वृत्त से सम्बन्धित क्षेत्रफल

3
CHAPTER

सूची

- वृत्त का परिमाप एवं क्षेत्रफल
- दो संकेन्द्रीय वृत्तों से परिबद्ध क्षेत्रफल
- वृत्त का त्रिज्यखण्ड
- त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल
- वृत्तखण्ड एवं इसका क्षेत्रफल
- समतल आकृतियों के समूह का क्षेत्रफल

➤ वृत्त का परिमाप एवं क्षेत्रफल

एक वृत्त एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जो समतल में इस प्रकार गमन करता है कि एक स्थिर बिन्दु से इसकी दूरी हमेशा समान रहती है।

स्थिर बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है तथा दी गई नियत दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

वृत्त का परिमाप इसकी परिधि कहलाती है।

यदि r वृत्त की त्रिज्या है, तब

(i) परिधि $= 2\pi r$ या πd जहाँ, $d = 2r$ वृत्त का व्यास है।

(ii) क्षेत्रफल $= \pi r^2$ या $\pi d^2/4$

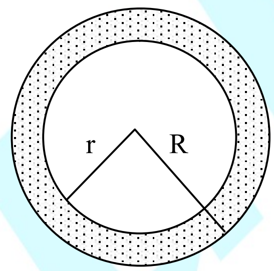
(iii) अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2}{2}$

(iv) वृत्त के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2}{4}$

➤ दो संकेन्द्रीय वृत्तो से परिबद्ध क्षेत्रफल

यदि R एवं r दो संकेन्द्रीय वृत्तो की त्रिज्याएं है, तब दो वृत्तों के द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r)(R - r)$



कुछ उपयोगी परिणाम :

(i) यदि दो वृत्त अन्तः स्पर्श करते हैं, तब उनके केन्द्रों के मध्य दूरी उनकी त्रिज्याओं के अन्तर के बराबर होती है ।

(ii) यदि दो वृत्त बाह्य स्पर्श करते हैं, तब उनके केन्द्रों के मध्य दूरी उनकी त्रिज्याओं के योग के बराबर होती है ।

(iii) घूमने वाले एक पहिये के द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी पहिये की परिधि के बराबर होती है ।

(iv) घूमने वाले एक पहिये के द्वारा एक मिनट में पूर्ण किये गये चक्करों की संख्या

$$= \frac{\text{एक मिनट में तय की गई दूरी}}{\text{परिधि}}$$

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी परिधि 22 cm है।

Sol. माना r वृत्त की त्रिज्या है, तब

परिधि $= 22$ cm

$\Rightarrow 2\pi r = 22 \Rightarrow 2 \times \dfrac{22}{7} \times r = 22$

$\Rightarrow r = 7/2$ cm

∴ वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ cm^2

$= 38.5$ cm^2

Ex.2 उस वृत्त के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी परिधि 22 cm है ।

Sol. माना r वृत्त की त्रिज्या है, तब

परिधि = 22 cm

$\Rightarrow 2\pi r = 22 \Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 22 \Rightarrow r = \frac{7}{2}$ cm

∴ एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2$

$= \left\{\frac{1}{4} \times \frac{22}{7}\left(\frac{7}{2}\right)^2\right\}$ cm^2

$= \left\{\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right\}$ cm^2

$= \frac{77}{4}$ cm^2 $= 9.625$ cm^2

Ex.3 यदि एक अर्द्ध–वृत्तीय चाँदे का परिमाप 66 cm है, तब चाँदे का व्यास ज्ञात कीजिए ($\pi = 22/7$ लें).

Sol. माना चाँदे की त्रिज्या r cm है, तब

परिमाप = 66 cm

$\Rightarrow 1/2(2\pi r) = 66$

[∵ अर्द्धवृत्त का परिमाप $= \frac{1}{2}(2\pi r)$]

$\Rightarrow \pi r = 66 \Rightarrow 22/7 \times r = 66 \Rightarrow r = 21$ cm

∴ चाँदे का व्यास $= 2r = (2 \times 21)$ cm

$= 42$ cm

Ex.4 एक वृत्त की परिधि, व्यास से 16.8 cm अधिक है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो ।

Sol. माना वृत्त की त्रिज्या r cm है, तब

व्यास = 2r cm तथा परिधि = $2\pi r$ cm

यह दिया गया है कि परिधि, व्यास से 16.8 cm अधिक है ।

∴ परिधि = व्यास + 16.8

$\Rightarrow 2\pi r = 2r + 16.8$

$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 2r + 16.8$ $\left[\because \pi = \frac{22}{7}\right]$

$\Rightarrow 44r = 14r + 16.8 \times 7$

$\Rightarrow 44r - 14r = 117.6 \Rightarrow 30r = 117.6$

$\Rightarrow r = \frac{117.6}{30} = 3.92$

फलतः, त्रिज्या = 3.92 cm

Ex.5 दो वृत्त बाह्य स्पर्श करते हैं। उनके क्षेत्रफलों का योग 130 π sq. cm है तथा उनके केन्द्रो के मध्य दूरी 14 cm है। वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात करो ।

Sol. यदि दो वृत्त बाह्य स्पर्श करते हैं, तब उनके केन्द्रों के मध्य दूरी उनकी त्रिज्याओं के योग के बराबर होती है।

माना दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः r_1 cm तथा r_2 cm है ।

माना C_1 तथा C_2 दिये गये वृत्तों के केन्द्र हैं, तब,

$C_1C_2 = r_1 + r_2$

$\Rightarrow 14 = r_1 + r_2$ [∵ $C_1C_2 = 14$ cm (दिया गया है)]

$\Rightarrow r_1 + r_2 = 14$ ....(i)

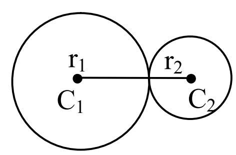
यह दिया गया है कि दोनो वृत्तों के क्षेत्रफलों का योग 130 π cm^2 के बराबर है।

∴ $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 130\pi$

$\Rightarrow r_1^2 + r_2^2 = 130$ ....(ii)

अब,

$(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2$



$\Rightarrow 14^2 = 130 + 2r_1r_2$

[समीकरण (i) तथा (ii) के उपयोग से]

$\Rightarrow 196 - 130 = 2r_1r_2$

$\Rightarrow r_1r_2 = 33$ ....(iii)

अब,

$(r_1 - r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2$

$\Rightarrow (r_1 - r_2)^2 = 130 - 2 \times 33$

[(ii) व (iii) के प्रयोग से]

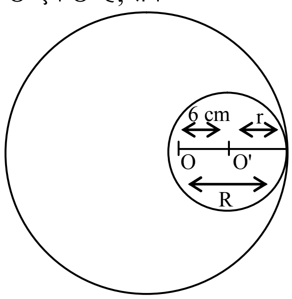
$\Rightarrow$ $(r_1 - r_2)^2 = 64$ $\Rightarrow$ $r_1 - r_2 = 8$ ....(iv)

(i) व (iv) को हल करने पर, r_1 = 11 cm तथा r_2 = 3 cm.

अतः दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ 11 cm तथा 3 cm.

Ex.6 दो वृत्त अन्तः स्पर्श करते हैं। उनके क्षेत्रफलों का योग 116 π cm^2 है तथा उनके केन्द्रों के मध्य दूरी 6 cm है। वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात करो ।

Sol. माना R तथा r वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं जिनके केन्द्र क्रमशः O एवं O' है, तब



क्षेत्रफलों का योगफल = 116π cm^2

$\Rightarrow$ $\pi R^2 + \pi r^2 = 116\pi$

$\Rightarrow$ $R^2 + r^2 = 116$ ....(i)

केन्द्रों के मध्य दूरी = 6 cm

$\Rightarrow$ OO' = 6 cm

$\Rightarrow$ $R - r = 6$ ....(ii)

अब, $(R + r)^2 + (R - r)^2 = 2(R^2 + r^2)$

$\Rightarrow$ $(R + r)^2 + 36 = 2 \times 116$

[(i) एवं (ii) से]

$\Rightarrow$ $(R + r)^2 = (2 \times 116 - 36) = 196$

$\Rightarrow$ $R + r = 14$ .....(iii)

समीकरण (ii) व (iii) को हल करने पर,

R = 10 तथा r = 4.

