बहुपद

CONTENTS (सूची)

- परिचय
- अचर एवं चर
- बीजगणितीय व्यंजक
- गुणनखण्ड व गुणांक
- बहुपद की घात
- बहुपद के प्रकार एवं एक चर में बहुपद
- शेषफल प्रमेय
- बहुपद के मान एवं हल
- बहुपद के हलों का ज्यामितीय अर्थ
- मूलों एवं गुणांकों में सम्बन्ध
- द्विघात बहुपद का निर्माण

➤ परिचय

बीजगणित गणित की वह शाखा है, जिसमें संख्याओं के मध्य सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है।

➤ अचर एवं चर

बीजगणित में दो प्रकार के संकेत प्रयोग में लिये जाते हैः अचर एवं चर

◈ **अचर (Constant) :** यह वह संकेत है जिसका मान सदैव एक समान रहता है।

उदाहरण के लिए: $5, -9, \frac{3}{8}, \pi, \frac{7}{15}$, आदि

◈ **चर (Variable) :** यह वह संकेत है जिसका मान स्थिति के अनुसार बदलता हैं।

उदाहरण के लिए : $x, y, z, ax, a + x, 5y, -7x$, आदि

➤ बीजीय व्यंजक

(a) बीजीय व्यंजक उन पदों का संकलन है, जिन्हें धन (+) या ऋण (–) चिन्हों से पृथक किया जाता है,

उदाहरण के लिए : $3x + 5y, 7y - 2x, 2x - ay + az$, आदि

(b) बीजीय व्यंजक के विभिन्न भाग जिन्हें '+' या '–' चिन्हों से पृथक किया जाता है, पद कहलाते हैं

उदाहरण के लिए :

	बीजीय व्यंजक	पदों की संख्या	पद
(i)	$-32x$	1	$-32x$
(ii)	$2x + 3y$	2	$2x$ व $3y$
(iii)	$ax - 5y + cz$	3	$ax, -5y$ व cz
(iv)	$\frac{3}{x} + \frac{y}{7} - \frac{xy}{8} + 9$	4	$\frac{3}{x}, \frac{y}{7}, -\frac{xy}{8}$ एवं 9 इत्यादि

बीजीय व्यंजक के प्रकार (Types of Algebraic Expressions) :

(i) एक पदीय (Monomial) : वह बीजीय व्यंजक जिसका केवल एक पद होता है, एकपदीय व्यंजक कहलाता है। उदाहरण के लिए $8y, -7xy, 4x^2, abx$, आदि एकपदीय व्यंजक है।

(ii) द्विपदीय व्यंजक (Binomial : वह बीजीय व्यंजक जिसमें दो पद आते हों "द्विपदीय व्यंजक" कहलाता हैं।

उदाहरण के लिए :

$8x + 3y$, $8x + 3$, $8 + 3y$, $a + bz$, $9 - 4y$, $2x^2 - 4z$, $6y^2 - 5y$, आदि द्विपदीय व्यंजक है

(iii) त्रिपदीय (Trinomial) : वह बीजीय व्यंजक जिसमें तीन पद आते हों "त्रिपदीय व्यंजक" कहलाता है, उदाहरण के लिए

$ax - 5y + 8z$, $3x^2 + 4x + 7$, $9y^2 - 3y + 2x$, आदि त्रिपदीय व्यंजक हैं।

(iv) बहुपदीय (Multinomial) : वह बीजीय व्यंजक जिसमें दो से अधिक पद आते हों, बहुपदीय व्यंजक कहलाता है।

➤ गुणनखण्ड एवं गुणांक

◈ गुणनखण्ड (Factor) :

अचर एवं चर का प्रत्येक संयोजन जिनसे मिलकर पद बनता है, गुणनखण्ड कहलाते हैं।

उदाहरण के लिए **:**

(i) 7, x एवं 7x तीनों 7x, के गुणनखण्ड हैं, जिनमें 7 अचर (आंकिक मान) है तथा x चर (शाब्दिक) गुणनखण्ड है।

(ii) $\mathbf{-5x^2y}$ में, आंकिक गुणनखण्ड –5 है एवं शाब्दिक गुणनखण्ड : x, y, xy, x^2 एवं x^2y है।

◈ गुणांक (Coefficient) :

एक पद का कोई गुणनखण्ड, शेष पद का गुणांक कहलाता है।

उदाहरण के लिए :

(i) **7x** में; 7, x का गुणांक है

(ii) $\mathbf{-5x^2y}$ **में;** 5, $-x^2y$; –5 का गुणांक है एवं x^2y.

Ex. 1 गुणांक ज्ञात कीजिये :

(i) $3x^3 - 5x^2 + 7$ में x^2 का गुणांक

(ii) 8xyz में xy का गुणांक

(iii) $2y^2 - 6y + 2$ में $-y$ का गुणांक

(iv) $3x + 7$ में x^0 का गुणांक

Sol. (i) –5

(ii) 8z

(iii) 6

(iv) चूंकि $x^0 = 1$, अतः

$3x + 7 = 3x + 7x^0$

x^0 का गुणांक 7 है।

➤ बहुपद की घात

बहुपद के किसी पद की उच्चतम घाताँक उस बहुपद की घात कहलाती है।

उदाहरण के लिए :

(a) बहुपद $5x^2 - 8x^7 + 3x$ में:

(i) पद $5x^2$ की घात = 2

(ii) पद $-8x^7$ की घात = 7

(iii) पद 3x की घात = 1

चूँकि महत्तम घात 7 है, अतः बहुपद $5x^2 - 8x^7 + 3x$ की घात 7 है।

(b) बहुपद की घात :

(i) $4y^3 - 3y + 8$ की घात 3 है।

(ii) $7p + 2$ की घात 1है ($p = p^1$)

(iii) $2m - 7m^8 + m^{13}$ की घात 13 है

❖ उदाहरण ❖

Ex.2 निम्न में से कौनसा बीजीय व्यंजक एक बहुपद है

(i) $3x^2 - 5x$ (ii) $x + \frac{1}{x}$

(iii) $\sqrt{y} - 8$ (iv) $z^5 - \sqrt[3]{z} + 8$

Sol. (i) $3x^2 - 5x = 3x^2 - 5x^1$

यह एक बहुपद है।

(ii) $x + \frac{1}{x} = x^1 + x^{-1}$

यह एक बहुपद नहीं है।

(iii) $\sqrt{y} - 8 = y^{1/2} - 8$

चूँकि पहले पद ($\sqrt{y}$) की घात $\frac{1}{2}$ है, जो कि पूर्ण संख्या नहीं है

(iv) $z^5 - \sqrt[3]{z} + 8 = z^5 - z^{1/3} + 8$

चूँकि, दूसरे पद की घात 1/3 है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है, अतः दी गई व्यंजक बहुपद नहीं है।

Ex.3 बहुपद की घात ज्ञात करो :

(i) $5x - 6x^3 + 8x^7 + 6x^2$

(ii) $2y^{12} + 3y^{10} - y^{15} + y + 3$

(iii) x

(iv) 8

Sol. (i) चूँकि उच्चतम घाताँक वाला पद $8x^7$ है, जिसकी घात 7 है

$\therefore$ दी गई बहुपद की घात 7 है

(ii) चर की उच्चतम घाताँक 15 है।

$\Rightarrow$ घात = 15.

