2) में रखने पर,

$(9 - y) - y = 3$ $\Rightarrow$ $9 - 2y = 3$

$\Rightarrow$ $2y = 6$ $\Rightarrow$ $y = 3$

$y = 3$ समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$x = 9 - y = 9 - 3 = 6$

अतः, संख्या $x + 10y = 6 + 10 \times 3 = 36$.

Ex.76 दो अंको वाली एक संख्या तथा इसके अंको को परस्पर बदलने पर बनी संख्या का योग 165 है। यदि इसके अंको का अन्तर 3 हो, तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि इकाई स्थान का अंक = x

एवं दहाई स्थान का अंक = y

$\therefore$ मूल संख्या = $x + 10y$

अंको को परस्पर बदलने पर बनी संख्या = $10x + y$

प्रथम शर्त के अनुसार,

मूल संख्या + अंको को परस्पर बदलने पर बनी संख्या = 165

$\Rightarrow x + 10y + 10x + y = 165$

$\Rightarrow 11x + 11y = 165$

$\Rightarrow x + y = \frac{165}{11} = 15$

$\Rightarrow x = 15 - y$ ....(1)

दूसरी शर्त के अनुसार,

अंकों का अन्तर = 3

$\Rightarrow x - y = 3$ ....(2)

$x = 15 - y$ समीकरण (1) से (2) में रखने पर,

$(15 - y) - y = 3$

$\Rightarrow 15 - 2y = 3$

$\Rightarrow 2y = 12 \quad \Rightarrow y = 6$

$y = 6$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x = 15 - 6 \quad \Rightarrow x = 9$

अतः, मूल संख्या = $x + 10y$

$= 9 + 10 \times 6 = 69$

Ex.77 दो अंको वाली संख्या के अंको का योग 9 हैं एवं इस संख्या का नौ गुना, इसके अंको को परस्पर बदलने पर बनी संख्या के दुगुने के तुल्य हो तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि दहाई का अंक व इकाई का अंक क्रमशः x व y हैं। अतः इस संख्या को $10x + y$ लिखा जा सकता है।

जब अंको को परस्पर बदला जाता है, तब x इकाई का अंक व y दहाई का अंक बन जाती है। इस संख्या को $10y + x$ लिखा जा सकता है।

दी गई शर्त के अनुसार,

$x + y = 9$ ....(1)

हमें यह भी दिया गया हैं कि संख्या का नौ गुना अर्थात्, $9(10x + y)$ अंको को परस्पर बदलने पर बनी संख्या के दुगुने के तुल्य हैं अर्थात् $2(10y + x)$.

$\therefore 9(10x + y) = 2(10y + x)$

$\Rightarrow 90x + 9y = 20y + 2x$

$\Rightarrow 90x - 2x + 9y - 20y = 0$

$\Rightarrow 88x - 11y = 0 \quad \Rightarrow 8x - y = 0$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$9x = 9 \quad \Rightarrow x = 1$

$x = 1$ समीकरण (1) में रखने पर,

$y = 9 - 1 = 8$

इस प्रकार, संख्या $10 \times 1 + 8 = 10 + 8 = 18$

भिन्नों पर आधारित प्रश्न

Ex.78 एक भिन्न के अंश व हर का योग, अंश के दुगुने से 4 अधिक है। यदि अंश व हर में 3 की वृद्धि कर दी जाये तो वे 2 : 3 अनुपात में हैं, तो वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि अंश = x एवं हर = y

$\therefore$ भिन्न = $\frac{x}{y}$

पहली शर्त के अनुसार,

अंश + हर = 2 × अंश + 4

$\Rightarrow x + y = 2x + 4$

$\Rightarrow y = x + 4$ ....(1)

दूसरी शर्त के अनुसार,

$\frac{\text{अंश में 3 जोड़ने पर}}{\text{हर में 3 जोड़ने पर}} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{x+3}{y+3} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3x + 9 = 2y + 6$

$\Rightarrow 3x - 2y + 3 = 0$ ....(2)

y का मान समीकरण (1) से (2) में रखने पर,

$3x - 2(x + 4) + 3 = 0$

$\Rightarrow$ $3x - 2x - 8 + 3 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 5$

$x = 5$ रखने पर समीकरण (1) में,

$y = 5 + 4$

$\Rightarrow$ $y = 9$

अतः, भिन्न = $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$

Ex.79 एक भिन्न के अंश व हर का योग, हर के दुगुने से 3 कम है। यदि अंश व हर में से प्रत्येक में 1 की कमी कर दी जाती है, तो अंश का मान हर के मान का आधा रह जाता है, तो भिन्न ज्ञात कीजिए।

Sol. मानकि अंश = x एवं हर = y,

तब, भिन्न = $\frac{x}{y}$

पहली शर्त के अनुसार,

अंश + हर = हर का दुगुना – 3

$\Rightarrow$ $x + y = 2y - 3$

$\Rightarrow$ $2y - y = 3 + x$

$\Rightarrow$ $y = 3 + x$ ....(1)

दूसरी शर्त के अनुसार,

अंश में 1 की कमी करने पर अंश का मान

= $\frac{1}{2}$ (हर में 1 की कमी करने पर हर का मान)

$(x - 1) = \frac{1}{2}(y - 1)$

$\Rightarrow$ $2(x - 1) = y - 1$

$\Rightarrow$ $2x - y = -1 + 2$

$\Rightarrow$ $2x - y = 1$ ....(2)

$y = 3 + x$ समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$2x - (3 + x) = 1$