अतः दिये गए वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 10 cm व 4 cm है ।

Ex.7 ताम्बे के एक तार को जब वर्ग के रूप में मोड़ा जाता है तो यह 484 cm^2 क्षेत्रफल परिबद्ध करता है। यदि समान तार को वृत्त के रूप में मोड़ा जाता है, तो इसके द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करो (π = 22/7 का उपयोग करें)

Sol. वर्ग का क्षेत्रफल = 484 cm^2

$\therefore$ वर्ग की भुजा $\sqrt{484}$ cm= 22 cm

$\left(\begin{array}{l}\because \text{ क्षेत्रफल} = (\text{भुजा})^2 \\ \therefore \text{ भुजा} = \sqrt{\text{क्षेत्रफल}}\end{array}\right)$

अतः वर्ग का परिमाप = 4 (भुजा)

= (4×22) cm = 88 cm

माना वृत्त की त्रिज्या r है, तब

वृत्त की परिधि = वर्ग का परिमाप

$\Rightarrow$ $2\pi r = 88$ $\Rightarrow 2 \times 22/7 \times r = 88 \Rightarrow r = 14$ cm

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$= \left\{\frac{22}{7} \times (14)^2\right\} cm^2 = 616\ cm^2$

Ex.8 एक तार 28 cm त्रिज्या के वृत्त के रूप में है। इसे पुनः वर्ग के रूप में मोड़ जाता है। वर्ग की भुजा की लम्बाई ज्ञात करो ।

Sol. तार की लम्बाई = वृत्त की परिधि

तार की लम्बाई $= \left\{2 \times \frac{22}{7} \times 28\right\}$ cm

[$C = 2\pi r$ के उपयोग से]

तार की लम्बाई = 176 cm ....(i)

माना वर्ग की भुजा x cm है, तब

वर्ग का परिमाप = तार की लम्बाई

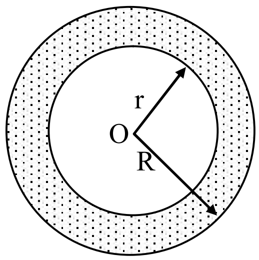
$\Rightarrow$ $4x = 176$ [(i) से]

$\Rightarrow$ $x = 44$ cm

अतः वर्ग की भुजा की लम्बाई 44 cm है।

Ex.9 एक दौड़ मार्ग एक वलय के रूप में जिसकी आन्तरिक परिधि 352 m है, तथा बाहरी परिधि 396 m है। मार्ग की चौड़ाई ज्ञात करो ।

Sol. माना वलय की बाहरी तथा आन्तरिक त्रिज्याएँ क्रमशः R मीटर तथा r मीटर है, तब



$2\pi R = 396$ तथा $2\pi r = 352$

$\Rightarrow$ $2 \times 22/7 \times R = 396$ तथा $2 \times 22/7 \times r = 352$

$\Rightarrow$ $R = 396 \times 7/22 \times 1/2$ तथा $r = 352 \times 7/22 \times 1/2$

$\Rightarrow$ $R = 63$ m तथा $r = 56$ m

अतः मार्ग की चौड़ाई = (R – r) मीटर

= (63 – 56) मीटर = 7 मीटर

Ex.10 एक वृत्ताकार मार्ग की आन्तरिक परिधि 220 m है। मार्ग सभी जगह 7m चौड़ा है। बाहरी वृत्त पर ₹ 2 प्रति मीटर की दर से तारबन्दी करवाने का खर्च ज्ञात करो । ($\pi = 22/7$ का उपयोग करें)

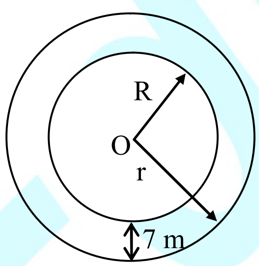
Sol. माना वृत्ताकार मार्ग की आन्तरिक तथा बाहरी त्रिज्याएँ क्रमशः r मीटर तथा R मीटर है, तब,

आन्तरिक परिधि = 220 मीटर

$\Rightarrow$ $2\pi r = 220 \Rightarrow 2 \times 22/7 \times r = 220 \Rightarrow r = 35$ m

चूँकि मार्ग सभी जगह 7 मीटर चौड़ा है, अतः

R = बाहरी त्रिज्या = r + 7 = (35 + 7) m = 42 m



$\therefore$ बाहरी परिधि

$= 2\pi R = 2 \times 22/7 \times 42$ m = 264 m

तारबन्दी की दर = ₹ 2 प्रति मीटर

$\therefore$ तारबन्दी का कुल खर्च

= (परिधि × दर)

= ₹ (264 × 2) = ₹ 528

Ex.11 एक साईकिल का पहिया 11 km दूरी तय करने में 5000 चक्कर लगाता है। पहिये का व्यास ज्ञात करो।

Sol. माना पहिये की त्रिज्या r cm है।

पहिये के द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी

$= \dfrac{\text{तय की गई दूरी}}{\text{चक्करों की संख्या}} = \dfrac{11}{5000}$ km

$= \dfrac{11}{5000} \times 1000 \times 100$ cm = 220 cm

$\therefore$ पहिये की परिधि = 220 cm

$\Rightarrow$ $2\pi r = 220$ cm $\Rightarrow$ $2 \times 22/7 \times r = 220$

$\Rightarrow$ r = 35 cm

$\therefore$ व्यास = 2r cm = (2× 35) cm = 70 cm

अतः पहिये का व्यास 70 cm है।

Ex.12 एक कार के पहियो का व्यास 80 cm है। 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर पूरे करेगा यदि कार 66 किमी प्रति घण्टे की गति से यात्रा करती है ?

Sol. कार की गति = 66 km/hr

$\therefore$ कार के द्वारा 1 घण्टे में तय की गई दूरी = 66 km

$\Rightarrow$ कार के द्वारा 10 मिनट में तय की गई दूरी

$= \dfrac{66}{60} \times 10$ km = 11 km = 11 × 1000 × 100 cm

हम जानते हैं,

कार के पहियों की त्रिज्या = 40 cm

$\therefore$ पहिये की परिधि

= 2 × 22/7 × 40 cm

$\Rightarrow$ कार के द्वारा तय की गई दूरी जब इसके पहिये एक चक्कर पूरे करते हैं ।

= 2 × 22/7× 40 cm

$\therefore$ 10 मिनट में पहियों के द्वारा लगाये गए चक्करों की संख्या

$= \dfrac{\text{कार के द्वारा 10 मिनट में तय की गई दूरी}}{\text{पहियों के द्वारा एक चक्कर पूरा करने में कार के द्वारा तय की गई दूरी}}$

$= \dfrac{11\times100\times100}{2\times\frac{22}{7}\times40} = \dfrac{11\times1000\times100\times7}{2\times22\times40} = 4375$

अतः 10 मिनट में प्रत्येक पहिया 4375 चक्कर लगाता है ।

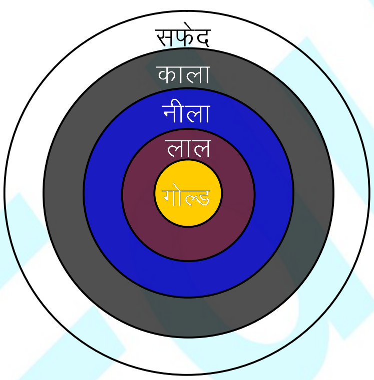
Ex.13 चित्रानुसार केन्द्र से बाहर की ओर धनुर्विधा के पाँच लक्ष्य गोल्ड, लाल, नीला, काला तथा सफेद इनके स्कोर क्षेत्र के साथ दिये गये हैं । गोल्ड स्कोर को निरूपित करने वाले क्षेत्र का व्यास 21 cm है तथा अन्य प्रत्येक पट्टी 10.5 cm चौड़ी है। पाँच स्कोर क्षेत्रों का प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

Sol. माना,

r = गोल्ड स्कोर को निरूपित करने वाले क्षेत्र की त्रिज्या = 10.5 cm

$\therefore r_1$ = गोल्ड तथा लाल स्कोर क्षेत्रफलों को निरूपित करने वाले क्षेत्र की त्रिज्या

= (10.5 + 10.5) cm = 21 cm = 2r cm



r_2 = गोल्ड, लाल तथा नीले स्कोर क्षेत्रफलों को निरूपित करने वाले क्षेत्र की त्रिज्या

= (21 + 10.5) cm = 31.5 cm = 3r cm

r_3 = गोल्ड, लाल, नीले तथा काले स्कोर क्षेत्रफलों को निरूपित करने वाले क्षेत्र की त्रिज्या

= (31.5 + 10.5) cm = 42 cm = 4r cm

r_4 = गोल्ड, लाल, नीले, काले तथा सफेद स्कोर क्षेत्रफल को निरूपित करने वाले क्षेत्र की त्रिज्या

= (42 + 10.5) cm = 52.5 cm = 5r cm

अब,

A_1 = गोल्ड स्कोर क्षेत्रफल को निरूपित करने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 = 22/7\times(10.5)^2 = 22/7\times10.5\times10.5$

$= 22\times1.5\times10.5 = 346.5\ cm^2$

A_2 = लाल स्कोर क्षेत्रफल को निरूपित करने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \pi(2r)^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2 = 3A_1 = 3\times346.5\ cm^2$

$= 1039.5\ cm^2$

A_3 = नीले स्कोर क्षेत्रफल को निरूपित करने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \pi(3r)^2 - \pi(2r)^2 = 9\pi r^2 - 4\pi r^2 = 5\pi r^2 = 5A_1$

$= 5\times346.5\ cm^2 = 1732.5\ cm^2$

A_4 = काले स्कोर क्षेत्रफल को निरूपित करने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \pi(4r)^2 - \pi(3r)^2 = 7\pi r^2$

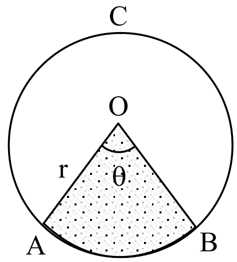
$= 7A_1 = 7\times346.5\ cm^2 = 2425.5\ cm^2$

