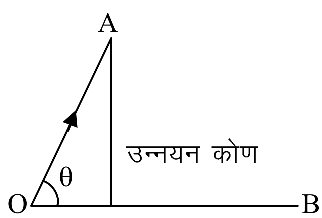
त्रिकोणमिती के अनुप्रयोग

सूची

- उन्नयन कोण
- अवनमन कोण

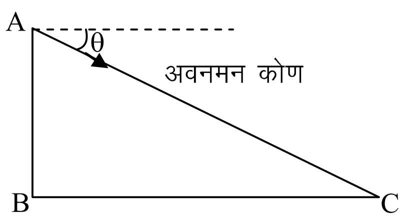
➤ उन्नयन कोण

किसी दृश्य बिन्दु का उन्नयन कोण दृष्टि रेखा के द्वारा क्षैतिज से बनाया गया कोण है जबकि दृश्य बिन्दु क्षैतिज तल से ऊपर हो अर्थात् वह स्थिति जब किसी वस्तु को देखने के लिए हम अपने सिर को ऊपर उठाते हैं। (चित्र देखो)।



➤ अवनमन कोण

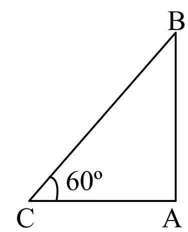
किसी दृश्य बिन्दु का अवनमन कोण दृष्टि रेखा के द्वारा क्षैतिज से बनाया गया कोण है जबकि बिन्दु क्षैतिज तल से नीचे हो अर्थात् वह स्थिति जब बिन्दु को देखने के लिए हम अपने सिरे को झुकाते हैं। (चित्र देखो)



❖ उदाहरण ❖

Ex.1 एक इमारत की छाया 20 m लम्बी है जब सूर्य का उन्नयन कोण 60º है। इमारत की ऊँचाई ज्ञात करो।

Sol. माना AB इमारत है तथा AC इसकी छाया है।



तब, AC = 20 m तथा $\angle ACB = 60^\circ$.

माना AB = h

तब, $\frac{AB}{AC} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{h}{20} = \sqrt{3}$

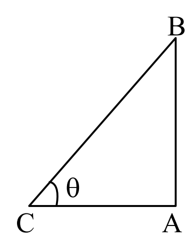
$\therefore$ $h = (20 \times \sqrt{3})m = (20 \times 1.732)$ m

$= 34.64$ m.

Ex.2 यदि 6m ऊँचे एक उर्ध्वाधर खम्भे की छाया $2\sqrt{3}$ मीटर लम्बी है, तब सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात करो।

Sol. माना AB उर्ध्वाधर खम्भा है तथा AC इसकी छाया है।

माना उन्नयन कोण θ है, तब



AB = 6 m, AC = $2\sqrt{3}$ m

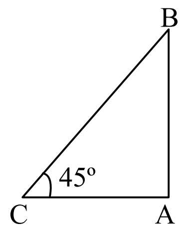
तथा $\angle ACB = \theta$

अब, $\tan\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$.

$\therefore \quad \theta = 60^\circ$.

Ex.3 एक उर्ध्वाधर दीवार के सहारे टिकी हुई एक सीढ़ी भूतल से 45º कोण बनाती है। सीढ़ी का पाद दीवार से 3m दूर है। सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात करो।

Sol. माना AB दीवार है तथा CB सीढ़ी है।



तब, AC = 3m तथा $\angle ACB = 45^\circ$

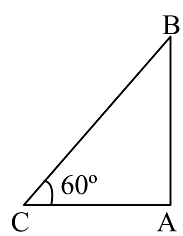
अब, $\frac{CB}{AC} = \sec 45^\circ = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{CB}{3} = \sqrt{2}$

$\therefore$ सीढ़ी की लम्बाई $= CB = 3\sqrt{2}$

$= (3 \times 1.41)$ m = 4.23 m

Ex.4 एक बेलून एक अन्तरिक्ष स्टेशन से 200 मीटर लम्बी केबल से जुड़ा हुआ है जो क्षैतिज से 60º झुकी हुई है। बेलून की भूतल से ऊँचाई ज्ञात करो। (मानाकि केबल कहीं से भी ढीली नहीं है।)

Sol. माना B बेलून है तथा AB उर्ध्वाधर ऊँचाई है। माना C अन्तरिक्ष स्टेशन है तथा CB केबल है।



तब, BC = 200 m तथा $\angle ACB = 60^\circ$

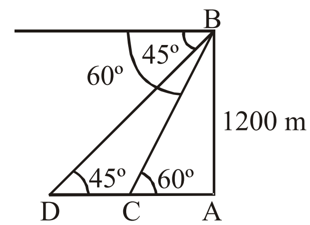
तब, $\frac{AB}{BC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{AB}{200} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad AB = \left(\frac{200 \times \sqrt{3}}{2}\right)$ m = 173.2 m.