(iii) $x = x^1 \Rightarrow$ घात 1 है।

(iv) $8 = 8x^0 \Rightarrow$ घात = 0 है।

➤ बहुपदों के प्रकार

(A) घात पर आधारित (Based on degree) :

यदि बहुपद की घात निम्न सारणी के अनुसार हो, तब

			उदाहरण
1.	एक	रेखीय	$x + 3,\ y - x + 2,\ \sqrt{3}\,x - 3$
2.	दो	द्विपदीय	$2x^2 - 7, \frac{1}{3}x^2 + y^2 - 2xy, x^2 + 1 + 3y$
3.	तीन	घनीय	$x^3 + 3x^2 - 7x + 8, 2x^2 + 5x^3 + 7,$
4.	चार	चार घातीय	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2, x^4 + 3, \ldots$

(B) पदों पर आधारित (Based on Terms):

यदि बहुपद में पदों की संख्या निम्न सारणी के अनुसार हो, तब

			उदाहरण
1.	एक	एकपदीय	$7x, 5x^9, \frac{7}{3}x^{16}, xy, \ldots\ldots$
2.	दो	द्विपदीय	$2 + 7y^6, y^3 + x^{14}, 7 + 5x^9, \ldots$
3.	तीन	त्रिपदीय	$x^3 - 2x + y, x^{31} + y^{32} + z^{33}, \ldots..$

Note : (1) अचर बहुपद की घात

(जैसे 5, 7, –3, 8/5, …) शून्य है

(2) शून्य बहुपद की घात (शून्य = 0 = शून्य बहुपद) परिभाषित नहीं है।

➤ एक चर में बहुपद

यदि एक बहुपद में केवल एक चर आता हो तो वह बहुपद एक चर में बहुपद कहलाता है।

Ex. $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ घनीय त्रिपदीय

$Q(x) = 7x^7 - 5x^5 - 3x^3 + x + 3$ घात 7 का बहुपद

$R(y) = y$ रेखीय, एकपदीय

$S(t) = t^2 + 3$ द्विघातीय द्विपद

Note : एक चर x में बहुपद जिसकी घात 'n' है x, $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$ है, जहाँ $a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1, a_0$ सभी अचर हैं।

$\therefore$ रेखीय के लिए $ax + b$, $a \neq 0$

द्विघातीय के लिए $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

घनीय के लिए $ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

➤ शेषफल प्रमेय

(i) बहुपद $p(x)$ को जब $x - a$ से विभाजित किया जाता है तो शेषफल $p(a)$ मिलता है

(ii) बहुपद p(x) को जब (x + a) से विभाजित किया जाता है तो शेषफल p(x) का x = –a पर मान होता है।

(iii) (x – a), बहुपद p(x) का एक गुणनखण्ड है, यदि p(a) = 0

(iv) (x + a), बहुपद p(x) का एक गुणनखण्ड है, यदि p(–a) = 0

(v) (x – a)(x – b), p(x) बहुपद का एक गुणनखण्ड है, यदि p(a) = 0 एवं p(b) = 0

❖ **उदाहरण** ❖

Ex.4 जब व्यंजक $4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ को निम्न से विभाजित किया जाता हो, तो प्रत्येक का शेषफल ज्ञात कीजिए।

(a) $x - 1$ (b) $x + 2$ (c) $x + \frac{1}{2}$

Sol. मानाकि $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$

(a) जब p(x) को (x – 1) से विभाजित किया जाता है, तब शेषफल प्रमेय से अभीष्ट शेषफल p(1) होगा

$p(1) = 4(1)^3 - 3(1)^2 + 2(1) - 4$

$= 4 \times 1 - 3 \times 1 + 2 \times 1 - 4$

$= 4 - 3 + 2 - 4 = -1$

(b) जब p(x) को (x + 2) से विभाजित किया जाता है, तब शेषफल प्रमेय से अभीष्ट शेषफल p (–2) होगा

$p(-2) = 4(-2)^3 - 3(-2)^2 + 2(-2) - 4$

$= 4 \times (-8) - 3 \times 4 - 4 - 4$

$= -32 - 12 - 8 = -52$

(c) जब p(x) को $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ से विभाजित किया जाता है, तब शेषफल प्रमेय से अभीष्ट शेषफल होगा

$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 4$

$= 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right) - 3 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} - 4$

$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 - 4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 5$

$= \frac{-2 - 3 - 20}{4} = \frac{-25}{4}$

➢ बहुपद के मान

बहुपद $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ के लिए,

इसका मान x = 3 पर ज्ञात करना

x को 3 से प्रत्येक जगह प्रतिस्थापित करने पर

अतः, $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ का x = 3 पर मान

$f(3) = 3 \times 3^2 - 4 \times 3 + 2$

$= 27 - 12 + 2 = 17.$

इसी तरह से, बहुपद $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$, का मान

(i) x = –2 पर $f(-2) = 3(-2)^2 - 4(-2) + 2$

$= 12 + 8 + 2 = 22$

(ii) x = 0 पर $f(0) = 3(0)^2 - 4(0) + 2$

$= 0 - 0 + 2 = 2$

(iii) $x = \frac{1}{2}$ पर $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 2$

$= \frac{3}{4} - 2 + 2 = \frac{3}{4}$

Ex.5 बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का निम्न पर मान ज्ञात कीजिए:

(i) x = 0 (ii) x = –1

Sol. मानाकि $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$.

(i) x = 0 पर, $p(0) = 5 \times 0 - 4 \times (0)^2 + 3$

$= 0 - 0 + 3 = 3$

(ii) x = –1 पर, $p(-1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3$

$= -5 - 4 + 3 = -6$

➢ बहुपद के मूल (शून्य या हल)

यदि x = a के लिए, बहुपद p(x) का मान 0 है। अर्थात् p(a) = 0; तब x = a बहुपद p(x) का हल (शून्य) कहलाता है।

उदाहरण के लिए :

(i) बहुपद p(x) = x – 2 के लिए p(2) = 2 – 2 = 0

∴ x = 2 या 2 बहुपद p(x) = x – 2 का शून्य कहलाता है

(ii) बहुपद $g(u) = u^2 - 5u + 6$ के लिए

$g(3) = (3)^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

$\therefore$ 3, बहुपद $g(u) = u^2 - 5u + 6$ का शून्य है।

एवं, $g(2) = (2)^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$\therefore$ 2 भी बहुपद $g(u) = u^2 - 5u + 6$ का शून्य है

(a) प्रत्येक रेखीय बहुपद का एक और केवल एक शून्य होता है।

(b) एक दिये गये बहुपद के एक से अधिक शून्य होते हैं।

(c) यदि एक बहुपद की घात n हो, तो इसके मूलों (शून्यों) की अधिकतम संख्या भी n होती है।

उदाहरण के लिए :

यदि एक बहुपद की घात 5 है, तब, बहुपद के अधिकतम 5 हल हो सकते है और यदि बहुपद की घात 8 है, तब इसके हलों की अधिकतम संख्या 8 होगी।