$\Rightarrow$ $2x - x = 1 + 3$

$\Rightarrow$ $x = 4$

$x = 4$ समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$y = 3 + 4$

$\Rightarrow$ $y = 7$

अतः, अभीष्ट भिन्न = $\frac{x}{y} = \frac{4}{7}$

Ex.80 एक भिन्न $\frac{9}{11}$ हो जाती है, यदि अंश व हर दोनों में 2 जोड़ा जाये। यदि अंश व हर दोनों में 3 जोड़ा जाता है तो यह $\frac{5}{6}$ के तुल्य हो जाती है। तो भिन्न ज्ञात कीजिए

Sol. मानकि अंश x व हर y हैं, तब प्रश्नानुसार

स्थिति 1 : $\frac{x+2}{y+2} = \frac{9}{11}$

$\Rightarrow$ $11(x + 2) = 9(y + 2)$

$\Rightarrow$ $11x + 22 = 9y + 18$

$\Rightarrow$ $11x - 9y = -4$ ....(1)

स्थिति 2 : $\frac{x+3}{y+3} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow$ $6(x + 3) = 5(y + 3)$

$\Rightarrow$ $6x + 18 = 5y + 15$

$\Rightarrow$ $6x - 5y = -3$ ....(2)

$\Rightarrow$ $x = \frac{5y-3}{6}$

$x = \frac{5y-3}{6}$ समीकरण (1) में रखने पर,

$11\left(\frac{5y-3}{6}\right) - 9y = -4$ ....(3)

समीकरण (3) को 6 से गुणा करने पर,

$11(5y - 3) - 54y = -24$

$55y - 33 - 54y = -24$

$y = 33 - 24 = 9$

$y = 9$ समीकरण (1) में रखने पर,

$11x - 9 \times 9 = -4$

$11x = -4 + 81 = 77 \Rightarrow x = 7$

अतः, अभीष्ट भिन्न $\frac{7}{9}$.

Ex.81 एक भिन्न $\frac{4}{5}$ हो जाती है, यदि अंश व हर प्रत्येक में 1 जोड़ा जाता है। यदि अंश व हर प्रत्येक से 5

घटाया जाता है, तो भिन्न $\frac{1}{2}$ बन जाती है, तो भिन्न ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि अभीष्ट भिन्न $\frac{x}{y}$ है, जहाँ x अंश है तथा y हर है।

प्रथम स्थिति :

प्रश्नानुसार,

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$$

$\Rightarrow$ 5x + 5 = 4y + 4

$\Rightarrow$ 5x – 4y = – 1

द्वितीय स्थिति : 5 को x तथा y से घटाने पर

अतः, $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ 2x – 10 = y – 5

$\Rightarrow$ 2x – y = 5 ....(2)

समीकरण (2) को 4 से तथा समीकरण (1) को 1 से गुणा करने पर,

5x – 4y = – 1 ....(3)

8x – 4y = 20 ....(4)

समीकरण (4) को (3) से घटाने पर,

–3x = – 21 $\Rightarrow$ x = 7

x का मान (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

2 × 7 – y = 5 $\Rightarrow$ y = 9

अतः, $\frac{x}{y} = \frac{7}{9}$

अतः, इस प्रकार अभीष्ट भिन्न $\frac{7}{9}$ है।

निश्चित किराया तथा परिवर्त किराया पर आधारित प्रश्न

Ex.82 एक टैक्सी के किराये का निर्धारण इस प्रकार से किया जाता है कि कुछ तो निश्चित किराया देना अनिवार्य है तथा इसके अलावा भी कुछ किराया किलोमीटर में तय की गई दूरी पर निर्भर है। यदि एक व्यक्ति 10 km की दूरी तय करने पर ₹ 68 देता है तथा 15 km दूरी तय करने पर ₹ 98 देता है तो उपरोक्त कथनों को युगपत समीकरण में व्यक्त कीजिए तथा निश्चित किराया एवं प्रति किलोमीटर की दर से देय किराया ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि टैक्सी का निश्चित किराया = ₹ x.

एवं टैक्सी का परिवर्त (दूरी पर आधारित) किराया = ₹ y प्रति किमी

प्रश्नानुसार,

10 km दूरी तय करने का खर्च = ₹ 68.

$\therefore$ x + 10y = 68 ....(1)

पुनः 15 km दूरी तय करने का खर्च = ₹ 98.

$\therefore$ x + 15y = 98 ....(2)

समीकरण (1) को समीकरण (2) से घटाने पर,

5y = 30 $\Rightarrow$ y = 6

y = 6 समीकरण (1) में रखने पर,

x + 10 × 6 = 68

$\Rightarrow$ x = 68 – 60 $\Rightarrow$ x = 8

अतः, टैक्सी का निश्चित किराया = x = ₹ 8 एवं प्रति किलोमीटर में किराया = y = ₹ 6

Ex.83 एक पुस्तकालय में पहले तीन दिनों का एक निश्चित किराया निर्धारित है तथा इसके बाद के दिनों का अतिरिक्त किराया प्रतिदिन के हिसाब से तय किया जाता है। सारिका ने एक पुस्तक सात दिन के लिए किराये पर ली और उसने ₹ 27 दिये। जबकि सूसी ने एक पुस्तक पाँच दिन के लिए किराये पर ली और उसने ₹ 21 दिये हों तो दिया गया निश्चित किराया एवं प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि निश्चित किराया ₹ x है

एवं प्रत्येक अतिरिक्त दिन का खर्चा किराया ₹ y है

प्रश्नानुसार

स्थिति I. सारिका ने ₹ 27 रूपये 7 दिन के दिये अर्थात् 4 अतिरिक्त दिन

$\therefore$ x + 4y = 27 ....(1)