A_5 = सफेद स्कोर क्षेत्रफल को निरूपित करने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \pi(5r)^2 - \pi(4r)^2 = 9\pi r^2$

$= 9A_1 = 9\times346.5\ cm^2 = 3118.5\ cm^2$

वृत्त का त्रिज्यखण्ड



◈ **लघु त्रिज्यखण्ड :**

किसी वृत्त का एक त्रिज्यखण्ड लघु त्रिज्यखण्ड कहलाता है यदि वृत्त का लघु चाप इसकी परिधि का भाग हो ।

चित्र में त्रिज्यखण्ड OAB लघुत्रिज्यखण्ड है।

◈ **दीर्घ त्रिज्यखण्ड :**

किसी वृत्त का एक त्रिज्यखण्ड दीर्घ त्रिज्यखण्ड कहलाता है यदि वृत्त का दीर्घ चाप इसकी परिधि का योग हो ।

चित्र में त्रिज्यखण्ड OACB दीर्घ त्रिज्यखण्ड है।

याद रखने के लिए कुछ महत्वपूर्ण बिन्दु निम्नलिखित है:

(i) एक लघुत्रिज्यखण्ड वृत्त के केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है जबकि दीर्घखण्ड कोई कोण नहीं रखता है।

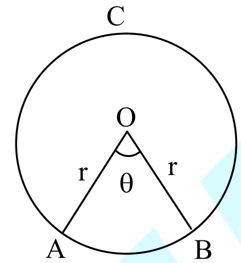
(ii) किसी वृत्त के दीर्घ तथा लघु त्रिज्यखण्डो के चापों का योग वृत्त की परिधि के बराबर होता है।

(iii) किसी वृत्त के दीर्घ तथा लघु त्रिज्यखण्डो के क्षेत्रफलों का योगफल वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

(iv) एक त्रिज्यखण्ड की परिसीमा वृत्त का एक चाप तथा दो त्रिज्याएँ रखती है।

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

यदि चाप वृत्त के केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है, तब इसके चाप की लम्बाई $\frac{\theta}{180} \times \pi r$ होगी।



अतः, r त्रिज्या के एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड जो केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है, के चाप की लम्बाई ℓ होगी

$$\ell = \frac{\theta}{180} \times \pi r \qquad ....(i)$$

यदि चाप केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है, तब संगत त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$ होगा ।

इस प्रकार r, त्रिज्या के एक वृत्त में θ कोण के एक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल A होगा

$$A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{\theta}{360} \times (\text{वृत्त का क्षेत्रफल}) \qquad ....(ii)$$

याद रखने के लिए कुछ उपयोगी परिणाम :

(i) मिनट की सुई के द्वारा 60 मिनट में बनाया गया कोण $= 360^o$

$\therefore$ मिनट की सुई के द्वारा एक मिनट में बनाया गया कोण $= \left(\frac{360}{60}\right)^o = 6^o$

इस प्रकार, मिनट की सुई एक मिनट में 6^o कोण से घूमती है

(ii) घण्टे की सुई के द्वारा 12 घण्टों में बनाया गया कोण $= 360^o$

$\therefore$ घण्टे की सुई के द्वारा एक घण्टे में बनाया गया कोण $= \left(\frac{360}{12}\right)^o = 30^o$

❖ **उदाहरण** ❖

Ex.14 21 cm त्रिज्या के एक वृत्त से एक त्रिज्यखण्ड काटा जाता है । त्रिज्यखण्ड का कोण 150^o है। इसके चाप की लम्बाई तथा क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Sol. त्रिज्या r के एक वृत्त में θ कोण के त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई ℓ तथा क्षेत्रफल A क्रमशः

$l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ तथा $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ हैं।

यहाँ, r = 21 cm तथा θ = 150

$$\therefore l = \left\{\frac{150}{360}\times 2\times\frac{22}{7}\times 21\right\} \text{ cm} = 55 \text{ cm}$$

तथा $A = \left\{\frac{150}{360}\times\frac{22}{7}\times(21)^2\right\} \text{cm}^2 = \frac{1155}{2} \text{ cm}^2$

$= 577.5 \text{ cm}^2$

Ex.15 उस वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी त्रिज्या 14 cm है तथा त्रिज्यखण्ड का कोण 45° है।

Sol. हम जानते हैं कि r त्रिज्या के एक वृत्त में θ कोण के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल A निम्न प्रकार दिया जाता है कि

$$A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

यहाँ, r = 14 cm तथा θ = 45

$$\therefore A = \left\{\frac{45}{360}\times\frac{22}{7}\times(14)^2\right\} \text{cm}^2$$

$$= \left\{\frac{1}{8}\times\frac{22}{7}\times 14\times 14\right\} \text{cm}^2 = 77 \text{ cm}^2$$

Ex.16 चित्र में त्रिज्या 7 cm एवं 3.5 cm के दो संकेन्द्रीय वृत्तों के त्रिज्यखण्ड दर्शाए गए हैं। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

(π = 22/7 से).

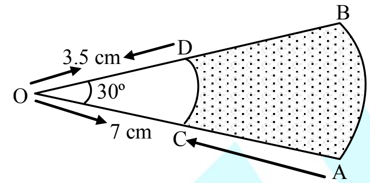
Sol. माना A_1 एवं A_2 क्रमशः त्रिज्यखण्डों OAB तथा OCD के क्षेत्रफल हैं । तब A_1 = 7 cm त्रिज्या के वृत्त के 30º कोण के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$\Rightarrow A_1 = \left\{\frac{30}{360}\times\frac{22}{7}\times 7^2\right\} \text{cm}^2$$

$$\left[A = \frac{\theta}{360}\times\pi r^2 \text{ के उपयोग से}\right]$$

$\Rightarrow A_1 = 77/6 \text{ cm}^2$

A_2 = 3.5 cm त्रिज्या के वृत्त के 30º कोण के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल



$$\Rightarrow A_2 = \left\{\frac{30}{360}\times\frac{22}{7}\times(3.5)^2\right\} \text{cm}^2$$

$$\Rightarrow A_2 = \left\{\frac{1}{12}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\right\} \text{cm}^2 = \frac{77}{24} \text{cm}^2$$

∴ छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= A_1 - A_2$

$= \left(\frac{77}{6} - \frac{77}{24}\right) \text{cm}^2$

$= \frac{77}{24} \times (4 - 1) \text{ cm}^2 = 77/8 \text{ cm}^2 = 9.625 \text{ cm}^2$

Ex.17 एक दोलक 30º कोण से दोलन करता है तथा 8.8 cm लम्बा चाप बनाता है। दोलक की लम्बाई ज्ञात करो ।

Sol. यहाँ, θ = 30º, l = चाप = 8.8 cm

$$\therefore l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r \Rightarrow 8.8 = \frac{30}{360} \times 2 \times 22/7 \times r$$

$$\Rightarrow r = \frac{8.8\times 6\times 7}{22} \text{ cm} = 16.8 \text{ cm}$$

Ex.18 एक घड़ी की मिनट की सुई की लम्बाई 14 cm है। एक मिनट में मिनट की सुई के द्वारा तय किया गया क्षेत्रफल ज्ञात करो । (π = 22/7 लें)

Sol. स्पष्टतः, एक घड़ी की मिनट की सुई इसकी लम्बाई अर्थात् 14 cm के बराबर त्रिज्या का वृत्त बनाती है।

चूँकि मिनट की सुई एक मिनट में 6º कोण से घूमती है। अतः मिनट की सुई के द्वारा एक मिनट में तय किया गया क्षेत्रफल 14 cm त्रिज्या के एक वृत्त में 6º कोण के त्रिज्यखण्ड के क्षेत्रफल के बराबर होगा । अतः अभीष्ट क्षेत्रफल A

$$A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad A = \left\{\frac{6}{360}\times\frac{22}{7}\times(14)^2\right\} \text{cm}^2$$

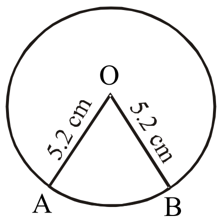
$$\Rightarrow A = \left\{\frac{1}{60}\times\frac{22}{7}\times 14\times 14\right\} cm^2 = \frac{154}{15}\ cm^2$$

$$= 10.26\ cm^2$$

Ex.19 5.2 cm त्रिज्या के वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड का परिमाप 5.2 cm है। त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

Sol. माना OAB दिया गया त्रिज्यखण्ड है, तब

त्रिज्यखण्ड OAB का परिमाप = 16.4 cm



$\Rightarrow$ OA + OB + चाप AB = 16.4 cm

$\Rightarrow$ 5.2 + 5.2 + चाप AB = 16.4

$\Rightarrow$ चाप AB = 6 cm $\Rightarrow l = 6$ cm

$\therefore$ त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} lr$

$$= \frac{1}{2}\times 6\times 5.2\ cm^2 = 15.6\ cm^2$$

Ex.20 एक घड़ी की मिनट की सुई 10 cm है। 9 AM तथा 9.35 AM के मध्य मिनट की सुई के द्वारा तय किया घड़ी के फलक का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

Sol. मिनट की सुई के द्वारा एक मिनट में बनाया गया कोण = 6^o

$\therefore$ 35 मिनट में मिनट की सुई के द्वारा बनाया गया कोण = $(6 \times 35)^o = 210^o$