(d) बहुपद का एक हल (शून्य) जरूरी नहीं कि 0 हो

उदाहरण के लिए : यदि $f(x) = x^2 - 4$,

तब $f(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

इसलिए बहुपद $f(x) = x^2 - 4$ का हल 2 है जो कि 0 नहीं है

(e) एक बहुपद का हल 0 हो सकता है

उदाहरण के लिए : यदि $f(x) = x^2 - x$,

तब $f(0) = 0^2 - 0 = 0$

यहाँ 0 बहुपद $f(x) = x^2 - x$. का हल है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.6 सत्यापन कीजिए कि नीचे दिये गये बहुपदों के सामने अंकित संख्याऐं उनके संगत हल हैं :

(i) $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

(iii) $p(x) = x^2, x = 0$

(iv) $p(x) = \ell x + m, x = -\frac{m}{\ell}$

(v) $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

Sol. (i) $p(x) = 3x + 1$

$\Rightarrow p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times -\frac{1}{3} + 1 = -1 + 1 = 0$

$\therefore$ $x = -\frac{1}{3}$ बहुपद $p(x) = 3x + 1$ का एक हल है।

(ii) $p(x) = (x + 1)(x - 2)$

$\Rightarrow p(-1) = (-1 + 1)(-1 - 2) = 0 \times -3 = 0$

एवं, $p(2) = (2 + 1)(2 - 2) = 3 \times 0 = 0$

$\therefore$ $x = -1$ व $x = 2$ दी गई बहुपद के हल हैं।

(iii) $p(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad p(0) = 0^2 = 0$

$\therefore$ $x = 0$ दी गई बहुपद का एक हल है।

(iv) $p(x) = \ell x + m \Rightarrow p\left(-\frac{m}{\ell}\right) = \ell\left(-\frac{m}{\ell}\right) + m$

$= -m + m = 0$

$\therefore$ $x = -\frac{m}{\ell}$ दी गई बहुपद का एक हल है।

(v) $p(x) = 2x + 1 \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1$

$= 1 + 1 = 2 \neq 0$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$ दी गई बहुपद का हल नहीं है।

Ex.7 निम्न बहुपद के हल ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = 2x + 5$

(iii) $p(x) = 3x - 2$

Sol. बहुपद $p(x)$ के हल ज्ञात करने हेतु हम $p(x) = 0$ बहुपदीय समीकरण को हल करते हैं।

(i) बहुपद $p(x) = x + 5$ के हल के लिए

$p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -5$

$\therefore$ $x = -5$ बहुपद $p(x) = x + 5$ का एक हल है।

(ii) $p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 5 = 0$

$\Rightarrow 2x = -5$ एवं $x = \frac{-5}{2}$

$\therefore \quad x = \frac{-5}{2}$ बहुपद $p(x) = 2x + 5$ का एक हल है

(iii) $p(x) = 0 \Rightarrow \; 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow \; 3x = 2$ एवं $x = \frac{2}{3}$.

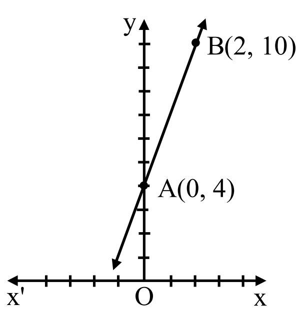
$\therefore x = \frac{2}{3}$ बहुपद $p(x) = 3x - 2$ का हल है।

➤ बहुपद के हलों (शून्यों) का ज्यामितीय अर्थ

मानाकि रेखीय बहुपद $ax + b$ है, एवं $y = ax + b$ का लेखाचित्र सरल रेखा है।

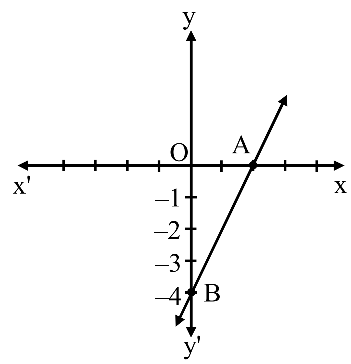
उदाहरण के लिए : चूँकि $y = 3x + 4$ का लेखाचित्र एक सरल रेखा है, जो बिन्दु (0, 4) व (2, 10) से होकर गुजरती है।

x	0	2
$y = 3x + 4$	4	10
बिन्दु	A	B



(i) मानाकि $y = 2x - 4$ का लेखाचित्र, x-अक्ष को $x = 2$ पर प्रतिच्छेदन करता हैं। $2x - 4$ जिसका हल 2 है, इस प्रकार बहुपद $2x - 4$ का शून्य वह है जहाँ पर यह x-अक्ष को ग्राफ $y = 2x - 4$ काटता है, उस बिन्दु का भुज है।

x	2	0
$y = 2x - 4$	0	– 4
बिन्दु	A	B

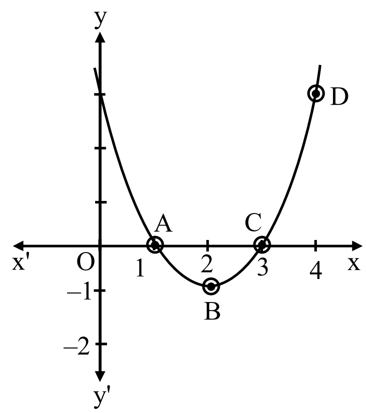


(ii) रेखीय बहुपद की व्यापक समीकरण $ax + b$ है एवं $y = ax + b$ का लेखाचित्र एक सरल रेखा है जो x-अक्ष को बिन्दु $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ पर काटती है। बहुपद $ax + b$ का हल वह बिन्दु है जहाँ ग्राफ x-अक्ष को काटता है। इस बिन्दु का x-निर्देशांक बहुपद का हल होता है।

(iii) द्विघात बहुपद $x^2 - 4x + 3$ का अवलोकन कीजिए तथा $x^2 - 4x + 3$ ग्राफ x-अक्ष को बिन्दु (1, 0) व (3, 0) पर काटता है एवं बहुपद $x^2 - 4x + 3$ के हल ग्राफ व x-अक्ष के प्रतिच्छेदन बिन्दु का x-निर्देशांक है।

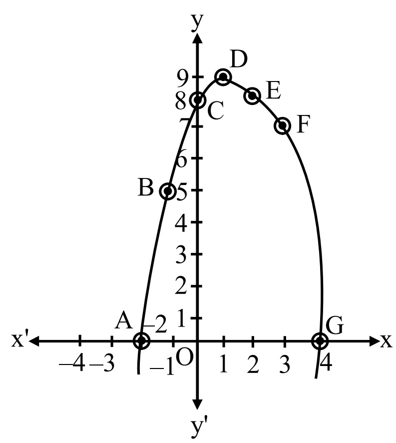
x	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 4x + 3$	0	–1	0	3	8
बिन्दु	A	B	C	D	E

द्विघात बहुपद के लेखाचित्र की आकृति $\cup$ है तथा वक्र परवलयाकार है।



(iv) अब हम एक और बहुपद $-x^2 + 2x + 8$ का अवलोकन करें। इस बहुपद का लेखाचित्र x-अक्ष को (4, 0), (–2, 0) बिन्दुओ पर काटता है एवं बहुपद $-x^2 + 2x + 8$ के हल उन बिन्दुओं के x-निर्देशांक हैं, जहाँ ग्राफ x-अक्ष को काटता है। दिये गये द्विघातीय बहुपद की आकृति ∩ है तथा वक्र परवलयाकार है।

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0	5	8	9	8	7	0
बिन्दु	A	B	C	D	E	F	G