Ex.5 1200m ऊँचाई पर उड़ रहे एक हेलीकॉप्टर का पॉयलेट पाता है कि दो जहाज इसकी ओर समान दिशा में उड़ रहे हैं। हेलीकॉप्टर से प्रेक्षित किये गये जहाजों के अवनमन कोण क्रमशः 60º तथा 45º है। दोनों जहाजों के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

Sol. माना B हेलीकॉप्टर की स्थिति है तथा माना C, D जहाज है। माना AB उर्ध्वाधर ऊँचाई है।



तब, AB = 1200 m,

$\angle ACB = 60^\circ$ तथा $\angle ADB = 45^\circ$.

तब, $\frac{AD}{AB} = \cot 45^\circ = 1$

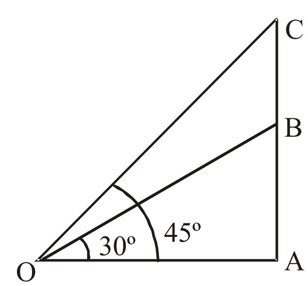
$\Rightarrow \quad \frac{AD}{1200} = 1 \Rightarrow AD = 1200$ m

तथा, $\frac{AC}{AB} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad \frac{AC}{1200} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AC = \frac{1200}{\sqrt{3}} = 400\sqrt{3}$ m.

Ex.6 एक उर्ध्वाधर मीनार एक क्षैतिज तल पर खड़ी है तथा जिस पर 7m ऊँचा एक झण्डा लगा हुआ है। क्षैतिज तल पर एक बिन्दु से झण्डे के पाद का उन्नयन कोण 30º है तथा झण्डे के शिखर का उन्नयन कोण 45º है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

Sol. माना AB मीनार है तथा BC झण्डा है



तब, BC = 7 m, माना AB = h

माना O प्रेक्षण बिन्दु है।

तब, $\angle AOB = 30^o$ तथा $\angle AOC = 45^o$.

अब, $\frac{OA}{AC} = \cot 45^o = 1$

$\Rightarrow$ $OA = AC = h + 7$.

तथा, $\frac{OA}{AB} = \cot 30^o = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $\frac{OA}{h} = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $OA = h\sqrt{3}$

$\therefore$ $h + 7 = h\sqrt{3}$

$\Rightarrow h = \frac{7}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$

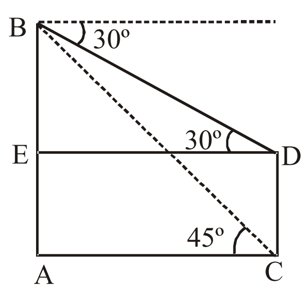
$= \frac{7(\sqrt{3}+1)}{2} = 9.562$ m

Ex.7 30 m ऊँची एक इमारत के शिखर से एक मीनार के शिखर तथा तल के अवनमन कोण क्रमशः 30^o तथा 45^o है। मीनार की ऊँचाई है :

(a) $15(1+\sqrt{3})$ m (b) $30(\sqrt{3}-1)$ m

(c) $30\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$m (d) $30\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$m

Sol. माना AB इमारत है तथा CD मीनार है



तब, AB = 30 m माना DC = x है

$DE \perp AB$ खींचो। तब $AE = CD = x$.

$\therefore$ $BE = (30 - x)$ m.

अब, $\frac{AC}{AB} = \cot 45^o = 1$

$\Rightarrow$ $\frac{AC}{30} = 1 \Rightarrow AC = 30$ m.

$\therefore$ $DE = AC = 30$ m.

$\frac{BE}{DE} = \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ $\frac{BE}{30} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

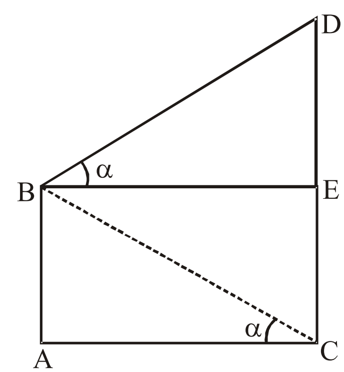
$\Rightarrow$ $BE = \frac{30}{\sqrt{3}}$.

$\therefore$ $CD = AE = AB - BE = \left(30 - \frac{30}{\sqrt{3}}\right)$

$= 30\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$m

Ex.8 25 m ऊँची एक चट्टान के शिखर से एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण मीनार के पाद के अवनमन कोण के बराबर पाया जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

Sol. माना AB चट्टान है तथा CD मीनार है



तब, AB = 25 m, B से $BE \perp CD$ खीचों।

माना $\angle EBD = \angle ACB = \alpha$

अब, $\frac{DE}{BE} = \tan\alpha$ तथा $\frac{AB}{AC} = \tan\alpha$

$\therefore$ $\frac{DE}{BE} = \frac{AB}{AC}$, अतः $DE = AB$

[$\because BE = AC$]