$\therefore$ मिनट की सुई के द्वारा 35 मिनट में तय किया गया क्षेत्रफल

= त्रिज्या 10 cm के वृत्त में 210^o कोण के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \left\{\frac{210}{360}\times\frac{22}{7}\times(10)^2\right\} cm^2 = 183.3\ cm^2$$

$\left[A = \frac{\theta}{360^o}\times \pi r^2\right.$ के उपयोग से$\left.\right]$

Ex.21 एक घड़ी की छोटी तथा बड़ी सुई की लम्बाई क्रमशः 4 cm तथा 6 cm है। 2 दिनों में उनकी नोक के द्वारा तय की गई दूरियों का योगफल ज्ञात करो। ($\pi = 22/7$ लें)

Sol. 2 दिनों में छोटी सुई 4 चक्कर पूर्ण करेगी ।

$\therefore$ इसकी नोक के द्वारा तय की गई दूरी

= 4 (त्रिज्या 4 cm के वृत्त की परिधि)

$$= 4 \times \left(2\times\frac{22}{7}\times 4\right) cm = \frac{704}{7}\ cm$$

2 दिनों में, बड़ी सुई 48 चक्कर पूर्ण करेगी ।

$\therefore$ इसकी नोक के द्वारा तय की गई दूरी

= 48 (त्रिज्या 6 cm के वृत्त की परिधि)

$$= 48 \times \left(2\times\frac{22}{7}\times 6\right) cm = \frac{12672}{7}\ cm$$

अतः,

घड़ी की दो सुईयों की नोकों के द्वारा तय की गई दूरी का योग

$$= \left(\frac{704}{7}+\frac{12672}{7}\right) cm = 1910.57\ cm$$

Ex.22 एक प्रत्यास्थ बेल्ट 5 cm त्रिज्या की पुली की रिम के चारों ओर स्थित है। बेल्ट के एक बिन्दु को पुली के केन्द्र O से सीधे दूर 0 से 10 cm पर एक बिन्दु P तक खींचा जाता है। बेल्ट की लम्बाई ज्ञात करो

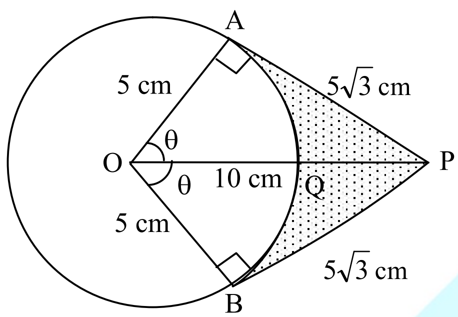
जो पुली की रिम के सम्पर्क में है, तथा छायांकित क्षेत्रफल भी ज्ञात करो ।

Sol. संलग्न चित्र में माना $\angle AOP = \angle BOP = \theta$ है।

स्पष्टतः, बेल्ट का AB भाग पुली की रिम के सम्पर्क में नहीं है। समकोण त्रिभुज OAP में

$$\cos\theta = \frac{OA}{OP} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 2\theta = 120^\circ$$



$$\therefore \text{ चाप } AB = \frac{120^\circ \times 2 \times \pi \times 5}{360} \text{ cm} = \frac{10\pi}{3} \text{ cm}$$

[$\ell = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ के उपयोग से]

अतः, बेल्ट की लम्बाई जो पुली की रिम के सम्पर्क में है

= रिम की परिधि – चाप AB की लम्बाई

$$= 2\pi \times 5 \text{ cm} - \frac{10\pi}{3} \text{ cm} = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}$$

अब,

त्रिज्यखण्ड OAQB का क्षेत्रफल $= \frac{120}{360} \times \pi \times 5^2 \text{ cm}^2$

$$= \frac{25\pi}{3} \text{ cm}^2 \left(\text{क्षेत्रफल } = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \text{ के उपयोग से}\right)$$

चतुर्भुज OAPB का क्षेत्रफल = 2 (ΔOAP का क्षेत्रफल)

$= 2 \times (1/2 \times OA \times AP)$

$= 5 \times 5\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$[\because OP^2 = OA^2 + AP^2 \Rightarrow AP = \sqrt{100-25} = 5\sqrt{3}\ ]$

$= 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

अतः,

छायांकित क्षेत्रफल = चतुर्भुज OAPB का क्षेत्रफल – त्रिज्यखण्ड OAQB का क्षेत्रफल

$$= \left(25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{3}\right) \text{cm}^2 = \frac{25}{3}(3\sqrt{3} - \pi) \text{ cm}^2$$

Ex.23 किसी वृत्त के एक चाप की लम्बाई 5π cm है तथा परिबद्ध त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $20\pi \text{ cm}^2$ है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो।

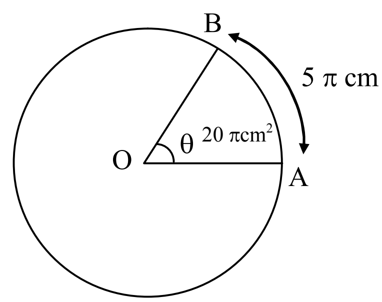
Sol. माना वृत्त की त्रिज्या r cm है तथा 5π लम्बाई का चाप AB वृत्त के केन्द्र O पर θ कोण अन्तरित करता है, तब,

चाप $AB = 5\pi$ cm तथा

त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल $= 20\pi \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{360} \times 2\pi r = 5\pi \text{ तथा } \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = 20\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\theta}{360} \times \pi r^2}{\frac{\theta}{360} \times 2\pi r} = \frac{20\pi}{5\pi}$$



$\Rightarrow r/2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 8$ cm

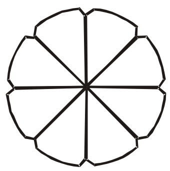
विकल्पतः - क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} lr \Rightarrow 20\pi$

$$= \frac{1}{2} \times 5\pi \times r = 8 \text{ cm}$$

Ex.24 एक छाते में 8 शिराएँ है जो समान दूरी पर स्थित है, छाते को 45 cm त्रिज्या का समतल वृत्त मानते हुए छत की दो क्रमागत शिराओं के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Sol. चूँकि शिराएँ समान दूरी पर स्थित है, इसलिए,

दो क्रमागत शिराओं के द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण $= \frac{360^o}{8} = 45^o$



इस प्रकार,

दो क्रमागत शिराओं के मध्य क्षेत्रफल

= त्रिज्खण्ड कोण 45° तथा त्रिज्या 45 cm के वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$= \left\{\frac{45}{360} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45\right\} cm^2$

$\left(\text{क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \text{ के उपयोग से}\right)$

$= \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45\ cm^2 = 795.53\ cm^2$

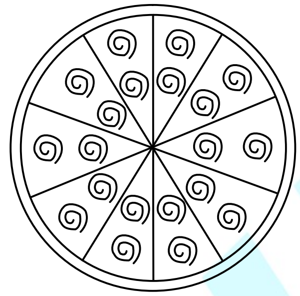
Ex.25 एक जड़ाऊ पिन चाँदी के तार से 35 mm व्यास के वृत्त के रूप में बना है। तार 5 व्यास बनाने में भी प्रयुक्त होता है जो वृत्त को 10 समान त्रिज्यखण्डों में चित्रानुसार विभक्त करते हैं। ज्ञात कीजिए:

(i) आवश्यक चाँदी के तार की कुल लम्बाई

(ii) जड़ाऊ पिन के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

Sol. (i) चाँदी के तार की कुल लम्बाई,

= त्रिज्या 35 /2 mm के वृत्त की परिधि + पाँच व्यासों की लम्बाई



$= 2\pi \times \frac{35}{2} + 5 \times 35$ mm

$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} + 175\right)$ mm

= 285 mm

(ii) वृत्त 10 समान त्रिज्यखण्डों में विभाजित है, इसलिए जडाऊ पिन के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

= 1/10 (वृत्त का क्षेत्रफल)

$= 1/10 \times \pi \times (35/2)^2\ cm^2$

$= \frac{1}{10} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}\ mm^2$

$= \frac{385}{4}\ mm^2$

➤ वृत्तखण्ड एवं इसका क्षेत्रफल

◈ **वृत्तखण्ड :**

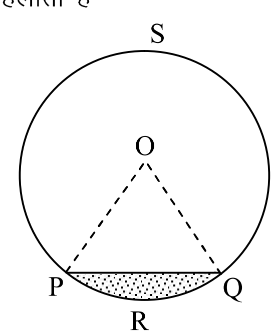
एक चाप तथा एक जीवा के द्वारा परिबद्ध क्षेत्र वृत्तखण्ड कहलाता है।

◈ **लघु वृत्तखण्ड:**

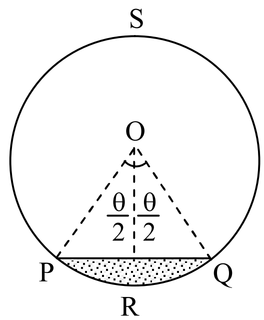
यदि वृत्तखण्ड की परिसीमा वृत्त का लघु चाप है, तब संगत वृत्तखण्ड लघुवृत्तखण्ड कहलाता है।