द्विघातीय बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्य उन बिन्दुओं के x-निर्देशांक हैं जहाँ पर वक्र $y = ax^2 + bx + c$ का ग्राफ x-अक्ष को काटता है।

त्रिघातीय बहुपद (Cubic polynomial) : ज्यामिती की सहायता से ज्ञात करें कि एक त्रिघातीय समीकरण के कितने मूल होते हैं

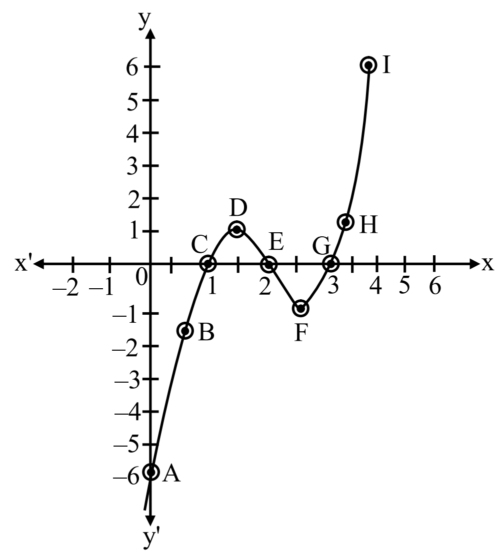
मानाकि त्रिघातीय बहुपद निम्न है

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	− 6	− 1.875	0	0.375	0	− 0.375	0	1.875	6
बिन्दु	A	B	C	D	E	F	G	H	I

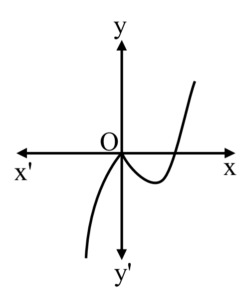
स्थिति 1 :

त्रिघातीय समीकरण का ग्राफ x-अक्ष को तीन बिन्दुओं (1, 0), (2, 0) व (3, 0) पर काटता है, अतः दी गई बहुपद के हल x-अक्ष द्वारा प्रतिच्छेदन बिन्दुओं के x-निर्देशांक हैं।



स्थिति 2 :

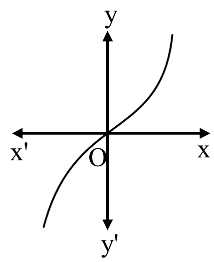
त्रिघातीय समीकरण $x^3 - x^2$; x-अक्ष को बिन्दु (0, 0) व (1, 0) पर प्रतिच्छेदन करते हैं। बहुपद $x^3 - x^2$ के हल उन बिन्दुओं के x-निर्देशाँक हैं, जहाँ लेखाचित्र, x-अक्ष को काटता है।



त्रिघातीय बहुपद के शून्य (हल) 0 व 1 हैं।

स्थिति 3 : $y = x^3$

त्रिघातीय बहुपद का केवल एक हल है।



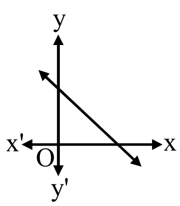
संक्षेप में (In brief) : एक त्रिघातीय समीकरण के 1 या 2 या 3 हल हो सकते हैं या घात तीन वाले कोई बहुपद के अधिकतम तीन हल होते हैं।

टिप्पणी (Remarks) : व्यापक रूप से, n घात वाला बहुपद $y = p(x)$ जिसका ग्राफ x-अक्ष को अधिकतम n बिन्दुओं पर काटता है, अतः n घात के बहुपद $p(x)$ के अधिकतम n हल होते हैं।

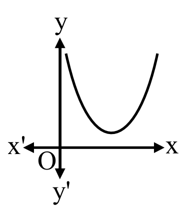
❖ उदाहरण ❖

Ex.8 बतलाइये कि निम्न में से कौनसा लेखाचित्र रेखीय या द्विघातीय बहुपद का है, कारण स्पष्ट करें एवं बहुपद के हलों की संख्या भी ज्ञात कीजिए।

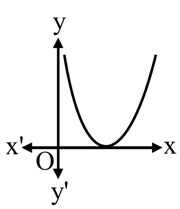
(i)



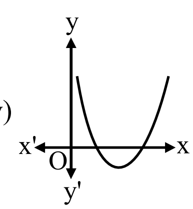
(ii)



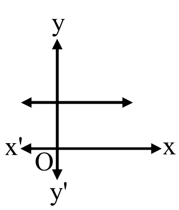
(iii)



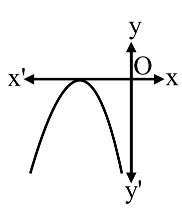
(iv)



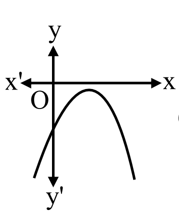
(v)



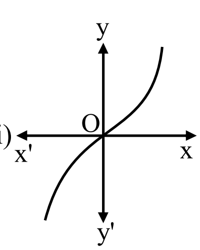
(vi)



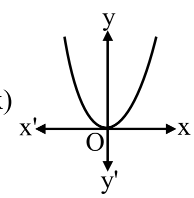
(vii)



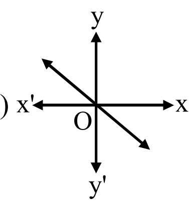
(viii)



(ix)



(x)



Sol. (i) चूँकि लेखाचित्र सरल रेखीय है, अतः लेखाचित्र रेखीय बहुपद है। इसके हलों की संख्या एक ही है, क्योंकि लेखाचित्र, x-अक्ष को केवल एक बिन्दु पर काटता है।

(ii) चूँकि लेखाचित्र एक परवलय है, अतः यह द्विघातीय बहुपद है। इसके हलों की संख्या शून्य है, क्योंकि इसका लेखाचित्र x-अक्ष को नहीं काटता है।

(iii) चूँकि लेखाचित्र द्विघातीय है एवं लेखाचित्र परवलयाकार है एवं इसके हलों की संख्या एक है चूंकि लेखाचित्र x-अक़्ष को केवल एक बिन्दु (दो संपाती बिन्दुओं) पर काटता है।

(iv) चूँकि बहुपद द्विघातीय हैं एवं लेखाचित्र परवलयाकार है एवं इसके हलों की संख्या दो है चूंकि इसका लेखाचित्र x-अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटता है।

(v) चूंकि बहुपद रेखीय है एवं इसका लेखाचित्र सरल रेखीय है। इसके हलों की संख्या शून्य है, चूंकि इसका लेखाचित्र x-अक्ष को नहीं काटता है।

(vi) चूँकि बहुपद द्विघातीय है तथा इसका लेखाचित्र परवलयाकार है एवं इसके हलों की संख्या 1 हैं, चूँकि इसका लेखाचित्र x-अक्ष को केवल एक बिन्दु (दो संपाती बिन्दुओं) पर काटता है।

(vii) चूंकि बहुपद द्विघातीय है तथा इसका लेखाचित्र परवलयाकार है एवं इसके हलों की संख्या शून्य है, चूँकि इसका लेखाचित्र x-अक्ष को नहीं काटता है।

(viii) चूंकि बहुपद न तो रेखीय है और न ही द्विघातीय एवं इसका लेखाचित्र न तो सरल रेखीय है और नहीं परवलयाकार है। इसका केवल एक हल है, चूंकि इसका लेखाचित्र x-अक्ष को केवल एक बिन्दु पर काटता है।