सूसी ने ₹ 21 दिये जो 5 दिन के लिए अर्थात् 2 अतिरिक्त दिन

$\therefore$ x + 2y = 21 ....(2)

समीकरण (2) को (1) से घटाने पर,

2y = 6

$\Rightarrow$ y = 3

$y = 3$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x + 4 \times 3 = 27$

$\Rightarrow \; x = 27 - 12 = 15$

अतः निश्चित किराया ₹ 15 तथा प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ₹ 3 है।

Ex.84 एक शहर में टैक्सी का किराया इस तरह से निर्धारित किया जाता है कि कुछ निश्चित किराया देने के अलावा भी दूरी तय करने पर अतिरिक्त किराया भी दिया जाता है। 10 km की दूरी तय करने पर ₹ 105 दिये जाते हैं एवं 15 km, तय करने पर ₹ 155 दिये जाते हैं, तो निश्चित किराया एवं प्रति किलोमीटर में किराया ज्ञात कीजिए ? बतलाइये कि 25 km चलने पर वह व्यक्ति कितना किराया देगा ?

Sol. मानाकि टैक्सी का निश्चित किराया = ₹ x

तथा टैक्सी का परिवर्त किराया = ₹ y प्रति किमी

प्रश्नानुसार,

10 km तय करने का खर्च = ₹ 105

$\therefore \; x + 10y = 105$ ....(1)

पुनः 15 km तय करने का खर्च = ₹ 155

$\therefore \; x + 15y = 155$ ....(2)

$\Rightarrow \; x = 155 - 15y$

$x = 155 - 15y$ समीकरण (1) में रखने पर,

$155 - 15y + 10y = 105$

$\Rightarrow \; 155 - 5y = 105$

$\Rightarrow \; -5y = 105 - 155$

$\Rightarrow \; -5y = -50 \quad \Rightarrow \; y = 10$

$y = 10$ समीकरण (2) में रखने पर,

$x + 15 \times 10 = 155$

$\Rightarrow \; x + 150 = 155 \quad \Rightarrow \; x = 155 - 150 = 5$

अतः, टैक्सी का निश्चित किराया = x = ₹ 5 एवं प्रति किलोमीटर में किराया = y = ₹ 10 25 km यात्रा करने का कुल खर्चा = $5 + 25 \times 10$

$= 5 + 250 =$ ₹ 255

चाल एवं समय पर आधारित प्रश्न

Ex.85 दो जगह A तथा B एक राजमार्ग पर 100 km की दूरी पर हैं। एक ही समय एक कार A से चलना प्रारंभ करती है तथा दूसरी कार B से चलना प्रारंभ करती है। यदि दोनों कार एक ही दिशा में भिन्न-भिन्न चाल से चलकर 5 घंटे में मिलती है। यदि वे एक दूसरे की तरफ चलें तो वे 1 घंटे में मिलती है। तो दोनों कारों की चाल ज्ञात कीजिए ?

Sol. मानाकि पहली कार जो A से चली हैं की चाल x km/hr एवं दूसरी कार जो B से चली है की चाल y km/hr.

पहली कार द्वारा 5 घंटे में चली दूरी = AC = 5x

दूसरी कार द्वारा 5 घंटे में चली दूरी = BC = 5y

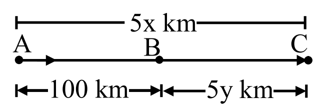
प्रश्नानुसार,

मानाकि वे C पर मिलती हैं, जब वो एक ही दिशा में चलती हैं

$AC = AB + BC$

$5x = 100 + 5y$

$\Rightarrow \; x = 20 + y$ ....(1)

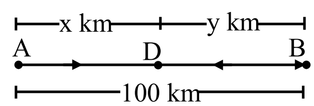


दूरी = चाल × समय

जब वे विपरीत दिशा में चलें, तो मान लो कि वो D पर मिलती हैं

पहली कार द्वारा 1 घंटे में तय की गई दूरी = AD = x

दूसरी कार द्वारा 1 एक घंटे में तय की गई दूरी = BD = y



$AD + BD = AB$

$\Rightarrow \; x + y = 100$ ....(2)

$x = 20 + y$ समीकरण (1) से (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$(20 + y) + y = 100$

$\Rightarrow \; 20 + 2y = 100$

$\Rightarrow \; 2y = 100 - 20 = 80 \Rightarrow \; y = 40$ km/hour

$y = 40$ समीकरण (1) में रखने पर,

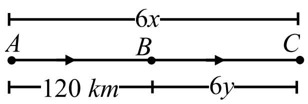
$x = 20 + 40 = 60$ km/hour

अतः, पहली कार की चाल = 60 km/hour

एवं दूसरी कार की चाल = 40 km/hour.

Ex.86 एक राजमार्ग पर स्थित दो स्थान A व B एक दूसरे से 120 km की दूरी पर हैं। एक कार स्थान A से तथा दूसरी कार स्थान B से एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करती हैं। यदि वे एक ही दिशा में चलती है तो वे 6 घंटे में मिलती हैं एवं यदि वे विपरीत दिशा में चलें तो वे 1 घंटे 12 मिनट में मिलती हैं, तो दोनों कारों की चाल ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि A से चलने वाली कार की चाल = x km/hr.



तथा B से चलने वाली कार की चाल = y km/h.

जब हम एक ही दिशा में चलें, मान लो कि वे C पर मिलते हैं

पहली कार द्वारा 6 घंटे में तय की गई दूरी = AC = 6x.

दूसरी कार द्वारा 6 घंटे मे तय की गई दूरी = BC = 6y.