$\therefore$ $CD = CE + DE = AB + AB = 2AB = 50$m

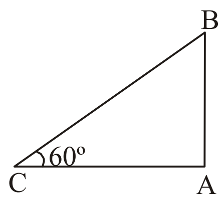
Ex.9 किसी क्षण सूर्य का उन्नयन कोण 60^o है। एक उर्ध्वाधर खम्भे की ऊँचाई जिसकी छाया 30 m लम्बी है, होगी

(A) $30\sqrt{3}$ m (B) 15 m

(C) $\frac{30}{\sqrt{3}}$ m (D) $15\sqrt{2}$ m

Sol. माना AB खम्भा है तथा AC इसकी छाया है।

तब, $\theta = 60^o$ तथा AC = 30 m



$\therefore \quad \frac{AB}{AC} = \tan 60^o \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{30} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ AB = $30\sqrt{3}$ m

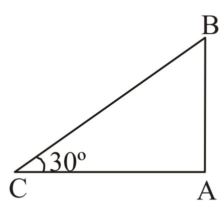
Ex.10 जब सूर्य क्षैतिज तल से 30^o ऊपर है, तब 50m ऊँची इमारत की छाया की लम्बाई होगी -

(A) $\frac{50}{\sqrt{3}}$ m (B) $50\sqrt{3}$ m

(C) 25 m (D) $25\sqrt{3}$ m

Sol. माना AB इमारत है तथा AC इसकी छाया है

तब, AB = 50 m तथा $\theta = 30^o$.



$\therefore \quad \frac{AC}{AB} = \cot 30^o = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{AC}{50} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ AC = $50\sqrt{3}$ cm.

Ex.11 यदि सूर्य का उन्नयन कोण 30^o से 60^o में परिवर्तित होता है, तब इन दो स्थितियों में बनी 15 m ऊँचे एक खम्भे की छाया की लम्बाई के मध्य अन्तर होगा -

(A) 7.5 m (B) 15 m

(C) $10\sqrt{3}$ m (D) $\frac{15}{\sqrt{3}}$ m

Sol. जब AB = 15m, $\theta = 30^o$, तब $\frac{AC}{AB} = \tan 30^o$

$\Rightarrow$ AC = $\frac{15}{\sqrt{3}}$ m.

जब AB = 15m, $\theta = 60^o$, तब $\frac{AC}{AB} = \tan 60^o$

$\Rightarrow$ AC = $15\sqrt{3}$ m

$\therefore$ छाया की लम्बाई में अन्तर

$$= \left(15\sqrt{3} - \frac{15}{\sqrt{3}}\right) = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ m}.$$

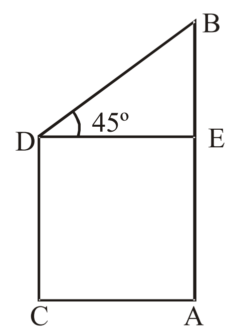
Ex.12 दो खम्भों की ऊँचाई 80 m तथा 62.5 m है। यदि उनके शीर्षो को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज के साथ 45^o कोण बनाती है, तब खम्भों के मध्य दूरी है -

(A) 17.5 m (B) 56.4 m

(C) 12.33 m (D) 44 m

Sol. माना AB तथा CD खम्भे इस प्रकार है कि

AB = 80 m तथा CD = 62.5 m



DE $\perp$ AB खीचों, तब

$\angle EDB = 45^o$

अब, BE = AB – AE = AB – CD = 17.5

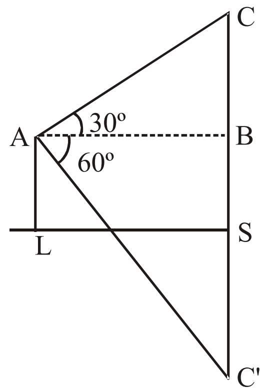
$\frac{DE}{BE} = \cot 45^o = 1 \Rightarrow$ DE = BE = 17.5 m.

Ex.13 यदि एक झील से 200 m ऊपर एक बिन्दु से एक बादल का उन्नयन कोण 30^o है तथा झील में इसकी परछाई का अवनमन कोण 60^o है, तब बादल की झील से ऊँचाई है

(A) 200 m (B) 500 m

(C) 30 m (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. माना C बादल है तथा C′ झील में इसकी परछाई है



माना CS = C′S = x.

अब, $\frac{BC}{AB} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \; x - 200 = \frac{AB}{\sqrt{3}}$

तथा, $\frac{BC'}{AB} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \; x + 200 = (AB)\sqrt{3}$.

$\therefore \; \sqrt{3}(x-200) = \frac{x+200}{\sqrt{3}}$

or $x = 400$.

$\therefore$ CS = 400 m.