(ix) चूँकि बहुपद द्विघातीय है एवं ग्राफ परवलयाकार है एवं इसके हलों की संख्या केवल एक हैं, चूँकि यह x-अक्ष को केवल एक बिन्दु (दो संपाती बिन्दुओं) पर काटता है।

(x) चूँकि बहुपद रेखीय है एवं ग्राफ सरल रेखीय है एवं इसके हलों की संख्या एक है एवं इसका लेखाचित्र x-अक्ष को केवल एक बिन्दु पर काटता है।

➤ बहुपद के मूलों तथा गुणांको में सम्बन्ध

निम्न द्विघातीय बहुपद पर विचार कीजिए

$P(x)=2x^2-16x+30.$

अब, $2x^2 - 16x + 30 = (2x - 6)(x - 3)$

$= 2(x - 3)(x - 5)$

बहुपद P(x) के हल 3 व 5 हैं।

हलों का योग

$= 3 + 5 = 8 = \frac{-(-16)}{2} = -\left[\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}\right]$

हलों का गुणनफल

$= 3 \times 5 = 15 = \frac{30}{2} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

यदि $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ द्विघातीय बहुपद है एवं α, β बहुपद के दो हल है, तब $\boxed{\alpha+\beta = -\frac{b}{a}}, \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$

❖ उदाहरण ❖

Ex.9 द्विघातीय बहुपद $6x^2 - 13x + 6$ के हल ज्ञात कीजिए एवं हलों तथा इसके गुणांकों में सम्बन्ध का सत्यापन कीजिए।

Sol. चूँकि $6x^2 - 13x + 6 = 6x^2 - 4x - 9x + 6$

$= 2x(3x - 2) - 3(3x - 2)$

$= (3x - 2)(2x - 3)$

इसलिए, $6x^2 - 13x + 6$ का मान 0 है, जबकि $(3x - 2) = 0$ या $(2x - 3) = 0$ अर्थात्

जब $x = \frac{2}{3}$ या $\frac{3}{2}$

अतः $6x^2 - 13x + 6$ के हल $\frac{2}{3}$ या $\frac{3}{2}$ हैं

हलों का योग

$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6} = \frac{-(-13)}{6} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

हलों का गुणनफल

$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

Ex.10 द्विघातीय बहुपद $4x^2 - 9$ के हलों को ज्ञात कीजिए एवं इसके मूलों तथा गुणांकों में सम्बन्ध का सत्यापन कीजिए।

Sol. हम जानते हैं कि

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$

अतः, $4x^2 - 9$ का मान 0 है, जबकि

$2x - 3 = 0$ या $2x + 3 = 0$

अर्थात्, जब $x = \frac{3}{2}$ या $x = -\frac{3}{2}$.

इस प्रकार, $4x^2 - 9$ के हल $\frac{3}{2}$ व $-\frac{3}{2}$ है।

हलों का योग

$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 = \frac{-(0)}{4} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

हलों का गुणनफल

$= \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-9}{4} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

Ex.11 द्विघातीय बहुपद $9x^2 - 5$ के हल ज्ञात कीजिए एवं हलों व गुणांकों में सम्बन्ध का सत्यापन कीजिए।

Sol. हम जानते हैं कि

$9x^2 - 5 = (3x)^2 - (\sqrt{5})^2 = (3x - \sqrt{5})(3x + \sqrt{5})$

इसलिए, $9x^2 - 5$ का मान 0 है,

जबकि $3x - \sqrt{5} = 0$ या $3x + \sqrt{5} = 0$

अर्थात्, जब $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ या $x = \frac{-\sqrt{5}}{3}$.

हलों का योग

$$= \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} = 0 = \frac{-(0)}{9} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

हलों का गुणनफल

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{-5}{9} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

Ex.12 यदि α व β बहुपद $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के मूल हों तो इसके हलों एवं गुणांकों में सम्बन्ध का सत्यापन कीजिए।

Sol. चूंकि α व β बहुपद $ax^2 + bx + c$ के हल हैं

अतः, $(x - \alpha)$, $(x - \beta)$ बहुपद $ax^2 + bx + c$ के गुणनखण्ड हैं

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = k\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$ ...(1)

x^2, x व अचर पद की (1) में दोनों तरफ से तुलना करने पर

$a = k, b = -k(\alpha + \beta)$ व $c = k\alpha\beta$

$\Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{k}$ व $\alpha\beta = \frac{c}{k}$

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ व $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ $[\because k = a]$

हलों का योग $= \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

हलों का गुणनफल $= \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

Ex. 13 द्विघातीय बहुपद $ax^2 + bx + c$ के मूलों तथा गुणांकों के मध्य सम्बन्ध को सिद्ध करो।

Sol. मानाकि α व β बहुपद $ax^2 + bx + c$ के मूल हैं

$$\therefore \alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ....(1)$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ....(2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः, बहुपद $ax^2 + bx + c$ के हलों का योग $-\frac{b}{a}$ हैं।

(1) व (2) को गुणा करने पर, हम पाते हैं कि

$$\alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{(-b)^2 - \sqrt{(b^2 - 4ac)^2}}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः, हलों का योग $= \frac{c}{a}$

> व्यापक रूप में, यह सिद्ध किया जा सकता हैं कि यदि α, β, γ त्रिघातीय बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के मूल हों, तब
>
> $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$
>
> $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$
>
> $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$
>
> Note, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ व $\frac{d}{a}$ अर्थयुक्त हैं क्योंकि $a \neq 0$.

Ex.14 द्विघातीय बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के मूल ज्ञात कीजिए एवं मूलों तथा गुणांकों में सम्बन्ध का सत्यापन कीजिए।

Sol. $x^2 - 2x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8$

$= x(x - 4) + 2(x - 4) = (x - 4)(x + 2)$

अतः, $x^2 - 2x - 8$ का मान शून्य है जबकि $x - 4 = 0$ या $x + 2 = 0$ अर्थात्, जब $x = 4$ या $x = -2$

इसलिए, $x^2 - 2x - 8$ के मूल 4, – 2.

मूलों का योग

$$= 4 - 2 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

मूलों का गुणनफल

$$= 4\,(-2) = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

Ex.15 नीचे एक त्रिघात बहुपद एवं उसके सामने कुछ संख्याऐं दी गई हैं तो सिद्ध करो कि ये संख्याऐं बहुपद के मूल हैं तथा मूलों एवं गुणांकों में सम्बन्ध स्थापित कीजिए। $2x^3 + x^2 - 5x + 2$; $\frac{1}{2}$, 1, – 2

Sol. बहुपद, p(x) मानाकि $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ है

बहुपद $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ का मान जबकि $x = 1/2$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 = 0$$

अतः, 1/2 बहुपद p(x) का मूल है

त्रिघात बहुपद $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ में $x = 1$ रखने पर

$= 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2 = 2 + 1 - 5 + 2 = 0$

त्रिघातीय बहुपद $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ में $x = -2$ रखने पर

$= 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5\,(-2) + 2$

$= -16 + 4 + 10 + 2 = 0$

अतः, $\frac{1}{2}$, 1, – 2 दी गई बहुपद के मूल हैं

p(x) के हलों की संख्या

$$= \frac{1}{2} + 1 - 2 = -\frac{1}{2} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