◈ **दीर्घवृत्त खण्ड:**

किसी वृत्त के दीर्घ चाप के संगत वृत्तखण्ड दीर्घ वृत्तखण्ड कहलाता है



त्रिज्यखण्ड OPRQ का क्षेत्रफल = वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल + ΔOPQ का क्षेत्रफल



$\Rightarrow$ वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल

$$= \left\{\frac{\pi}{360}\times\theta - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\} r^2$$

Ex.26 उस वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके त्रिज्यखण्ड का कोण 120º दिया गया है, तथा वृत्त की त्रिज्या 21 cm है। (π = 22/7 लें)

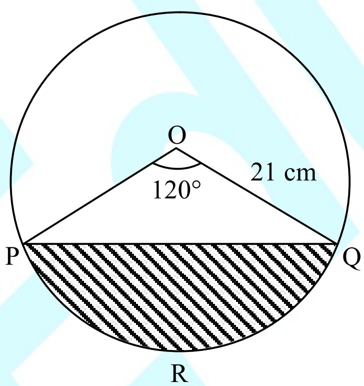
Sol. यहाँ, r = 21 cm तथा π = 120

$\therefore$ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \left\{\frac{\pi}{360}\times\theta - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\} r^2$$

$$= \left\{\frac{22}{7}\times\frac{120}{360} - \sin 60^\circ\cos 60^\circ\right\}(21)^2\ cm^2$$

$$= \left\{\frac{22}{21} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}(21)^2\ cm^2$$

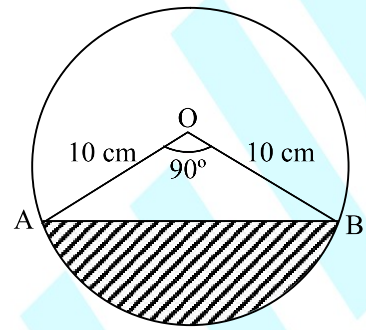


$$= \left\{\frac{22}{21}\times(21)^2 - (21)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\right\} cm^2$$

$$= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right) cm^2 = \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})\ cm^2$$

Ex.27 10 cm त्रिज्या के एक वृत्त की एक जीवा AB वृत्त के केन्द्र पर समकोण बनाती है। दीर्घ तथा लघु वृत्तखण्ड़ो के क्षेत्रफल ज्ञात करो । (π = 3.14 लें)

Sol. हम जानते हैं कि r त्रिज्या के वृत्त में θº कोण के लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल निम्न द्वारा दिया जाता है।



$$A = \left\{\frac{\pi\theta}{360} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\} r^2$$

यहाँ, r = 10 तथा θ = 90º

$$\therefore\ A = \left\{\frac{3.14\times 90}{4} - \sin 45^\circ\cos 45^\circ\right\}(10)^2\ cm^2$$

$$\Rightarrow\ A = \left\{\frac{3.14}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\ 10)^2\ cm^2$$

$$\Rightarrow\ A = \{3.14\times 25 - 50\}cm^2 = (78.5 - 50)\ cm^2$$

$= 28.5\ cm^2$

दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

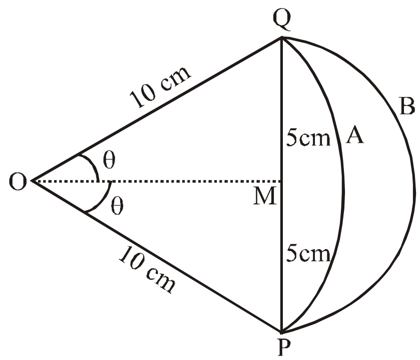
= वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$= \{3.14\times 10^2 - 28.5\}\ cm^2$

$= (314 - 28.5)\ cm^2 = 285.5\ cm^2$

Ex.28 चित्र में दो चाप, A तथा B दर्शाये गये हैं । चाप A उस वृत्त का भाग है जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या PQ है। चाप B उस वृत्त का भाग है, जिसका केन्द्र M तथा त्रिज्या PM है, जहाँ M, PQ का मध्य बिन्दु है। प्रदर्शित कीजिए कि दो चापों से परिबद्ध क्षेत्रफल $25\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)\ cm^2$ है।

Sol. चाप B तथा जीवा PQ के द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल = त्रिज्या 5 cm के अर्धवृत्त का क्षेत्रफल



$= 1/2 \times \pi \times 5^2 \text{ cm}^2 = \frac{25\pi}{2} \text{ cm}^2$

माना $\angle MOQ = \angle MOP = \theta$

ΔOMP में,

$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 30^\circ \Rightarrow \angle POQ = 2\theta = 60^\circ$

$\therefore$ चाप A तथा जीवा PQ के द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

= 10 cm त्रिज्या तथा 60º त्रिज्यखण्ड कोण रखने वाले वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

$= \left\{\frac{\pi \times 60}{360} - \sin 30^\circ \times \cos 30^\circ\right\} \times 10^2 \text{ cm}^2$

$\left[\because A = \left\{\frac{\pi\theta}{360} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\} r^2\right]$

$= \left\{\frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right\} \text{cm}^2$

अतः,

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \left\{\frac{25\pi}{2} - \left(\frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right)\right\} \text{cm}^2$

$\Rightarrow$ अभीष्ट क्षेत्र $= \left\{25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{6}\right\} \text{ cm}^2$

$= 25\left\{\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right\} \text{ cm}^2$

➤ समतल आकृतियों के समूह का क्षेत्रफल

Ex.29 एक डॉटबोर्ड की वलय I का आन्तरिक तथा बाह्य व्यास क्रमशः 32 cm तथा 34 cm है। तथा वलय II के क्रमशः 19cm तथा 21 cm है। इन दोनों वलयों का कुल क्षेत्रफल क्या है ?

Sol. वलय I का क्षेत्रफल $= (\pi \times 17^2 - \pi \times 16^2) \text{ cm}^2$

$= \frac{22}{7} \times (17^2 - 16^2) \text{ cm}^2$

$= \frac{22}{7} \times (17 + 16)(17 - 16) \text{ cm}^2$

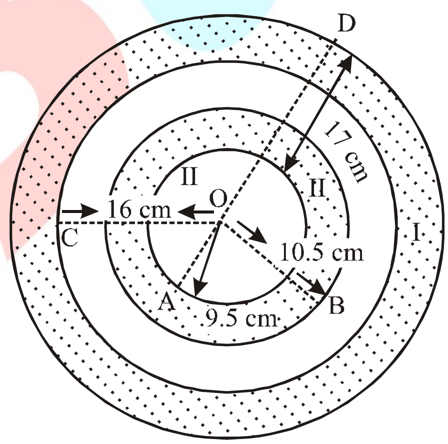
$= \frac{22}{7} \times 33 \text{ cm}^2$

वलय II का क्षेत्रफल $= (\pi \times 10.5^2 - \pi \times 9.5^2) \text{ cm}^2$

$= \pi (10.5^2 - 9.5^2) \text{ cm}^2$

$= \frac{22}{7} \times (10.5 + 9.5)(10.5 - 9.5) \text{ cm}^2$

$= \frac{22}{7} \times 20 \text{ cm}^2$



अतः,

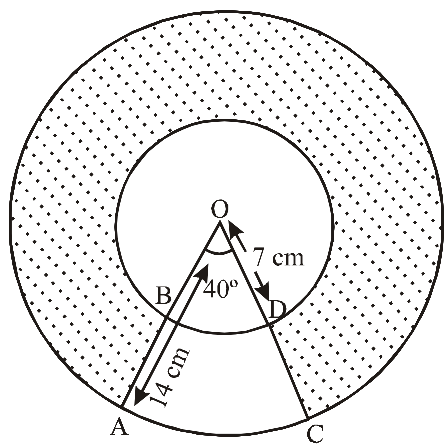
दोनों वलयों का कुल क्षेत्रफल

$= \frac{22}{7} \times 33 + \frac{22}{7} \times 20 \text{ cm}^2$

$= \frac{22}{7} \times (33 + 20) \text{ cm}^2 = 166.57 \text{ cm}^2$

Ex.30 चित्र में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो जहाँ केन्द्र O के साथ दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 cm तथा 14 cm है तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है।

Sol.