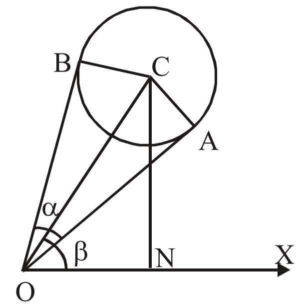
Ex.14 γ त्रिज्या का एक बेलून एक प्रेक्षक की आँख पर α कोण बनाता है तथा इसके केन्द्र का उन्नयन कोण β है। भूतल से इसके केन्द्र की ऊँचाई है :

(A) $\gamma \cos\frac{\beta}{2}\sec\alpha$ (B) $\gamma \cos\beta\sec\frac{\alpha}{2}$

(C) $\gamma \sin\frac{\beta}{2}\operatorname{cosec}\alpha$ (D) $\gamma \sin\beta\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$

Sol. माना C बेलून का केन्द्र है तथा O क्षैतिज रेखा OX पर प्रेक्षक की स्थिति है। माना OA तथा OB बेलून की स्पर्शरेखाएं है ताकि ∠AOB = α, ∠XOC = β तथा CA = CB = γ है।

स्पष्टतया, समकोण त्रिभुज OAC तथा OBC सर्वांगसम है।



$\therefore \; \angle AOC = \angle BOC = \frac{\alpha}{2}$.

माना CN ⊥ OX

अब, $\frac{OC}{CA} = \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \; OC = \gamma \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$ ....(i)

तथा, $\frac{CN}{OC} = \sin\beta$

$\Rightarrow \; CN = OC \sin\beta$

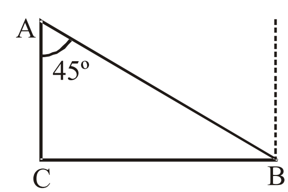
$= \gamma \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\sin\beta$ [(i) से]

Ex.15 एक नदी के किनारे समान्तर हैं। एक तैराक एक किनारे पर एक बिन्दु से किनारे से 45º कोण पर एक सरल रेखा में तैरना प्रारम्भ करता है तथा विपरीत किनारे पर विपरीत किनारे के प्रारम्भिक बिन्दु से 20 m दूरी पर पहुँचता है। नदी की चौड़ाई होगी -

(A) 20 m (B) 28.28 m

(C) 14.14 m (D) 40 m

Sol. माना तैराक का A प्रारम्भिक बिन्दु है तथा B अन्तिम बिन्दु है। तब AB = 20 m तथा ∠BAC = 45º



अब, $\frac{BC}{AB} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \; \frac{BC}{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

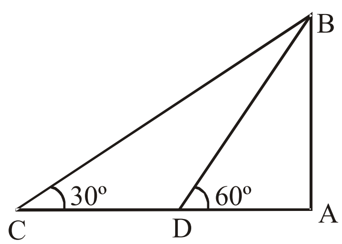
$\Rightarrow$ $BC = \dfrac{20\times\sqrt{2}}{2}$ = 14.14 m.

Ex.16 एक चट्टान पर खड़ा एक व्यक्ति प्रेक्षित करता है कि मछली पकड़ने वाले एक जहाज का अवनमन कोण 30º है जो एकसमान चाल से प्रेक्षक के ठीक नीचे के बिन्दु पर किनारे पर पहुँचेगा। 6 मिनट बाद, जहाज का अवनमन कोण 60º पाया जाता है। किनारे पर पहुँचने में जहाज के द्वारा लिया गया समय है -

(A) $3\sqrt{3}$ min (B) $\sqrt{3}$ min

(C) 1.5 min (D) 3 min

Sol. माना AB चट्टान है तथा C एवं D जहाज की दो स्थितियाँ है।



तब, ∠ACB = 30º तथा ∠ADB = 60º

माना AB = h

अब, $\dfrac{AD}{AB} = \cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AD = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$

तथा, $\dfrac{AC}{AB} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{3}\,h$

$CD = AC - AD = \left(\sqrt{3}\,h - \dfrac{h}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$

माना जहाज की एकसमान चाल u m/min है।

6 min में तय की गई दूरी = 6u m

$\therefore CD = 6u \Rightarrow \dfrac{2h}{\sqrt{3}} = 6u \Rightarrow h = 3\sqrt{3}\,u$

अब, $AD = \dfrac{h}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}\,u}{\sqrt{3}} = 3u$

A पर पहुँचने में जहाज के द्वारा लिया गया समय $= \dfrac{\text{दूरी} AD}{\text{चाल}} \Rightarrow A = \dfrac{3u}{u} = 3$ min

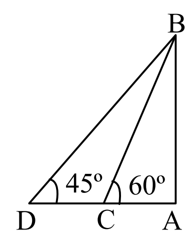
Ex.17 एक नाव 150m ऊँची एक चट्टान से दूर चलाई जाती है। चट्टान के शिखर पर नाव का अवनमन कोण 2 मिनट में 60º से 45º में परिवर्तित होता है। नाव की चाल है -

(A) 2 km/hr (B) 1.9 km/hr

(C) 2.4 km/hr (D) 3 km/hr

Sol. माना AB चट्टान है तथा C एवं D नाव की दो स्थितियां है। तब AB = 150 m,

∠ACB = 60º तथा ∠ADB = 45º.



अब, $\dfrac{AD}{AB} = \cot 45^\circ = 1$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{150} = 1 \Rightarrow AD = 150$ m.