दो हलों को एक साथ लेकर किये गये गुणनफलों का योग

$$= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-2) + 1 \times (-2)$$

$$= \frac{1}{2} - 1 - 2 = -\frac{5}{2} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

सभी तीनों मूलों का गुणनफल

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \times (1) \times (-2) = -1$$

$$= \frac{-(2)}{2} = \frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

➢ द्विघात बहुपद के मूलों के सममित फलन

◈ सममित फलन (Symmetric function):

एक बीजीय व्यंजक जो α व β में है, इसमें यदि α व β को परस्पर परिवर्त कर दिया जाये तब भी बीजीय व्यंजक वही रहता हो तो यह α व β में सममित व्यंजक कहलाता है

उदाहरण के लिए, $\alpha^2 + \beta^2$ व $\alpha^3 + \beta^3$ सममित फलन हैं। सममित फलन को $(\alpha + \beta)$ व $\alpha\beta$ के पदों में व्यक्त किया जाता है। अतः इसे द्विघात समीकरण से परिकलित किया जाता है।

◈ α व β में कुछ महत्त्वपूर्ण सम्बन्ध (Some useful relations involving α and β) :

1. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
2. $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
3. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)\,(\alpha - \beta) = (\alpha + \beta)\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$
4. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta\,(\alpha + \beta)$
5. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta\,(\alpha - \beta)$
6. $\alpha^4 + \beta^4 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$
7. $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)\,(\alpha^2 - \beta^2)$ then use (1) and (3)

❖ उदाहरण ❖

Ex.16 यदि α व β बहुपद $ax^2 + bx + c$ के मूल हों तब निम्न के मान ज्ञात करो

(i) $\alpha - \beta$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$.

Sol. चूँकि α व β बहुपद $ax^2 + bx + c$ के मूल है

$\therefore \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}; \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$

(i) $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$

$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta$

$= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

Ex.17 द्विघातीय बहुपद $ax^2 + bx + c$ के मूल α व β हों, तब निम्न का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\alpha^2 - \beta^2$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$.

Sol. चूँकि α व β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के मूल हैं।

$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$

(i) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

$= -\frac{b}{a}\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$= -\frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}$

$= -\frac{b\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^2}$

(ii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$

$= (\alpha + \beta)[(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) - 3\alpha\beta]$

$= (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta]$

$= \frac{-b}{a}\left[\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - \frac{3c}{a}\right]$

$= \frac{-b}{a}\left[\frac{b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right] = \frac{-b}{a}\left(\frac{b^2 - 3ac}{a^2}\right)$

$= \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$

➤ दिये गये मूलों से द्विघातीय बहुपद बनाना

मानाकि द्विघातीय बहुपद के मूल α व β हैं।

$\therefore \quad x = \alpha, \quad x = \beta$

$x - \alpha = 0, \quad x - \beta = 0$

स्पष्टतः द्विघात बहुपद है

$(x - \alpha)(x - \beta)$

अर्थात्, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

x^2 – (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल

❖ उदाहरण ❖

Ex.18 द्विघात बहुपद बनाइये जिसके मूल 4 व 6 हैं ?

Sol. मूलों का योग = 4 + 6 = 10

मूलों का गुणनफल = 4 × 6 = 24

अतः बनने वाली बहुपद

= x^2 – (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल

$= x^2 - 10x + 24$

Ex.19 द्विघातीय बहुपद बनाइये जिसमें मूल –3, 5 हैं ?

Sol. मूल जो दिये गये हैं – 3 व 5 हैं

मूलों का योग = – 3 + 5 = 2

मूलों का गुणनफल = (–3) × 5 = – 15

अतः बनने वाली द्विघात बहुपद

= x^2 – (मूलो का योग) x + मूलों का गुणनफल

$= x^2 - 2x - 15$

Ex.20 वह द्विघात बहुपद बनाइये जिसके मूलों का योग एवं गुणनफल क्रमशः निम्न प्रकार हैं -

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

Sol. मानाकि बहुपद $ax^2 + bx + c$ हैं एवं इसके मूल α व β हैं।

(i) यहाँ, $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ एवं $\alpha \cdot \beta = -1$

इस प्रकार बनने वाला बहुपद

$= x^2 -$ (मूलों का योग) $x +$ मूलो का गुणनफल

$= x^2 - \left(\frac{1}{4}\right) x - 1 = x^2 - \frac{x}{4} - 1$

अन्य बहुपद $k\left(x^2 - \frac{x}{4} - 1\right)$

यदि $k = 4$ हो, तो बहुपद $4x^2 - x - 4$.

(ii) यहाँ, $\alpha + \beta = \sqrt{2}$, $\alpha\beta = \frac{1}{3}$

इस प्रकार बनने वाला बहुपद

$= x^2 -$ (मूलों का योग) $x +$ मूलों का गुणनफल

$= x^2 - (\sqrt{2})\, x + \frac{1}{3}$ या $x^2 - \sqrt{2}\, x + \frac{1}{3}$

अन्य बहुपद $k\left(x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{3}\right)$

यदि $k = 3$ हो, तो बहुपद

$3x^2 - 3\sqrt{2}\, x + 1$

(iii) यहाँ, $\alpha + \beta = 0$ and $\alpha.\beta = \sqrt{5}$

इस प्रकार बनने वाला बहुपद

$= x^2 -$ (मूलों का योग) $x +$ मूलों का गुणनफल

$= x^2 - (0)\, x + \sqrt{5} = x^2 + \sqrt{5}$

Ex.21 वह त्रिघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिनके मूलों का योग, दो दो मूल लेकर किये गये गुणनफल का योग, तथा मूलों का गुणनफल क्रमशः 2, – 7 व –14 हैं।

Sol. मानाकि त्रिघातीय बहुपद

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ है

$\Rightarrow x^3 + \frac{b}{a} x^2 + \frac{c}{a} x + \frac{d}{a}$ ....(1)

एवं इसके मूल α, β व γ हैं, तब

$\alpha + \beta + \gamma = 2 = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -7 = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -14 = -\frac{d}{a}$

$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ व $\frac{d}{a}$ का मान (1) रखने पर, हम पाते है

$x^3 + (-2)\, x^2 + (-7)x + 14$

$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - 7x + 14$

Ex.22 वह त्रिघातीय बहुपद ज्ञात कीजिए जिनके मूलों का योग, दो दो मूल लेकर किये गये गुणनफल का योग एवं मूलों का गुणनफल क्रमशः 0, –7 व –6 हैं।

Sol. मानाकि त्रिघातीय बहुपद

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow x^3 + \frac{b}{a} x^2 + \frac{c}{a} x + \frac{d}{a}$ ....(1)

एवं इसके मूल α, β, γ हैं, तब

$\alpha + \beta + \gamma = 0 = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -7 = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -6 = \frac{-d}{a}$

$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ एवं $\frac{d}{a}$ का मान (1) रखने पर, हम पाते हैं कि

$x^3 - (0)\, x^2 + (-7)\, x + (-6)$

या $x^3 - 7x + 6$

Ex.23 यदि α व β बहुपद $ax^2 + bx + c$ के मूल हों तो वह बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{1}{\alpha}$ व $\frac{1}{\beta}$ हैं।