प्रथम प्रतिबन्ध के अनुसार,

$AC = AB + BC$

$\Rightarrow 6x = 120 + 6y$

($\because$ दूरी = चाल × समय)

$\Rightarrow x = 20 + y$ ....(1)

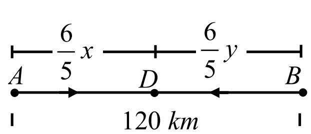
दूसरी शर्त के अनुसार,

पहली कार द्वारा $\frac{6}{5}$ घंटे में तय की गई दूरी $= AD = \frac{6}{5}x$

दूसरी कार द्वारा $\frac{6}{5}$ घंटे में तय की गई दूरी $= BD = \frac{6}{5}y$

जब दोनों कार विपरीत दिशा में चलें, मान लो कि वो D पर मिलती हैं

$AD + DB = AB$



$\Rightarrow \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}y = 120$

[1 घंटा 12 मिनट = $\frac{6}{5}$ घंटे]

$\Rightarrow x + y = 120 \times \frac{5}{6}$

$\Rightarrow x + y = 100$ ....(2)

$x = 20 + y$ समीकरण (1) से (2) में रखने पर,

$(20 + y) + y = 100$

$\Rightarrow 2y = 80 \Rightarrow y = 40$ km/hour

$y = 40$ समीकरण (1) में रखने पर, $x = 20 + 40 = 60$ km/hour

अतः, पहली कार की चाल = 60 km/hour.

एवं दूसरी कार की चाल = 40 km/hour.

Ex.87 एक हवाईजहाज अपने निर्धारित समय से 30 मिनट देरी से रवाना हुआ एवं इसको अपने गन्तव्य स्थान पर जो 1500 km की दूरी पर है, समय पर पहुँचना है, इस हेतु हवाईजहाज को अपनी निर्धारित चाल से 250 km/hr की वृद्धि करनी होगी, तो बतलाइये कि हवाईजहाज की निर्धारित चाल क्या है।

Sol. मानाकि हवाईजहाज की निर्धारित चाल = x km/hr.

हवाईजहाज की बढ़ी हुई चाल = y km/hr.

$\Rightarrow y = (x + 250)$ km/hour. ....(1)

दूरी = 1500 km.

प्रश्नानुसार,

(निर्धारित समय) – (बढ़ी हुई चाल में लगा समय) = 30 मिनट

$$\frac{1500}{x} - \frac{1500}{y} = \frac{1}{2} \quad ....(2)$$

$$\frac{1500}{x} - \frac{1500}{x+250} = \frac{1}{2} \quad \left[\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1500x + 375000 - 1500x}{x(x+250)} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x(x + 250) = 750000$

$\Rightarrow x^2 + 250x - 750000 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 1000x - 750x - 750000 = 0$

$\Rightarrow (x - 750)(x + 1000) = 0$

$\Rightarrow x = 750$ or $x = -1000$

परन्तु चूँकि चाल कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती

अतः, निर्धारित चाल = 750 km/hr.

नाव व धारा पर आधारित प्रश्न

Ex.88 एक नाव 16 km धारा के विपरीत तथा 24 km धारा की दिशा में 6 घंटों में चलती है। एक ही समय में नाव 12 km धारा की विपरीत दिशा में तथा 36 km धारा की दिशा में चलती है, तो नाव की चाल स्थिर जल में तथा धारा प्रवाह में चाल ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि धारा प्रवाह की चाल = y km/hr ;

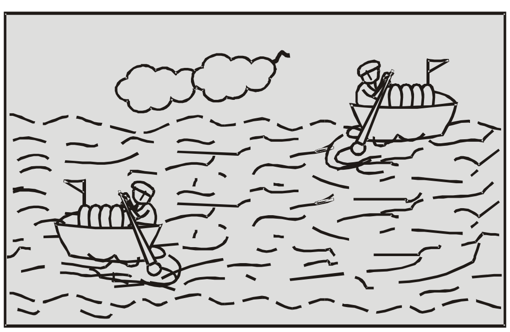
स्थिर जल में नाव की चाल = x km/hr.

एवं नाव की धारा के विपरीत चाल

= (x – y) km/hr.

नाव की धारा प्रवाह की दिशा मे चाल

= (x + y) km/hr.



प्रश्नानुसार,

16 km धारा प्रवाह के विपरीत चलने में लगा समय + 24 km धारा की दिशा में चलने मे लगा समय

= 6 घंटे

$$\Rightarrow \frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad ....(1)$$

$$\left[\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}\right]$$

पुनः प्रश्नानुसार,

12 km धारा प्रवाह के विपरीत चलने में लगा समय + 36 km धारा प्रवाह की दिशा में चलने पर लगा समय = 6 घंटे

$$\Rightarrow \frac{12}{x-y} + \frac{36}{x+y} = 6 \quad ....(2)$$

मानाकि $\frac{1}{x-y} = p, \ \frac{1}{x+y} = q$

समीकरण (1) से $16p + 24q = 6$ ....(3)

समीकरण (2) से $12p + 36q = 6$ ....(4)

समीकरण (3) को 3 से तथा समीकरण (4) को 4 से गुणा करने पर,

$48p + 72q = 18$ ....(5)

$48p + 144q = 24$ ....(6)

समीकरण (5) को (6) से घटाने पर,

$$72q = 6 \Rightarrow q = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$$

q का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$16p + 24\left(\frac{1}{12}\right) = 6 \Rightarrow 16p + 2 = 6$$

$\Rightarrow 16p = 6 - 2 = 4 \quad \Rightarrow p = 1/4$

$$\therefore \frac{1}{x-y} = \frac{1}{4} \text{ एवं } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{12}$$

$\Rightarrow x - y = 4$ ....(7)

एवं, $x + y = 12$ ....(8)

जाड़ने पर $2x = 16 \Rightarrow x = 8$

x = 8 समीकरण (7) में रखने पर,

$8 - y = 4 \Rightarrow y = 8 - 4 = 4$

अतः, स्थिर जल में नाव की चाल = 8 km/hr.