$\dfrac{AC}{AB} = \cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{AC}{150} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AC = \dfrac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3} = 86.6$ m

$\therefore$ CD = AD – AC = (150 – 86.6) m = 63.4 m

इस प्रकार, 2 min में तय की गई दूरी = 63.4 m

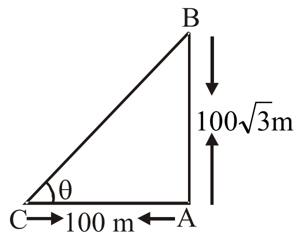
$\therefore$ नाव की चाल

$= \left(\dfrac{63.4}{2}\times\dfrac{60}{1000}\right)$ km/hr. = 1.9 km/hr.

Ex.18 एक मीनार $100\sqrt{3}$ मीटर ऊँची है। इसके पाद से 100 मीटर दूर एक बिन्दु से इसके शिखर का उन्नयन कोण ज्ञात करो।

Sol. माना AB, $100\sqrt{3}$ मीटर ऊँची मीनार है तथा C मीनार के पाद से 100 मीटर दूर एक बिन्दु है।

माना θ बिन्दु C से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण है।



ΔCAB में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{100\sqrt{3}}{100} = \sqrt{3}$$

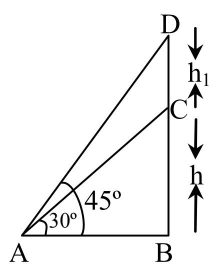
$$\Rightarrow \theta = 60^\circ$$

फलतः मीनार के शिखर का इसके पाद से 100 मीटर दूर एक बिन्दु से उन्नयन कोण 60º है।

Ex.19 एक मीनार के पाद से 40 m दूर मैदान पर एक बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30º है। मीनार के शिखर पर स्थित एक पानी की टंकी के शिखर का उन्नयन कोण 45º है। ज्ञात करो (i) मीनार की ऊँचाई (ii) टंकी की गहराई।

Sol. माना मीनार BC की ऊँचाई h मीटर है तथा पानी की टंकी CD की ऊँचाई h_1 मीटर है।

माना मीनार के पाद B से 40 m दूर मैदान पर एक बिन्दु A है।



ΔABD में,

$$\tan 45^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{h + h_1}{40}$$

$$\Rightarrow h + h_1 = 40 \text{ m} \quad \text{....(i)}$$

ΔABC में $\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{40} \qquad \Rightarrow h = \frac{40}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$= \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ m} = 23.1 \text{ m}$$

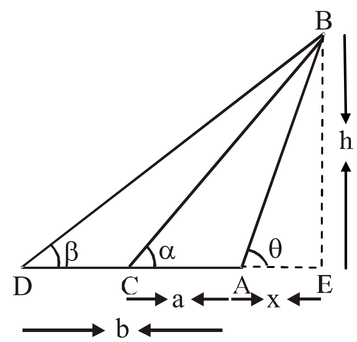
(i) में h का मान रखने पर

$$23.1 + h_1 = 40$$

$$\Rightarrow h_1 = (40 - 23.1)\text{m} = 16.9 \text{ m}$$

Ex.20 उत्तर की ओर झुकी हुई एक मीनार के दक्षिण की ओर इसके पाद से a एवं b दूरी पर दो स्टेशन है। यदि इन स्टेशनों से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण α, β है, तब सिद्ध करो कि क्षैतिज से इसका झुकाव θ, $\cot\theta = \frac{b\cot\alpha - a\cot\beta}{b-a}$ के द्वारा दिया जाता है।

Sol. माना AB झुकी हुई मीनार है तथा माना C एवं D मीनार के पाद A से क्रमशः a एवं b दूरी पर दिये गये दो स्टेशन है।



माना AE = x तथा BE = h

ΔABE में,

$$\tan\theta = \frac{BE}{AE}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow x = h\cot\theta \quad \text{....(i)}$$

ΔCBE में,

$$\tan\alpha = \frac{BE}{CE}$$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{h}{a+x} \quad \Rightarrow a + x = h\cot\alpha$

$\Rightarrow x = h\cot\alpha - a$ ....(ii)

Δ DBE में,

$\tan\beta = \dfrac{BE}{DE}$

$\Rightarrow \tan\beta = \dfrac{h}{b+x} \quad \Rightarrow b + x = h\cot\beta$

$\Rightarrow x = h\cot\beta - b$ ....(iii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$h\cot\theta = h\cot\alpha - a$

$\Rightarrow h(\cot\alpha - \cot\theta) = a$

$\Rightarrow h = \dfrac{a}{\cot\alpha - \cot\theta}$ ....(iv)