Sol. चूँकि α व β बहुपद $ax^2 + bx + c$ के मूल हैं,

अतः $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

मूलों का योग $= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$

$= \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$

मूलों का गुणनफल

$= \frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}$

परन्तु अभीष्ट बहुपद निम्न सूत्र से दी जाती है

x^2 – (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल

$\Rightarrow\ x^2 - \left(\frac{-b}{c}\right) x + \left(\frac{a}{c}\right)$

या $x^2 + \frac{b}{c} x + \frac{a}{c}$

या $c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right)$

$\Rightarrow\ cx^2 + bx + a$

Ex.24 यदि α व β बहुपद $x^2 + 4x + 3$ हों, तो वह बहुपद बनाइये जिनके मूल $1 + \frac{\beta}{\alpha}$ व $1 + \frac{\alpha}{\beta}$ हैं।

Sol. चूँकि α व β बहुपद $x^2 + 4x + 3$ के मूल हैं

तब, $\alpha + \beta = -4,\ \alpha\beta = 3$

मूलों का योग

$= 1 + \frac{\beta}{\alpha} + 1 + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\beta + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{(-4)^2}{3} = \frac{16}{3}$

मूलों का गुणनफल

$= \left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right) = 1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= 2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{(-4)^2}{3} = \frac{16}{3}$

परन्तु अभीष्ट बहुपद निम्न सूत्र से दिया जाता है

x^2 – (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल

या $x^2 - \frac{16}{3} x + \frac{16}{3}$ or $k\left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3}\right)$

या $3\left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3}\right)$ (यदि $k = 3$)

$\Rightarrow\ 3x^2 - 16x + 16$

➤ एक बहुपद को दूसरे बहुपद से विभाजित करने की क्रियाविधि

पद 1:

सर्वप्रथम भाज्य एवं भाजक के पदों को उनकी घातों के घटते क्रम में व्यवस्थित करते है।

पद 2 :

भागफल का प्रथम पद प्राप्त करने हेतु भाज्य के महत्तम घात वाले पद को भाजक के महत्तम घात वाले पद से विभाजन करें।

पद 3 :

भागफल का दूसरा पद प्राप्त करने हेतु अब नये भाज्य जो शेषफल से बना है की महत्तम घात वाले पद को भाजक के महत्तम घात वाले पद से विभाजन करें।

पद 4 :

यह प्रक्रिया तब तक जारी रखें जब तक कि शेषफल की घात, भाजक की घात से कम न हो जायें

◈ बहुपद के विभाजन के नियम (Division Algorithm for Polynomial)

यदि $p(x)$ व $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं, जबकि $g(x) \neq 0$ तब हम बहुपद $q(x)$ व $r(x)$ इस प्रकार प्राप्त करेंगें कि

$$p(x) = q(x) \times g(x) + r(x)$$

जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ की घात < $g(x)$ की घात

यह परिणाम बहुपदों के लिये विभाजन नियम कहलाता है।

भाज्य = भागफल × भाजक + शेषफल

❖ उदाहरण ❖

Ex.25 $3x^3 + 16x^2 + 21x + 20$ को $x + 4$ से विभाजित कीजिए

Sol.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 4x + 5 \\ \hline
x+4 & 3x^3 + 16x^2 + 21x + 20 \quad ; q(x) \text{ का पहला पद } = \dfrac{3x^3}{x} = 3x^2 \\
 & 3x^3 + 12x^2 \\
 & - \quad - \\ \hline
 & \quad 4x^2 + 21x + 20 \quad ; q(x) \text{ का दूसरा पद } = \dfrac{4x^2}{x} = 4x \\
 & \quad 4x^2 + 16x \\
 & \quad - \quad - \\ \hline
 & \quad\quad 5x + 20 \quad ; q(x) \text{ का तीसरा पद } = \dfrac{5x}{x} = 5 \\
 & \quad\quad 5x + 20 \\
 & \quad\quad - \quad - \\ \hline
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}$$

भागफल $= 3x^2 + 4x + 5$

शेषफल $= 0$

Ex.26 विभाजन नियम प्रयोग से, जब नीचे दिये गये बहुपद $p(x)$ को जब $g(x)$ से विभाजित किया जाता है, तो भागफल व शेषफल ज्ञात कीजिए

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = x^2 - 2$

Sol. हम जानते हैं कि

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ व $g(x) = x^2 - 2$

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 3 \\ \hline
x^2-2 & x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \quad \text{भागफल का प्रथम पद } \dfrac{x^3}{x^2} = x \\
 & x^3 \quad\quad - 2x \\
 & - \quad\quad + \\ \hline
 & \quad - 3x^2 + 7x - 3 \quad \text{भागफल का दूसरा पद } \dfrac{-3x^2}{x^2} = -3 \\
 & \quad - 3x^2 \quad\quad + 6 \\
 & \quad + \quad\quad - \\ \hline
 & \quad\quad 7x - 9
\end{array}$$

यह प्रक्रिया अब हम यहाँ रोकेंगे, क्योंकि

$(7x - 9)$ की घात $< (x^2 - 2)$ की घात

अतः भागफल $= x - 3$, शेषफल $= 7x - 9$

इस प्रकार,

भागफल × भाजक + शेषफल

$= (x - 3)(x^2 - 2) + 7x - 9$

$= x^3 - 2x - 3x^2 + 6 + 7x - 9$

$= x^3 - 3x^2 + 5x - 3 =$ भाज्य

इस प्रकार विभाजन नियम का सत्यापन हुआ।

Ex.27 विभाजन नियम प्रयोग से, जब $p(x)$ को $g(x)$ से विभाजित करते हैं, तब भागफल व शेषफल ज्ञात कीजिए

$p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, g(x) = x^2 + 1 - x$

Sol. हम जानते हैं कि,

$p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, g(x) = x^2 + 1 - x$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 3 \\ \hline
x^2 - x + 1 & x^4 - 3x^2 + 4x + 5 \\
 & x^4 - x^3 + x^2 \\
 & - \quad + \quad - \\ \hline
 & \quad x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\
 & \quad x^3 - x^2 + x \\
 & \quad - \quad + \quad - \\ \hline
 & \quad\quad -3x^2 + 3x + 5 \\
 & \quad\quad -3x^2 + 3x - 3 \\
 & \quad\quad + \quad - \quad + \\ \hline
 & \quad\quad\quad\quad 8
\end{array}$$

यह प्रक्रिया अब हम यहाँ रोकते हैं क्योंकि

(8) की घात $< (x^2 - x + 1)$ की घात

अतः भागफल $= x^2 + x - 3$, शेषफल $= 8$

अतः,

भागफल × भाजक + शेषफल

$= (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1) + 8$

$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x - 3x^2 + 3x - 3 + 8$

$= x^4 - 3x^2 + 4x + 5 \quad =$ भाज्य

इस प्रकार विभाजन नियम का सत्यापन हुआ।

Ex.28 विभाजन नियम प्रयोग से, जाँच करके बतलाइये कि क्या पहला बहुपद दूसरे बहुपद का एक गुणनखण्ड है। $t^2 - 3; 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$.