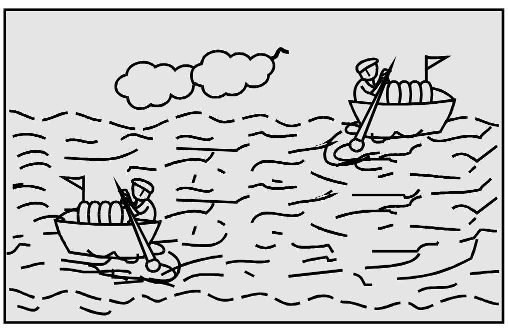
एवं धार प्रवाह में चाल = 4 km/hr.

Ex.89 एक नाव 30 km धारा प्रवाह की दिशा के विपरीत दिशा में चलती है तथा धारा प्रवाह की दिशा में 44 km चलने पर कुल समय 10 घंटे लगते हैं। नाव 13 घंटों में 40 km धारा प्रवाह के विपरीत तथा 55 km धारा प्रवाह की दिशा में चलती है। तो धारा प्रवाह की चाल तथा नाव की चाल ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि स्थिर जल में नाव की चाल x km/hr है तथा धारा प्रवाह की चाल y km/hr तब नाव की धारा प्रवाह के दिशा में चाल = (x + y) km/hr एवं नाव की धारा प्रवाह के विपरीत दिशा में चाल = (x – y) km/hr एवं समय = दूरी/चाल

पहली स्थिति में, जब नाव 30 km धारा प्रवाह के विपरीत चल रही है, मान लो इस हेतु लिया समय t_1 है, तब

$$t_1 = \frac{30}{(x-y)}$$



एवं मानलो t_2 वह समय है जब नाव 44 km धारा की दिशा में चलती है, तब $t_2 = \frac{44}{(x+y)}$ कुल लिया गया समय, $t_1 + t_2$, जो 10 घंटे हे, अतः हमें समीकरण प्राप्त होगी

$$\frac{30}{(x-y)} + \frac{44}{(x+y)} = 10 \quad ....(1)$$

दूसरी स्थिति में 13 घंटों में नाव 40 km धारा प्रवाह के विपरीत एवं 55 km धारा प्रवाह की दिशा में चलती है, तब हमें समीकरण प्राप्त होगी

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \quad ....(2)$$

मानाकि $\frac{1}{(x-y)} = u$ एवं $\frac{1}{(x+y)} = v$ ....(3)

इन मानों को समीकरण (1) व (2) में प्रतिस्थापन से, हमें रेखीय युग्म मिलता है

$$30u + 44v = 10 \quad ....(4)$$

$$40u + 55v = 13 \quad ....(5)$$

समीकरण (3) को 4 से तथा समीकरण (5) को 3 से गुणा करने पर,

$$120u + 176\,v = 40$$

$$120u + 165v = 39$$

दोनों समीकरणों को घटाने पर,

$$11v = 1,\ \text{i.e.},\ v = \frac{1}{11}$$

v का मान समीकरण (4) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$30u + 4 = 10$$

$$\Rightarrow\ 30u = 6 \quad \Rightarrow\ u = \frac{1}{5}$$

u व v के मानों को समीकरण (3) में रखने पर,

$$\frac{1}{(x-y)} = \frac{1}{5} \text{ एवं } \frac{1}{(x+y)} = \frac{1}{11}$$

अर्थात्, $(x-y) = 5$ एवं $(x+y) = 11$

इन समीकरणों को जोड़ने पर,

अर्थात्, $2x = 16$ अर्थात्, $x = 8$

इन समीकरणों को घटाने पर,

$$2y = 6 \quad \text{i.e., } y = 3$$

अतः, स्थिर जल में नाव की चाल 8 km/hr एवं धारा प्रवाह की चाल 3 km/hr.

Ex.90 एक तैराक धारा प्रवाह की दिशा में 8km चलने में 40 मिनट लेता है तथा वापस लौटने में 1 घंटा लेता है। तो तैराक की स्थिर जल में चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

Sol. 40 मिनट = $\frac{40}{60}$ घंटा = $\frac{2}{3}$ घंटा

मानाकि तैराक की स्थिर जल में चाल x km./hr है तथा धारा की चाल y km/hr.

हम जानते हैं कि चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

धारा प्रवाह के विपरीत चाल = (x – y) km/hr

एवं धारा प्रवाह की दिशा में चाल = (x + y) km/hr

प्रथम स्थिति हेतु,

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{x+y} \qquad \left\{\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}\right\}$$

$\Rightarrow$ 2x + 2y = 24

$\Rightarrow$ x + y = 12 ....(1)

द्वितीय स्थिति हेतु,

$$1 = \frac{8}{x-y} \qquad \left\{\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}\right\}$$

$\Rightarrow$ x – y = 8 ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

2x = 20 $\Rightarrow$ x = 10 km/hr

x = 10 समीकरण (1) में रखने पर,

10 + y = 12 $\Rightarrow$ y = 2 km/hr

अतः, तैराक की स्थिर जल में चाल व धारा की चाल क्रमशः 10 km/hr व 2km/hr है।

Ex.91 एक व्यक्ति धारा प्रवाह की दिशा में 20 km चलने में 2 घंटे लेता है, तथा धार प्रवाह की विपरीत दिशा में 4 km चलने में 2 घंटे लेता है, तो स्थिर जल में व्यक्ति की चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि स्थिर जल में व्यक्ति की चाल एवं धारा की चाल क्रमशः x km/hr व y km/hr है,