समीकरण (i) एवं (iii) से

$h\cot\theta = h\cot\beta - b$

$\Rightarrow h(\cot\beta - \cot\theta) = b$

$\Rightarrow h = \dfrac{b}{\cot\beta - \cot\theta}$

समीकरण (iv) एवं (v) से h के मानों को बराबर करने पर

$$\frac{a}{\cot\alpha - \cot\theta} = \frac{b}{\cot\beta - \cot\theta}$$

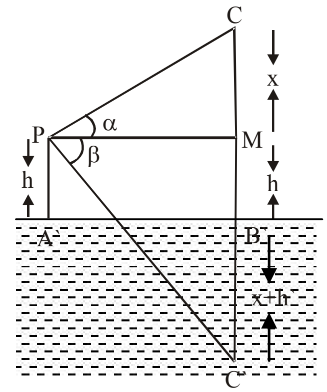
$\Rightarrow a(\cot\beta - \cot\theta) = b(\cot\alpha - \cot\theta)$

$\Rightarrow (b - a)\cot\theta = b\cot\alpha - a\cot\beta$

$\Rightarrow \cot\theta = \dfrac{b\cot\alpha - a\cot\beta}{b-a}$

Ex.21 यदि एक झील से h मीटर ऊपर एक बिन्दु से एक बादल का उन्नयन कोण α है तथा झील में इसके प्रतिबिम्ब का अवनमन कोण β है, तब सिद्ध कीजिए कि बादल की ऊँचाई $\dfrac{h(\tan\beta + \tan\alpha)}{\tan\beta - \tan\alpha}$ है।

Sol. माना AB झील की सतह है तथा माना P प्रेक्षण बिन्दु है ताकि AP = h मीटर है। माना C बादल की स्थिति है तथा C′ झील में इसका प्रतिबिम्ब है। तब CB = C′B, माना PM, P से CB पर लम्ब है। तब ∠CPM = α तथा ∠MPC′ = β है। माना CM = x



तब, CB = CM + MB = CM + PA = x + h

ΔCPM में,

$\tan\alpha = \dfrac{CM}{PM}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{x}{AB}$ [∵ PM = AB]

$\Rightarrow AB = x\cot\alpha$ ....(i)

Δ PMC′ में,

$\tan\beta = \dfrac{C'M}{PM}$

$\Rightarrow \tan\beta = \dfrac{x+2h}{AB}$

[∵ C′M = C′B + BM = x + h + h]

$\Rightarrow AB = (x + 2h)\cot\beta$ ....(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$x\cot\alpha = (x + 2h)\cot\beta$

$\Rightarrow x(\cot\alpha - \cot\beta) = 2h\cot\beta$

$\Rightarrow x\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} - \dfrac{1}{\tan\beta}\right) = \dfrac{2h}{\tan\beta}$

$\Rightarrow x\left(\dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta}\right) = \dfrac{2h}{\tan\beta}$

$\Rightarrow x = \dfrac{2h\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$

फलतः, बादल की ऊँचाई = x + h

$$= \frac{2h\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} + h$$

$$= \frac{2h\tan\alpha + h\tan\beta - h\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

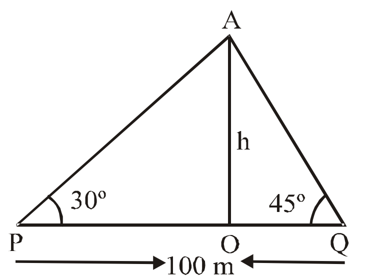
$$= \frac{h(\tan\alpha + \tan\beta)}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

Ex.22 100 m चौड़ी एक नदी के मध्य में एक छोटा सा टापू है तथा टापू पर एक लम्बा वृक्ष सीधा खड़ा है। नदी के दोनों किनारों पर एक–दूसरे के ठीक सामने तथा वृक्ष की रेखा में P एवं Q बिन्दु है। यदि वृक्ष के शिखर का बिन्दु P एवं Q से उन्नयन कोण क्रमशः 30º तथा 45º है, तब वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Sol. माना वृक्ष OA की ऊँचाई h मीटर है

त्रिभुजों POA तथा QOA में

$$\tan 30^\circ = \frac{OA}{OP} \text{ तथा } \tan 45^\circ = \frac{OA}{OQ}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{OP} \text{ तथा } 1 = \frac{h}{OQ}$$

$$\Rightarrow OP = \sqrt{3}\,h \text{ तथा } OQ = h$$

$$\Rightarrow OP + OQ = \sqrt{3}\,h + h$$

$$\Rightarrow PQ = (\sqrt{3} + 1)h$$

$$\Rightarrow 100 = (\sqrt{3} + 1)h \qquad [\because PQ = 100 \text{ m}]$$

$$\Rightarrow h = \frac{100}{\sqrt{3}+1} \text{ m}$$

$$\Rightarrow h = \frac{100(\sqrt{3}-1)}{2} \text{ m}$$

$$\Rightarrow h = 50(1.732 - 1) \text{ m} = 36.6 \text{ m}$$

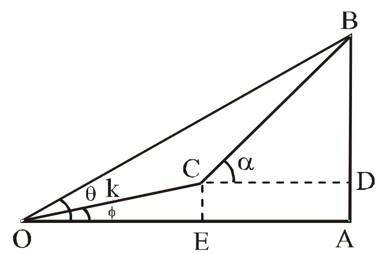
फलतः, वृक्ष की ऊँचाई 36.6 m है।

Ex.23 एक चट्टान का एक स्थिर बिन्दु से उन्नयन कोण θ है। चट्टान के शिखर की ओर ϕ कोण पर k मीटर दूरी तय करने के बाद उन्नयन कोण α पाया जाता है। प्रदर्शित करो कि चट्टान की ऊँचाई $\frac{k(\cos\phi - \sin\phi\cot\alpha)}{\cot\theta - \cot\alpha}$ मीटर है।