क्षेत्र ABDC का क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड AOC का क्षेत्रफल – त्रिज्यखण्ड BOD का क्षेत्रफल

$$=\left(\frac{40}{360}\times\frac{22}{7}\times14\times14-\frac{40}{360}\times\frac{22}{7}\times7\times7\right)\ cm^2$$

$$=\left(\frac{1}{9}\times22\times14\times2-\frac{1}{9}\times22\times7\times1\right)\ cm^2$$

$$=\frac{22}{9}=\frac{154}{3}\times(28-7)\ cm^2=\ cm^2$$

वृत्तीय वलय का क्षेत्रफल

$$=\left(\frac{22}{7}\times14\times14-\frac{22}{7}\times7\times7\right)cm^2$$

$= (22 \times 14 \times 2 - 22 \times 7 \times 1)cm^2$

$= 22 \times 21\ cm^2$

$= 462\ cm^2$

अतः,

अतः अभीष्ट छायांकित क्षेत्रफल

$$=\left(462-\frac{154}{3}\right)\ cm^2$$

$$=\frac{1232}{3}\ cm^2 = 410.67\ cm^2$$

Ex.31 AB तथा CD क्रमशः दो समकेन्द्रीय वृत्तों के व्यास है। जिनकी त्रिज्याऐं 21 cm तथा 7 cm तथा केन्द्र O है। यदि $\angle AOB = 30^o$ है, तो छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो

Sol. छायांकित क्षेत्रफल

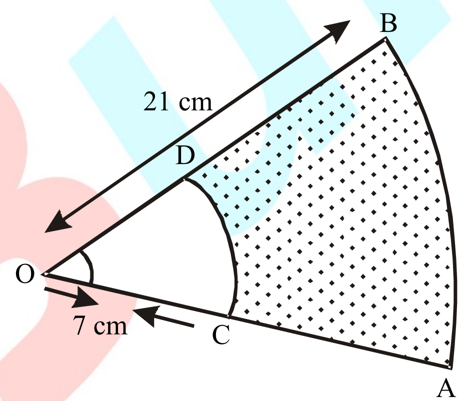
= त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल

– त्रिज्यखण्ड OCD का क्षेत्रफल

⇒ छायांकित क्षेत्रफल

$$=\left(\frac{30}{360}\times\frac{22}{7}\times21\times21-\frac{30}{360}\times\frac{22}{7}\times7\times7\right)\ cm^2$$

$$=\frac{30}{360}\times\frac{22}{7}\times(21\times21-7\times7)\ cm^2$$

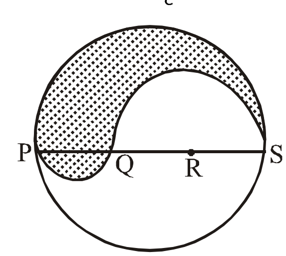


$$=\frac{11}{42}\times(21+7)\times(21-7)\ cm^2$$

$$=\frac{11}{42}\times 28\times 14\ cm^2 = 102.67\ cm^2$$

Ex.32 PQRS एक वृत्त का व्यास है जिसकी त्रिज्या 6 cm है। लम्बाईयाँ PQ, QR तथा RS समान है। चित्रानुसार PQ एवं QS को व्यास मानकर अर्धवृत्त बनाये जाते हैं । छायांकित क्षेत्र का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

Sol. PS = त्रिज्या 6 cm के वृत्त का व्यास = 12 cm



∴ PQ = QR = RS = 12/3 = 4 cm

QS = QR + RS = (4 + 4) cm = 8 cm

अतः अभीष्ट परिमाप

= त्रिज्या 6 cm के अर्धवृत्त का चाप

+ त्रिज्या 4 cm के अर्धवृत्त का चाप

+ त्रिज्या 2 cm के अर्धवृत्त का चाप

$= (\pi \times 6 + \pi \times 4 + \pi \times 2)$ cm $= 12\pi$ cm

अभीष्ट क्षेत्रफल = PS व्यास वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल + PQ व्यास वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल – QS व्यास वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times(6)^2 + \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times 2^2 - \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times(4)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\ (6^2 + 2^2 - 4^2)$$

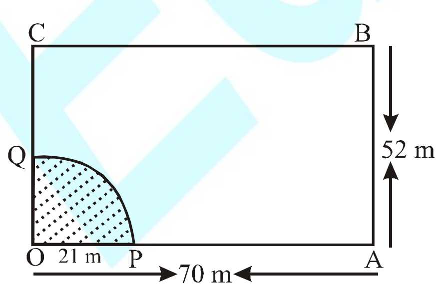
$$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times 24$$

$$= \frac{264}{7} = 37.71\ \text{cm}^2$$

Ex.33 70 m × 52 m माप के एक आयताकार खेत के अन्दर चरने के लिए एक घोड़ा 21 m लम्बी रस्सी से एक कोने में बन्धा हुआ है। यह कितना क्षेत्रफल चर सकता है ?

Sol. छायांकित भाग घोड़े के द्वारा चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल को व्यक्त करता है। स्पष्टतः छायांकित भाग r = 21 m त्रिज्या के एक वृत्त के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल है ।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2$



$\Rightarrow$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \left\{\frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times(21)^2\right\}$ cm^2

$$= \frac{693}{2}\ \text{cm}^2 = 346.5\ \text{cm}^2$$

Ex.34 एक कागज एक आयत ABCD के रूप में हैं। जहाँ AB = 20 cm तथा BC = 14 cm है। BC को व्यास मानकर एक अर्धवृत्तीय भाग काटा जाता है । शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

Sol. आयत ABCD की लम्बाई = AB = 20 cm

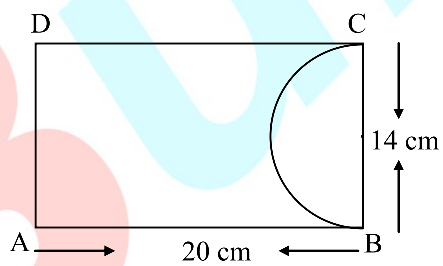
आयत ABCD की चौड़ाई = BC = 14 cm

$\therefore$ आयत ABCD का क्षेत्रफल = (20 × 14) cm^2

= 280 cm^2

अर्धवृत्त का व्यास = BC = 14 cm

$\therefore$ अर्धवृत्त की त्रिज्या = 7 cm



आयत ABCD से काटे गए अर्धवृत्तीय भाग का क्षेत्रफल

$= 1/2\ (\pi r^2) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times 7^2\right)$ cm^2 = 77 cm^2

$\therefore$ शेष भाग का क्षेत्रफल

= आयत ABCD का क्षेत्रफल – अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल

= (280 – 77) cm^2 = 203 cm^2

Ex.35 चित्र में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो [$\pi = 3.14$ के उपयोग से]

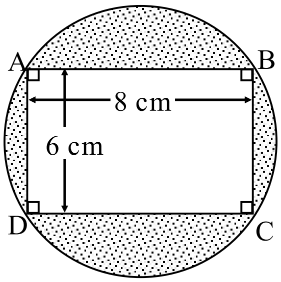
Sol. स्पष्टतः वृत्त का व्यास = आयत ABCD का विकर्ण BD

$\therefore$ व्यास $= BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$ cm = 10 cm

माना r वृत्त की त्रिज्या है, तब

r = (10/2) cm = 5 cm



आयत ABCD का क्षेत्रफल = AB × BC

$= (8 \times 6)\ cm^2 = 48\ cm^2$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = 3.14 \times (5)^2\ cm^2$

$= 78.50\ cm^2$

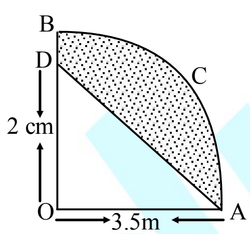
अतः छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – आयत ABCD का क्षेत्रफल

$= (78.50 - 48)\ cm^2 = 30.50\ cm^2$

Ex.36 चित्र में AOBCA त्रिज्या 3.5 cm तथा केन्द्र O वाले वृत्त के एक चतुर्थांश को प्रदर्शित करता है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

($\pi = 22/7$ लें)

Sol. चतुर्थांश AOBCA का क्षेत्रफल



$= \frac{1}{4}\pi r^2 = 1/4 \times 22/7 \times (3.5)^2$

$= 1/4 \times 22/7 \times 7/2 \times 7/2$

$= 27/8\ cm^2 = 9.625\ cm^2$

ΔAOD का क्षेत्रफल = 1/2 × आधार × ऊँचाई

$= 1/2\ (OA \times OB) = 1/2\ [3.5 \times 2]\ cm^2$

$= 3.5\ cm^2$

फलतः,

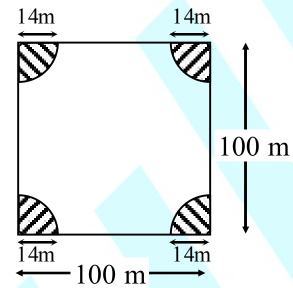
अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= चतुर्थांश का क्षेत्रफल –ΔAOD का क्षेत्रफल

$= (9.625 - 3.5)\ cm^2 = 6.125\ cm^2$

Ex.37 एक वर्गाकार पार्क की प्रत्येक भुजा 100 m है। पार्क के प्रत्येक कोने में चित्रानुसार 14 m त्रिज्या के एक चतुर्थांश के रूप में फूलवारी है। पार्क के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो । ($\pi = 22/7$ लें).