तब, धारा प्रवाह के विपरीत चाल = (x – y) km/hr

एवं धारा प्रवाह की दिशा में चाल = (x + y) km/hr

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

प्रथम स्थिति में, :

$$\Rightarrow 2 = \frac{20}{x+y} \qquad \Rightarrow 2(x+y) = 20$$

$\Rightarrow$ x + y = 10 ....(1)

दूसरी स्थिति में, :

$$2 = \frac{4}{x-y} \quad \Rightarrow \quad 2(x-y) = 4$$

$\Rightarrow$ x – y = 2 ....(2)

(1) व (2) को जोड़ने पर,

$\Rightarrow$ 2x = 12 $\Rightarrow$ x = 6

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

6 + y = 10 $\Rightarrow$ y = 4

अतः, व्यक्ति की स्थिर जल में चाल एवं धारा की चाल क्रमशः 6 km/hr व 4 km/hr है।

क्षेत्रफल पर आधारित प्रश्न

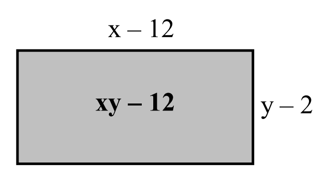
Ex.92 यदि एक आयत में, लम्बाई को 2 मीटर बढ़ाये एवं चौड़ाई को 2 मीटर कम कर दें तो आयत का क्षेत्रफल 28 वर्ग मीटर कम हो जाता है। यदि लम्बाई को 1 मीटर घटाऐं एवं चौड़ाई को 2 मीटर बढ़ायें तो आयत के क्षेत्रफल में 33 वर्ग मीटर की वृद्धि होती है। तो आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

Sol. मानलो कि आयत की लम्बाई = x मीटर है।

एवं आयत की चौड़ाई = y मीटर है

क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = xy वर्ग मीटर

स्थिति 1: प्रश्न के अनुसार



बढ़ी हुई लम्बाई = x + 2

घटी हुई लम्बाई = y – 2

घटा हुआ क्षेत्रफल = (x + 2) (y – 2)

क्षेत्रफल में कमी = 28

मूल क्षेत्रफल – घटा हुआ क्षेत्रफल = 28

xy – [(x + 2) (y – 2)] = 28

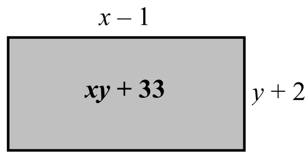
$\Rightarrow$ xy – [xy – 2x + 2y – 4] = 28

$\Rightarrow$ xy – xy + 2x – 2y + 4 = 28

$\Rightarrow$ $2x - 2y = 28 - 4 = 24$

$\Rightarrow$ $x - y = 12$ ....(1)

स्थिति 2 :



लम्बाई में कमी = $x - 1$

$\Rightarrow$ चौड़ाई में वृद्धि = $y + 2$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल में वृद्धि = $(x - 1)(y + 2)$

क्षेत्रफल में वृद्धि = 33

$\therefore$ बढ़ा हुआ क्षेत्रफल – मूल क्षेत्रफल = 33

$\Rightarrow$ $(x - 1)(y + 2) - xy = 33$

$\Rightarrow$ $xy + 2x - y - 2 - xy = 33$

$\Rightarrow$ $2x - y = 33 + 2 = 35$

$\Rightarrow$ $2x - y = 35$ ....(2)

समीकरण (1) को (2) से घटाने पर,

$x = 23$

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापति करने पर,

$2x - y = 12$

$\Rightarrow$ $y = 23 - 12 = 11$

$\Rightarrow$ लम्बाई = 23 मीटर

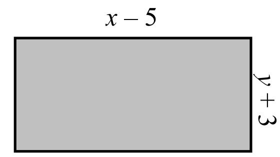
$\Rightarrow$ चौड़ाई = 11 मीटर

Ex.93 एक आयत के क्षेत्रफल में 9 वर्ग इकाई की कमी हो जाती है, यदि उसकी लम्बाई में 5 इकाई की कमी कर दें और चौड़ाई को 3 इकाई बढ़ा देते हैं। यदि हम लम्बाई को 3 इकाई से बढ़ा दें और चौड़ाई को 2 इकाई से बढ़ा दें तो आयत के क्षेत्रफल में 67 वर्ग इकाई की वृद्धि हो जाती है, तो आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि आयत की लम्बाई x इकाई है एवं चौड़ाई y इकाई है

तब आयत का क्षेत्रफल = xy

स्थिति 1 : पहली शर्त के अनुसार,



लम्बाई में कमी = $x - 5$

चौड़ाई में वृद्धि = $y + 3$

क्षेत्रफल में कमी = $(x - 5)(y + 3)$

प्रश्नानुसार क्षेत्रफल में कमी = 9

मूल क्षेत्रफल – परिवर्त क्षेत्रफल = 9

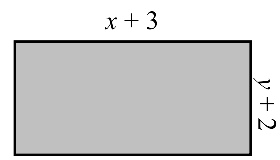
$xy - [(x - 5)(y + 3)] = 9$

$\Rightarrow$ $xy - [xy + 3x - 5y - 15] = 9$

$\Rightarrow$ $xy - xy - 3x + 5y + 15 = 9$

$\Rightarrow$ $3x - 5y = 6$ ....(1)