Sol. माना AB चट्टान है तथा O स्थिर बिन्दु इस प्रकार है कि O से चट्टान का उन्नयन कोण θ है अर्थात् AOB = θ है। माना $\angle AOC = \phi$ तथा OC = k मीटर है। C से CD एवं CE क्रमशः AB एवं OA के लम्बवत् खीचों।

तब, $\angle DCB = \alpha$.

माना h चट्टान AB की ऊँचाई है।



ΔOCE में,

$$\sin\phi = \frac{CE}{OC}$$

$$\Rightarrow \sin\phi = \frac{CE}{k}$$

$$\Rightarrow CE = k\sin\phi \qquad ...(i) \qquad [\because CE = AD]$$

$$\Rightarrow AD = k\sin\phi$$

$$\text{तथा, } \cos\phi = \frac{OE}{OC}$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{OE}{k}$$

$$\Rightarrow OE = k\cos\phi \qquad ....(ii)$$

Δ OAB में

$$\tan\theta = \frac{AB}{OA}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{h}{OA}$$

$$\Rightarrow OA = h\cot\theta \qquad ....(iii)$$

$\therefore$ CD = EA = OA – OE

$= h \cot\theta - k\cos\phi$ .....(iv)

[समीकरण (ii) तथा (iii) से]

तथा BD = AB – AD = AB – CE

$= (h - k\sin\phi)$ ....(v)

[समीकरण (i) से]

ΔBCD में

$\tan\alpha = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{h - k\sin\phi}{h\cot\theta - k\cos\phi}$

[समीकरण (iv) एवं (v) से]

$\Rightarrow \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{h - k\sin\phi}{h\cot\theta - k\cos\phi}$

$\Rightarrow h\cot\alpha - k\sin\phi\cot\alpha = h\cot\theta - k\cos\phi$

$\Rightarrow h(\cot\theta - \cot\alpha) = k(\cos\phi - \sin\phi\cot\alpha)$

$\Rightarrow h = \frac{k(\cos\phi - \sin\phi\cot\alpha)}{\cot\theta - \cot\alpha}$

Ex.24 एक पर्वत के पाद से इसकी चोटी का उन्नयन कोण 45º है, पर्वत पर ऊपर की ओर 30° झुकाव पर 1000 m चलने के बाद उन्नयन कोण 60º पाया जाता है। पर्वत की ऊँचाई ज्ञात करो।

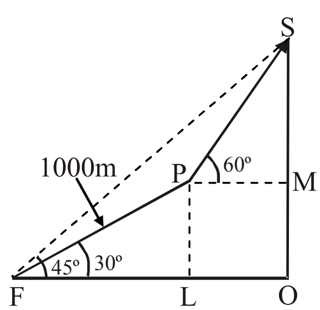
Sol. माना पर्वत FOS का पाद F है तथा चोटी S है। तब $\angle OFS = 45^o$ तथा $\angle OSF = 45^o$ है। तदनानुसार

OF = OS = h km(माना)

माना FP = 1000 m = 1 km ढाल है ताकि $\angle OFP = 30^o$ है। $PM \perp OS$ तथा $PL \perp OF$ खींचो।

PS को मिलाओ। दिया गया है कि $\angle MPS = 60^o$

ΔFPL में,



$\sin 30^o = \frac{PL}{PF}$

$\Rightarrow PL = PF\sin 30^o = \left(1 \times \frac{1}{2}\right)km. = \frac{1}{2} km.$

$\therefore OM = PL = \frac{1}{2} km$

$\Rightarrow MS = OS - OM = \left(h - \frac{1}{2}\right) km$ ....(i)

तथा, $\cos 30^o = \frac{FL}{PF}$

$\Rightarrow FL = PF\cos 30^o = \left(1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)km = \frac{\sqrt{3}}{2} km$

अब, h = OS = OF = OL + LF

$\Rightarrow h = OL + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OL = \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)km$

$\Rightarrow PM = \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) km$

ΔPSM में

$\tan 60^o = \frac{SM}{PM}$

$\Rightarrow SM = PM.\tan 60^o$ ....(ii)

$\Rightarrow \left(h - \frac{1}{2}\right) = \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3}$

[समीकरण (i) तथा (ii) से]

$\Rightarrow h - \frac{1}{2} = h\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 1$