Sol. 14 m त्रिज्या के वृत्त के प्रत्येक चतुर्थांश का क्षेत्रफल



$= 1/4\ (\pi r^2) = 1/4 \times 22/7 \times 14 \times 14$ [$\because$ r = 14]

$= 154\ m^2$

$\therefore$ 4 चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= (4 \times 154)\ m^2 = 616\ m^2$

100 m लम्बी भुजा वाले वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल

$= (100 \times 100)\ m^2 = 10,000\ m^2$

अतः,

पार्क के शेष भाग का क्षेत्रफल

$= 10,000 - 616 = 9384\ m^2$

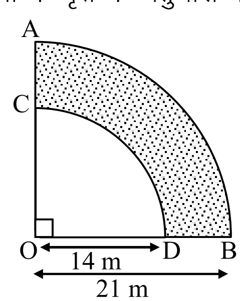
Ex.38 ABCD एक फूलवारी है । यदि OA = 21 cm तथा OC = 14 m है, तब फुलवारी का क्षेत्रफल ज्ञात करो। [$\pi = 22/7$ लें]

Sol. OA = R = 21 m तथा OC = r = 14 m

$\therefore$ फूलवारी का क्षेत्रफल

= R त्रिज्या के वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल

– r त्रिज्या के वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल



$= \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4}(R^2 - r^2)$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7}(21^2 - 14^2)\ cm^2$

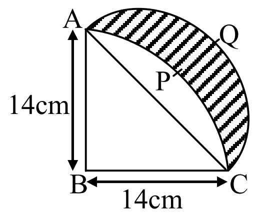
[$\because$ R = 21 m and r = 14 m]

$= \left\{\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times (21+14)\ (21-14)\right\}\ m^2$

$= \left\{\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 35 \times 7\right\} m^2 = 192.5\ m^2$

Ex.39 ABCP एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 14 cm है, का चतुर्थांश है। AC को व्यास मानकर एक अर्धवृत्त खींचा जाता है, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Sol. समकोण त्रिभुज ABC में



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = 14^2 + 14^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{2 \times 14^2} = 14\sqrt{2}$ cm

$\Rightarrow \frac{AC}{2} = \frac{14\sqrt{2}}{2}$ cm $= 7\sqrt{2}$ cm

अब, अभीष्ट क्षेत्रफल

= क्षेत्रफल APCQA

= क्षेत्रफल ACQA – क्षेत्रफल ACPA

= क्षेत्रफल ACQA – (क्षेत्रफल ABCPA – ΔABC का क्षेत्रफल)

= (AC व्यास के अर्धवृत्त का क्षेत्रफल)

– [AB त्रिज्या के वृत्त का चतुर्थांश का क्षेत्रफल – ΔABC का क्षेत्रफल]

$= \left[\frac{1}{2}\left\{\frac{22}{7} \times (7\sqrt{2})^2\right\} - \left\{\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14^2 - \frac{1}{2} \times 14 \times 14\right\}\right]$

$= \left\{\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 49 \times 2 - \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 + \frac{1}{2} \times 14 \times 14\right\} cm^2$

$= (154 - 154 + 98)\ cm^2 = 98\ cm^2$

Ex.40 58 cm माप की भुजा के एक वर्गाकार लॉन के दो तरफ वृत्ताकार सिरे बने हैं । प्रत्येक वृत्त का केन्द्र वर्ग के विकर्णो का प्रतिच्छेदन बिन्दु है। सम्पूर्ण लॉन का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

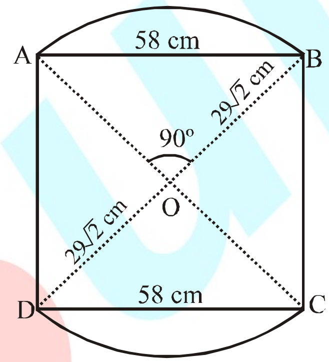
Sol. वर्ग के विकर्ण की लम्बाई

$= \sqrt{58^2 + 58^2} = 58\sqrt{2}$ cm

अतः विकर्णो के प्रतिच्छेदन बिन्दु पर केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $29\sqrt{2}$ cm होगी।

अब, एक वृत्ताकार सिरे का क्षेत्रफल

= त्रिज्या $29\sqrt{2}$ cm के वृत्त के 90^o कोण के वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल



$= \left\{\frac{22}{7} \times \frac{90}{360} - \sin 45^o \cos 45^o\right\} \times (29\sqrt{2})^2\ cm^2$

$\left(\therefore \text{क्षेत्रफल} = \left\{\frac{\pi\theta}{360} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\} r^2\right)$

$= \left(\frac{11}{14} - \frac{1}{2}\right) \times 29 \times 29 \times 2\ cm^2$

$= 29 \times 29 \times 2 \times \frac{4}{14} cm^2 = \frac{3364}{7}\ cm^2$

∴ सम्पूर्ण लॉन का क्षेत्रफल

= वर्ग का क्षेत्रफल + 2 (वृत्ताकार सिरे का क्षेत्रफल)

$= \left\{58 \times 58 + 2 \times \frac{3364}{7}\right\} cm^2$

$= \left\{3364 + 2 \times \frac{3364}{7}\right\} cm^2$

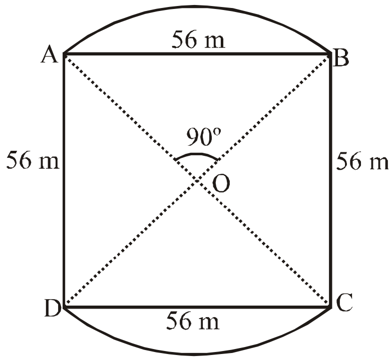
$= 3364\left(1 + \frac{2}{7}\right)\ cm^2 = 3364 \times 9/7\ cm^2$

$= 4325.14\ cm^2$

Ex.41 चित्र में 56 cm भुजा के एक वर्गाकार लॉन ABCD की दो भुजाओं पर दो वृत्ताकार फूलवारियाँ दर्शायी गई है। यदि प्रत्येक वृत्ताकार फूलवारी का केन्द्र वर्गाकार लॉन के विकर्णो का प्रतिच्छेदन बिन्दु है, तब लॉन तथा फूलवारियो के क्षेत्रफलों का योगफल ज्ञात करो ।

Sol. यहाँ,

$AC = BD = \sqrt{56^2 + 56^2} = 56\sqrt{2}$ m



$\therefore$ OA = OB = 1/2 AC = $58\sqrt{2}$ m

अतः विकर्णो के प्रतिच्छेदन बिन्दु पर केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $28\sqrt{2}$ cm है।

अब,

एक वृत्ताकार सिरे का क्षेत्रफल = त्रिज्या $28\sqrt{2}$ m के वृत्त के 90° कोण के वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \left\{\frac{22}{7} \times \frac{90}{360} - \sin 45^\circ \cos 45^\circ\right\} \times (28\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2$$

$$\left(\text{क्षेत्रफल } = \left(\frac{\pi\theta}{360} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)r^2 \text{ में } r = 28\sqrt{2} \text{ तथा } \theta = 90^\circ \text{ रखने पर}\right)$$

$$= \left\{\frac{11}{14} - \frac{1}{2}\right\} \times 28 \times 28 \times 2 \text{ cm}^2$$

$= 28 \times 28 \times 2 \times 4/14 \text{ cm}^2 = 448 \text{ cm}^2$

$\therefore$ दो फूलवारियों का क्षेत्रफल

$= 2 \times 448 \text{ m}^2 = 896 \text{ m}^2$

वर्गाकार लॉन का क्षेत्रफल

$= 56 \times 56 \text{ m}^2 = 3136 \text{ m}^2$

फलतः कुल क्षेत्रफल $= (3136 + 896) \text{ m}^2$

$= 4032 \text{ m}^2$

Ex.42 चित्र में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ ABCD भुजा 10 cm का एक वर्ग है।

(π = 3.14 का उपयोग करें)

Sol. माना हम चार अछायांकित क्षेत्रों को R_1, R_2, R_3 तथा R_4 से चिन्हित करते हैं ।

यहाँ, R_1 का क्षेत्रफल + R_3 का क्षेत्रफल

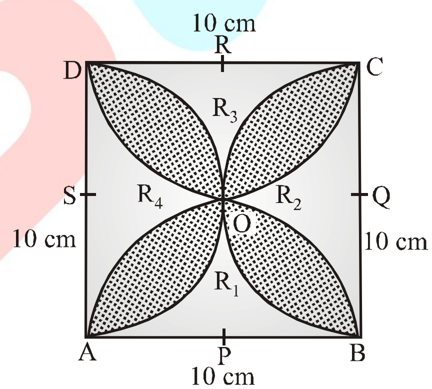
= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल– दो अर्धवृत्तों जिनके केन्द्र Q एवं S है, का क्षेत्रफल

$$= \left(10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times 3.14 \times 5^2\right) \text{cm}^2$$

[$\because$ त्रिज्या = AP = 5 cm]

$= (100 - 3.14 \times 25) \text{ cm}^2 = (100 - 78.5) \text{ cm}^2$

$= 21.5 \text{ cm}^2$



इसी प्रकार,

R_2 का क्षेत्रफल + R_4 का क्षेत्रफल $= 21.5 \text{ cm}^2$

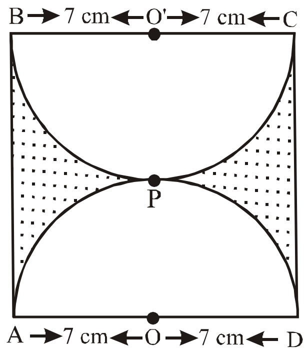
$\therefore$ छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल – (R_1 का क्षेत्रफल + R_2 का क्षेत्रफल + R_3 का क्षेत्रफल + R_4 का क्षेत्रफल)

$= (100 - 2 \times 21.5) \text{ cm}^2 = 57 \text{ cm}^2$

Ex.43 चित्र में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो यदि ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा 14 cm है तथा APD एवं BPC अर्धवृत्त है।

Sol.



छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल – दो अर्धवृत्तो का क्षेत्रफल

$$= 14 \times 14\ cm^2 - 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7^2\right)\ cm^2$$

$$= 196\ cm^2 - 154\ cm^2 = 42\ cm^2$$

Ex.44 ABCD समलम्ब चतुर्भुज की आकृति में एक खेत है। AB || DC तथा ∠ABC = 90º, ∠DAB=60º है। केन्द्र A, B, C तथा D के साथ चार त्रिज्यखण्ड बनाये जाते हैं । प्रत्येक त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या 17.5 m है। ज्ञात कीजिए

(i) चारों त्रिज्यखण्डों का कुल क्षेत्रफल

(ii) शेष भाग का क्षेत्रफल, दिया गया है कि AB = 75m तथा CD = 50 m.

Sol. चूँकि AB || CD तथा ∠ABC = 90º इसलिए

∠BCD = 90º. तथा, ∠BAD = 60º

∴ ∠CDA = 180º – 60º = 120º

[सह आन्तरिक कोण]

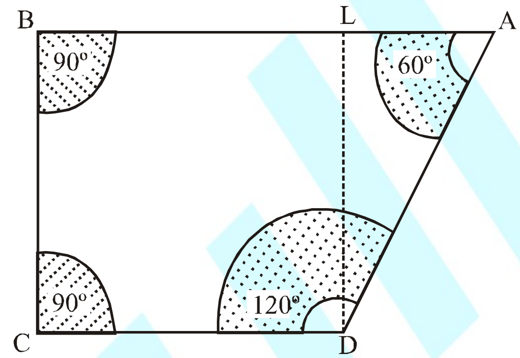
(i) चारों त्रिज्यखण्डों का कुल क्षेत्रफल

= A पर त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल + B पर त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल + C पर त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल + D पर त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{60}{360} \times \pi \times (17.5)^2 + \frac{90}{360} \times \pi \times (17.5)^2 + \frac{90}{360} \times \pi \times (17.5)^2 + \frac{120}{360} \times \pi \times (17.5)^2$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \times \pi \times (17.5)^2\right\}\ m^2$$

$$= \pi \times \left(\frac{35}{2}\right)^2 m^2 = \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}\ m^2 = 962.5\ m^2$$



(ii) माना DL, D से AB पर डाला गया लम्ब है, तब

AL = AB – BL = AB – CD = (75 – 50) m = 25 m

ΔALD में,

$$\tan 60^\circ = \frac{DL}{AL} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{DL}{25} \Rightarrow DL = 25\sqrt{3}\ m$$

∴ समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$= 1/2\ (AB + CD) \times DL$

$= 1/2\ (75 + 50) \times 25\sqrt{3}\ m^2$

$= 1562.5 \times 1.732\ m^2 = 2706.25\ m^2$

फलत:,

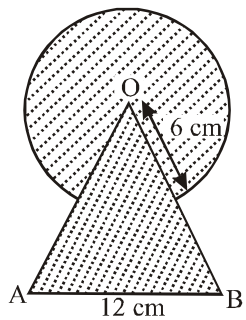
शेष भाग का क्षेत्रफल

= समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल – 4 त्रिज्यखण्डों का क्षेत्रफल

$= 2706.25\ m^2 - 962.5\ m^2 = 1743.75\ m^2$

Ex.45 चित्र में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो जहाँ 12 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज OAB के शीर्ष O को केन्द्र लेकर 6 cm त्रिज्या का एक वृत्ताकार चाप खींचा गया है।

Sol. अभीष्ट क्षेत्रफल = ΔOAB का क्षेत्रफल + वृत्त का क्षेत्रफल – 60º कोण तथा 6 cm त्रिज्या के वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल



$\Rightarrow$ अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2 + \pi\times 6^2 \frac{60}{360}\times\pi\times 6^2\right\}\text{cm}^2$$

$$= (36\sqrt{3} + 36\pi - 6\pi)\ \text{cm}^2$$

$$=\left(36\sqrt{3} + 30\times\frac{22}{7}\right)\ \text{cm}^2 = \left(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$$

Ex.46 चित्रानुसार 32 cm त्रिज्या की वृत्ताकार मेज के कवर पर मध्य में एक समबाहु त्रिभुज ABC को छोड़कर एक डिजाईन बनी है। डिजाईन (छायांकित भाग) का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

Sol. ΔOBD में,

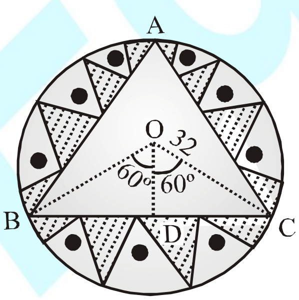
$$\cos 60^\circ = \frac{OD}{OB} \text{ तथा } \sin 60^\circ = \frac{BD}{OB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OD}{32} \text{ तथा } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BD}{32}$$

$\Rightarrow$ OD = 16 तथा BD = $16\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ BC = 2 BD = $32\sqrt{3}$

छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल



= वृत्त का क्षेत्रफल – ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \left\{\pi\times 32^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\times(32\sqrt{3})^2\right\}\ \text{cm}^2$$

$$= \left\{\frac{22}{7}\times 32\times 32 - 768\sqrt{3}\right\}\text{cm}^2$$

$$= \left\{\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3}\right\}\ \text{cm}^2$$

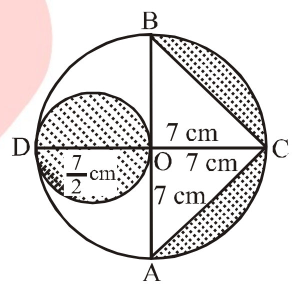
Ex.47 चित्र में AB तथा CD एक वृत्त (जिसका केन्द्र O है) के एक दूसरे के लम्बवत् दो व्यास है तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है। यदि OA = 7 cm, तब छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

Sol. छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल

= (व्यास OD (= 7 cm) वाले वृत्त का क्षेत्रफल)

+ व्यास AB वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

– ΔABC का क्षेत्रफल



$$= \pi\times\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1/2\times\pi\times(7)^2 - 1/2\times AB\times OC$$

$$= \left\{\frac{\pi}{4}\times 49 + \frac{\pi}{2}\times 49 - \frac{1}{2}\times 14\times 7\right\}\text{cm}^2$$

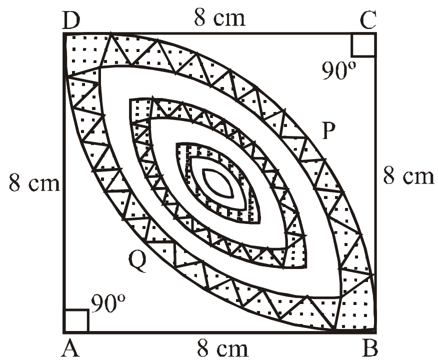
$$= \left(\frac{3\pi}{4}\times 49 - 49\right)\text{cm}^2 = \left(\frac{3}{4}\times\frac{22}{7}\times 49 - 49\right)\text{cm}^2$$

$$= \frac{231-98}{2}\ \text{cm}^2 = 66.5\ \text{cm}^2$$

Ex.48 चित्र में 8 cm त्रिज्या के वृत्तों के दो चतुर्थांशो के मध्य उभयनिष्ठ डिजाईन क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Sol. डिजाईन क्षेत्र का क्षेत्रफल

= 2(चतुर्थांश ABCD का क्षेत्रफल –ΔABD का क्षेत्रफल)



$$= 2\left\{\frac{\pi}{4}\times(8)^2 - \frac{1}{2}\times 8\times 8\right\}\text{cm}^2$$

$$= 2\left\{\frac{22}{7}\times\frac{1}{4}\times 64 - 32\right\}\text{cm}^2$$

$$= 2\left\{\frac{22\times 16}{7} - 32\right\}\text{cm}^2$$

$$= 2\left(\frac{352-224}{7}\right)\text{cm}^2 = \frac{256}{7}\text{cm}^2$$

याद रखने के लिए महत्त्वपूर्ण बिन्दु

- त्रिज्या r के एक वृत्त के लिए

  (i) परिधि $= 2\pi r$

  (ii) क्षेत्रफल $= \pi r^2$

  (iii) अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2}{2}$

  (iv) एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2}{4}$

- यदि R एवं r को संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ इस प्रकार है कि R > r है, तब दो वृत्तों से परिबद्ध क्षेत्रफल

  $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

- यदि r त्रिज्या के वृत्त का एक त्रिज्यखण्ड θ^o कोण रखता है, तब,

  (i) त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई

  $= \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$

  $= \dfrac{\theta}{360} \times$ (वृत्त का परिधि)

  (ii) त्रिज्यखण्ड का परिमाप $= 2r + \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$

  (iii) त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

  $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \dfrac{\theta}{360} \times$ (वृत्त का क्षेत्रफल)

  (iv) वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

  = संगत त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

  – संगत त्रिभुज का क्षेत्रफल

  $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2 - r^2 \sin\dfrac{\theta}{2} \cos\dfrac{\theta}{2}$

  $= \left\{\dfrac{\pi\theta}{360} - \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right\} r$