स्थिति 2. दूसरी शर्त के अनुसार,



लम्बाई में वृद्धि = $x + 3$

चौड़ाई में वृद्धि = $y + 2$

क्षेत्रफल में वृद्धि = $(x + 3)(y + 2)$

प्रश्नानुसार क्षेत्रफल में वृद्धि = 67

क्षेत्रफल में वृद्धि – मूल क्षेत्रफल = 67

$\Rightarrow$ $(x + 3)(y + 2) - xy = 67$

$\Rightarrow$ $xy + 2x + 3y + 6 - xy = 67$

$2x + 3y = 61$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर,

x = 17 इकाई व y = 9 इकाई

अतः, आयत की लम्बाई = 17 इकाई,

एवं आयत की चौड़ाई = 9 इकाई

ज्यामिती पर आधारित प्रश्न

Ex.94 दो संपूरक कोणों में से बड़ा कोण, छोटे कोण से 18 अंश अधिक है, तो उन कोणों को ज्ञात कीजिए।

Sol. मानाकि कोण x व y है, तब प्रश्नानुसार

$x + y = 180$ ....(1)

$x = y + 18$ ....(2)

x = y + 18 समीकरण (2) से (1) में रखने पर,

$y + 18 + y = 180$

$2y = 180 - 18$

$\Rightarrow 2y = 162$

$\Rightarrow y = 81$

y = 81 समीकरण (2) में रखने पर,

$x = 81 + 18 = 99$

अतः, कोण $x = 99^o$ एवं $y = 81^o$.

Ex.95 ΔABC में, $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ तो तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

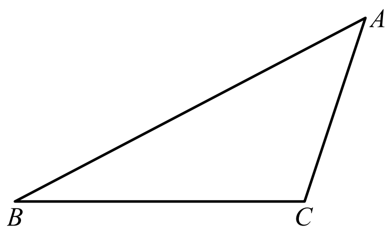
Sol. $\angle C = 2(\angle A + \angle B)$ ....(1) (दिया है)

$2\angle C$ समीकरण (1) के दोनों तरफ जोड़ने पर,

$\angle C + 2\angle C = 2(\angle A + \angle B) + 2\angle C$

$\Rightarrow 3\angle C = 2(\angle A + \angle B + \angle C)$

$\Rightarrow \angle C = \frac{2}{3} \times 180^o = 120^o$



पुनः $\angle C = 3\angle B$ (दिया है)

$120^o = 3\angle B \Rightarrow \angle B = \frac{120^o}{3} = 40^o$

परन्तु $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$

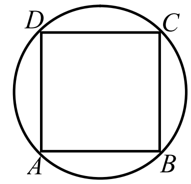
$\angle A + 40^o + 120^o = 180^o$

$\Rightarrow \angle A = 180^o - 40^o - 120^o = 20^o$

$\angle A = 20^o, \angle B = 40^o, \angle C = 120^o$

Ex.96 चक्रीय चतुर्भुज ABCD ज्ञात कीजिए, जिसमें $\angle A = (2x + 4)^o, \angle B = (y + 3)^o, \angle C = (2y + 10)^o$ एवं $\angle D = (4x - 5)^o$ तथा चारों कोण भी ज्ञात कीजिए।

Sol. $\angle A = (2x + 4)^o$, एवं $\angle C = (2y + 10)$;



परन्तु $\angle A + \angle C = 180^o$ (चक्रीय चतुर्भुज)

$\Rightarrow (2x + 4)^o + (2y + 10)^o = 180^o$

$\Rightarrow 2x + 2y = 166^o$

एवं $\Rightarrow \angle B = (y + 3)^o, \angle D = (4x - 5)^o$

परन्तु $\angle B + \angle D = 180^o$ (चक्रीय चतुर्भुज)

$\Rightarrow (y + 3)^o + (4x - 5)^o = 180^o$

$\Rightarrow 4x + y = 182^o$

(1) व (2) को हल करने पर,

$x = 33^o, y = 50^o$

$\angle A = (2x + 4)^o = (66 + 4)^o = 70^o$

$\angle B = (y + 3)^o = (50 + 3)^o = 53^o$

$\angle C = (2y + 10)^o = (100 + 10)^o = 110^o$,

$\angle D = (4x - 5)^o = (4 \times 33 - 5)^o = 127^o$

$\angle A = 70^o, \angle B = 53^o, \angle C = 110^o, \angle D = 127^o$

Ex.97 एक आयत का क्षेत्रफल वही रहता है, यदि उसकी लम्बाई में 7 dm की कमी कर दें एवं चौड़ाई में 5 dm की वृद्धि कर दें आयत का क्षेत्रफल तब भी अपरिवर्तित रहता है जबकि इसकी लम्बाई में 7 dm की वृद्धि कर दें एवं चौड़ाई में 3 dm की कमी कर दें तो आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात करो।

Sol. मानाकि आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई क्रमशः x व y हैं, तब क्षेत्रफल = (xy) वर्ग इकाई

प्रथम स्थिति : लम्बाई में 7 dm की कमी करने एवं चौड़ाई में 5 dm की वृद्धि करने पर

प्रश्नानुसार,

$xy = (x - 7)(y + 5)$

$\Rightarrow xy = xy + 5x - 7y - 35$

$\Rightarrow 5x - 7y - 35 = 0$ .... (1)

द्वितीय स्थिति : लम्बाई में 7 dm की वृद्धि करने एवं चौड़ाई में 3 dm की वृद्धि करने पर भी क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है। अतः हम जानते हैं कि