$\Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$

$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{2.732}{2}$

$= 1.336$ km

फलतः, पर्वत की ऊँचाई 1.366 km है।

Ex.25 एक मीनार के दक्षिण में स्थित एक बिन्दु A से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण α है तथा मीनार के पूर्व में स्थित बिन्दु B से उन्नयन कोण β है। यदि AB = d, तब प्रदर्शित कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\frac{d}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta}}$ है।

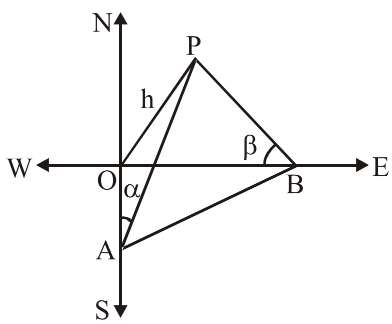
Sol. माना OP मीनार है तथा A एवं B दो बिन्दु है जो मीनार के क्रमशः दक्षिण एवं पूर्व में इस प्रकार है कि $\angle OAP = \alpha$ तथा $\angle OBP = \beta$ है। माना OP = h है।

ΔOAP में

$$\tan\alpha = \frac{h}{OA}$$

$$\Rightarrow \quad OA = h\cot\alpha \qquad ....(i)$$

Δ OBP में



$$\tan\beta = \frac{h}{OB}$$

$$\Rightarrow \quad OB = h\cot\beta \qquad ....(ii)$$

चूंकि OAB समकोण त्रिभुज है

अतः $AB^2 = OA^2 + OB^2$

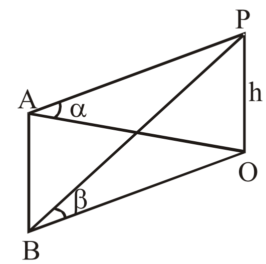
$$\Rightarrow \quad d^2 = h^2\cot^2\alpha + h^2\cot^2\beta$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{d}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta}} \quad \text{[समी. (i) एवं (ii) से]}$$

Ex.26 एक मीनार के उत्तर में स्थित एक स्टेशन A से इसके शिखर का उन्नयन कोण α है तथा A के पश्चिम में स्थित स्टेशन B से उन्नयन कोण β है। सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई $\frac{AB\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}$ है।

Sol. माना OP मीनार है तथा OP के उत्तर में एक बिन्दु A है तथा A के पश्चित में एक बिन्दु B इस प्रकार है कि $\angle OAP = \alpha$ तथा $\angle OBP = \beta$ है। माना मीनार की ऊँचाई h है।

समकोण त्रिभुजों OAP तथा OBP में



$$\tan\alpha = \frac{h}{OA} \text{ तथा } \tan\beta = \frac{h}{OB}$$

$$\Rightarrow \quad OA = h\cot\alpha \text{ तथा } OB = h\cot\beta.$$

ΔOAB में

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = OB^2 - OA^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = h^2\cot^2\beta - h^2\cot^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = h^2[\cot^2\beta - \cot^2\alpha]$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = h^2[(\text{cosec}^2\beta - 1) - (\text{cosec}^2\alpha - 1)]$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = h^2(\text{cosec}^2\beta - \text{cosec}^2\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = h^2\left(\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{AB\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

Ex.27 एक हवाईजहाज जब भूतल से 4000m ऊपर उड़ रहा है, तब इसके ठीक ऊर्ध्वाधर ऊपर से दूसरा हवाईजहाज गुजरता है जिनके भूतल के किसी समान बिन्दु से उन्नयन कोण क्रमशः 60^o तथा 45^o है। तब उस क्षण हवाईजहाजों के मध्य ऊर्ध्वाधर दूरी ज्ञात करो।

Sol. माना P एवं Q दोनों हवाईजहाजों की स्थितियाँ है जहाँ Q, P के उर्ध्वाधर नीचे है तथा OP = 4000 m है। माना P एवं Q के भूतल पर बिन्दु A से उन्नयन कोण क्रमशः 60^o तथा 45^o है।

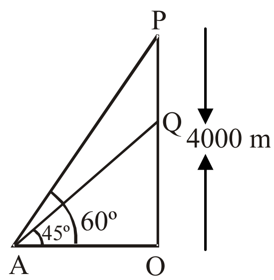
त्रिभुज AOP तथा AOQ में

$$\tan 60^\circ = \frac{OP}{OA} \text{ तथा } \tan 45^\circ = \frac{OQ}{OA}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4000}{OA} \text{ तथा } 1 = \frac{OQ}{OA}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{4000}{\sqrt{3}} \text{ तथा } OQ = OA$$

$$\Rightarrow OQ = \frac{4000}{\sqrt{3}} \text{ m}$$



$\therefore$ हवाईजहाजों के मध्य ऊर्ध्वाधर दूरी

$= PQ = OP - OQ$

$$= \left(4000 - \frac{4000}{\sqrt{3}}\right) \text{m} = 4000 \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$= 1690.53$ m