Sol. $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ को $t^2 - 3$ से विभाजित करने पर

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2t^2 + 3t + 4 \\
t^2 - 3 & 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12 \\
 & 2t^4 \quad - 6t^2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 3t^3 + 4t^2 + 9t - 12 \\
 & 3t^3 \quad - 9t \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 4t^2 \quad - 12 \\
 & 4t^2 \quad - 12 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

यहाँ, शेषफल 0 है तथा $t^2 - 3$:

$2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ का एक गुणनखण्ड है।

$2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12 = (2t^2 + 3t + 4)(t^2 - 3)$

Ex.29 बहुपद $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के सभी मूलों को ज्ञात कीजिए, यदि इसके कोई दो मूल $\sqrt{\frac{5}{3}}$ व $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

Sol. चूँकि दो मूल $\sqrt{\frac{5}{3}}$ व $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, हैं

$x = \sqrt{\frac{5}{3}}, x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

$\Rightarrow \left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = x^2 - \frac{5}{3}$ या $3x^2 - 5$

दी गई बहुपद का एक गुणनखण्ड है

अब, विभाजन नियम से, बहुपद को $3x^2 - 5$ से विभाजित करने पर

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
3x^2 - 5 & 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 \\
 & 3x^4 \quad - 5x^2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
 & 6x^3 \quad - 10x \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 3x^2 \quad - 5 \\
 & 3x^2 \quad - 5 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

अतः, $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

$= (3x^2 - 5)(x^2 + 2x + 1) + 0$

भागफल $= x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

$(x + 1)^2$ के मूल $-1, -1$ हैं।

अतः, इसके हल $\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}, -1, -1$ हैं।

Ex.30 बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को जब $g(x)$ से विभाजित किया जाता है तो भागफल तथा शेषफल क्रमशः $x - 2$ व $-2x + 4$ प्राप्त होते हैं, तो $g(x)$ ज्ञात करो

Sol. $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

$q(x) = x - 2$ व $r(x) = -2x + 4$

विभाजन नियम से, हम जानते हैं कि

$p(x) = q(x) \times g(x) + r(x)$

अतः,

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x - 2) \times g(x) + (-2x + 4)$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4 = (x - 2) \times g(x)$

$\Rightarrow g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x - 2}$

बहुपद $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ को $x - 2$ से विभाजन करने पर $g(x)$ प्राप्त होगा

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
x-2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \quad \text{भागफल का प्रथम पद } \frac{x^3}{x} = x \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & -x^2 + 3x - 2 \quad \text{भागफल का दूसरा पद } \frac{-x^2}{x} = -x \\
 & -x^2 + 2x \\
 & + \quad - \\
\hline
 & x - 2 \quad \text{भागफल का तीसरा पद } \frac{x}{x} = 1 \\
 & x - 2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

अतः, $g(x) = x^2 - x + 1$.

Ex.31 बहुपद $p(x)$, $q(x)$ एवं $r(x)$ के उदाहरण दीजिए जो विभाजन नियम को संतुष्ट करते हों एवं

(i) $p(x)$ की घात $= q(x)$ की घात

(ii) $q(x)$ की घात $= r(x)$ की घात

(iii) $q(x)$ की घात $= 0$

Sol. (i) मानाकि $q(x) = 3x^2 + 2x + 6$, $q(x)$ की घात $= 2$

$p(x) = 12x^2 + 8x + 24$, $p(x)$ की घात $= 2$

अतः, $p(x)$ की घात $= q(x)$ की घात

(ii) $p(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2$

$q(x) = x^2 + x + 1$, $q(x)$ की घात = 2

$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$r(x) = 2x^2 - 2x + 1$, $r(x)$ की घात = 2

अतः, $q(x)$ की घात = $r(x)$ की घात

(iii) मानाकि $p(x) = 2x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 4x + 12$

$q(x) = 2$, $q(x)$ की घात = 0

$g(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

$r(x) = 0$

अतः, $q(x)$ की घात = 0

Ex.32 यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के हल $a - b, a , a + b$ हों तो a व b ज्ञात कीजिए।

Sol. $\because a - b, a, a + b$ हल हैं

$\therefore$ गुणनफल $(a - b)\, a(a + b) = -1$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)\, a = -1 \quad \ldots(1)$

एवं मूलों का योग $(a - b) + a + (a + b) = 3$

$\Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \quad \ldots(2)$

(1) व (2) से,

$(1 - b^2)1 = -1$

$\Rightarrow 2 = b^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

$\therefore a = -1$ व $b = \pm\sqrt{2}$

Ex.33 यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के दो हल $2 \pm \sqrt{3}$ हों तो अन्य ज्ञात करो

Sol. $\because \ 2 \pm \sqrt{3}$ हल हैं

$\therefore \ x = 2 \pm \sqrt{3}$

$\Rightarrow \ x - 2 = \pm\sqrt{3}$ (दोनों तरफ का वर्ग करने पर)

$\Rightarrow \ (x - 2)^2 = 3 \ \Rightarrow \ x^2 + 4 - 4x - 3 = 0$

$\Rightarrow \ x^2 - 4x + 1 = 0$ जो कि दी गई बहुपद का एक गुणनखण्ड है

$\therefore$ अन्य गुणनखण्ड

$$= \frac{x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35}{x^2 - 4x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 35 \\
x^2 - 4x + 1 & x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35 \\
 & \underset{-}{x^4} \underset{+}{- 4x^3} \underset{-}{+ x^2} \\
 & \quad - 2x^3 - 27x^2 + 138x - 35 \\
 & \quad \underset{+}{-2x^3} \underset{-}{+ 8x^2} \underset{+}{-} 2x \\
 & \qquad - 35x^2 + 140x - 35 \\
 & \qquad \underset{+}{-35x^2} \underset{-}{+ 140x} \underset{+}{- 35} \\
 & \qquad \times
\end{array}$$

$\therefore$ अन्य गुणनखण्ड $= x^2 - 2x - 35$

$= x^2 - 7x + 5x - 35$

$= x(x - 7) + 5(x - 7)$

$= (x - 7)\,(x + 5)$

$\therefore$ अन्य हल $(x - 7) = 0 \Rightarrow x = 7$

$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

Ex.34 यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को अन्य बहुपद $x^2 - 2x + k$ से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल $x + a$ आता हो तो k व a का मान ज्ञात कीजिए।

Sol.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + (8 - k) \\
x^2 - 2x + k & x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 \\
 & \underset{-}{x^4} \underset{+}{- 2x^3} \underset{-}{+ x^2k} \\
 & \quad - 4x^3 + x^2\,(16 - k) - 25x + 10 \\
 & \quad \underset{+}{-4x^3} \underset{-}{+ x^2\,(8)} \quad \underset{+}{-} 4xk \\
 & \qquad x^2\,[8 - k] + x[4k - 25] + 10 \\
 & \qquad \underset{-}{x^2\,[8 - k]} \underset{+}{- 2x[8 - k]} \underset{-}{+ k(8 - k)} \\
 & \qquad x\,[4k - 25 + 16 - 2k] + 10 - 8k + k^2
\end{array}$$

प्रश्न के अनुसार, शेषफल $x + a$ है

$\therefore$ x का गुणांक = 1

$\Rightarrow 2k - 9 = 1$

$\Rightarrow k = (10/2) = 5$

एवं अचर पद = a

$\Rightarrow k^2 - 8k + 10 = a$

$\Rightarrow (5)^2 - 8(5) + 10 = a$

$\Rightarrow a = 25 - 40 + 10$

$\Rightarrow a = -5$

$\therefore k = 5, a = -5$