$xy = (x + 7)(y - 3) = xy - 3x + 7y - 21$

$\Rightarrow\ 3x - 7y + 21 = 0$ ....(2)

अतः, समीकरण निकाय निम्न हैं

$\Rightarrow\ 5x - 7y - 35 = 0$ ....(3)

$3x - 7y + 21 = 0$ ....(4)

समीकरण (4) को (3) से घटाने पर,

$2x - 56 = 0$

$\Rightarrow\ 2x = 56 \Rightarrow\ x = 28$ dm

x = 28 समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर,

$5 \times 28 - 7y = 35$

$\Rightarrow\ 7y = 105 \quad \Rightarrow\ y = 15$ dm

अतः, आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई क्रमशः 28 dm एवं 15 dm है।

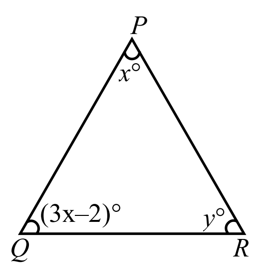
Ex.98 त्रिभुज PQR में, $\angle P = x^o$, $\angle Q = (3x - 2)^o$, $\angle R = y^o$, $\angle R - \angle Q = 9^o$ तो तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

Sol. दिया गया है कि

$\angle P = x^o, \angle Q = (3x - 2)^o,$

$\angle R = y^o$ एवं

$\angle R - \angle Q = 9^o$



हम जानते हैं कि एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180º होता है।

अतः, $\angle P + \angle Q + \angle R = x + 3x - 2 + y = 180$

$\Rightarrow\ 4x + y = 182$ ....(1)

यह भी दिया गया हैं कि

$\angle R - \angle Q = 9^o$

या $y - (3x - 2) = 9$

$\Rightarrow\ y - 3x + 2 = 9$

$\Rightarrow\ 3x - y = -7$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$7x = 175$

$\Rightarrow\ x = 25$

x = 25 समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$3 \times 25 - y = -7$

$\Rightarrow\ y = 75 + 7 = 82$

इस प्रकार, $P = x^o = 25^o$

$Q = (3x - 2)^o = (3 \times 25 - 2)^o = 73^o$

एवं $R = y = 82^o$.

याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. $ax + by + c = 0$ रूप की समीकरण दो चरों x व y में रेखीय समीकरण कहलाती है a व b क्रमशः x व y के गुणांक ऐसे हैं कि $a, b \in R$ एवं $a \neq 0$, $b \neq 0$

2. दो चरों में रेखीय समीकरण का आलेख एक सरल रेखा होती है।

3. दो चरों में रेखीय समीकरण के अनन्त हल होते हैं।

4. रेखा $ax + by + c = 0$ का ढाल $- a/b$ है।

5. x-अक्ष का समीकरण $y = 0$ है तथा y-अक्ष का समीकरण $x = 0$ होता है।

6. रेखा $x = a$ का ग्राफ y-अक्ष के समान्तर रेखा होती है।

7. रेखा $y = b$ का ग्राफ x-अक्ष के समान्तर रेखा होती है।

8. दो चरों में रेखीय समीकरण के ग्राफ पर प्रत्येक बिन्दु उस समीकरण का हल होता है।

9. दो चरों x व y में रेखीय समीकरणों का युग्म निम्न प्रकार से बीजीय रूप में निरूपित किया जा सकता है :

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ वास्तविक संख्याऐं इस प्रकार से हैं कि $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$

10. रेखीय समीकरणों का एक युग्म जो दो चरों में निरूपित है

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

को ज्यामितीय रूप से या आलेखीय रूप से दर्शाया जाये तो यह सरल रेखाओं के युग्म को निरूपित करता है, जो कि

(i) प्रतिच्छेदन करते हैं, यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) समान्तर हैं, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(iii) संपाती हैं, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

11. दो चरों में रेखीय समीकरण युग्म को निम्न विधियों से हल कर सकते हैं :

(i) आलेखीय विधि

(ii) बीजीय विधि

12. दो चरों में रेखीय समीकरण युग्म को आलेखीय विधि को हल करने हेतु हम सर्वप्रथम उनके द्वारा प्रदर्शित रेखाओं को दर्शायेंगे।

(i) यदि रेखा युग्म एक बिन्दु पर प्रतिच्छेदन करते हों, तब हम कह सकते हैं कि रेखा युग्म संगत है तथा उस बिन्दु के निर्देशांक से हमें अद्वितीय हल प्राप्त होता है।

(ii) यदि रेखा युग्म समान्तर हों, तब रेखा युग्म का कोई हल नहीं है एवं समीकरण युग्मों के असंगत हल कहलाते हैं

(iii) यदि रेखा युग्म संपाती हों, तब इसके अनन्त हल होते हैं। रेखा का प्रत्येक बिन्दु उसका हल होता है। इस स्थिति में हम कह सकते हैं कि रेखीय समीकरण युग्म संगत है एवं अनन्त हल रखता है।

13. दो चरों में रेखीय समीकरण युग्म को बीजीय विधि से हल करने हेतु हम निम्न विधि को काम में लेते हैं :

(i) प्रतिस्थापन विधि

(ii) विलोपन विधि

(iii) वज्र-गुणन विधि

14. यदि $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

दो चरों x व y में रेखीय समीकरण युग्म इस प्रकार से हैं कि :

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ तब रेखीय समीकरण युग्म संगत होते हैं, जिनका अद्वितीय हल है

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ तब रेखीय समीकरण युग्म असंगत होते है

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ तब रेखीय समीकरण युग्म संगत होता है एवं इसके अनन्त हल होते हैं।