निर्देशांक ज्यामिती

सूची

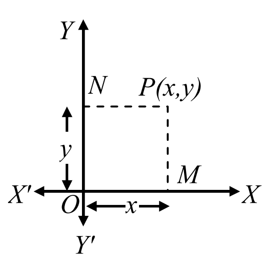
- परिभाषा
- कार्तीय निर्देशांक
- दो बिन्दुओं के मध्य दूरी
- विभाजन सूत्र
- विभाजन सूत्र के अनुप्रयोग
- त्रिभुजों का क्षेत्रफल

➢ निर्देशांक ज्यामिती

यह ज्यामिती की एक शाखा है जो समतल तथा बीजीय संख्याओं के युग्म में बिन्दु की स्थिति के मध्य निश्चित रूप से व्यवस्थित रहते है, निर्देशांक कहलाते है।

➢ कार्तीय निर्देशांक (समकोणीय निर्देशांक)

कार्तीय निर्देशांको में बिन्दु P की स्थिति निश्चित बिन्दु से होकर जाने वाली दो लम्बवत् रेखाओं से दूरियों को ज्ञात कर की जाती है। माना O स्थिर बिन्दु है जो मूलबिन्दु कहलाता है तथा XOX′ तथा YOY′ बिन्दु O से होकर जाने वाली दो लम्बवत् रेखायें है, कार्तीय या समकोणीय निर्देशांक अक्ष कहलाती है।



OX तथा OY पर क्रमशः PM तथा PN लम्ब खींचिए। OM (या MP) y-निर्देशांक या बिन्दु P की कोटि कहलाता है।

❖ निर्देशांक अक्ष

चित्र में OX एवं OY क्रमशः x-अक्ष तथा y-अक्ष कहलाते हैं तथा दोनों एक साथ निर्देशी अक्षों के नाम से जाने जाते है।

❖ मूल बिन्दु

यह निर्देशी अक्षों का प्रतिच्छेद बिन्दु O होता है।

❖ मूलबिन्दु के निर्देशांक

यह दोनों अक्षों से शून्य दूरी रखता है जबकि इसके भुज एवं कोटि दोनों शून्य हों। इसलिए मूलबिन्दु के निर्देशांक (0, 0) होते हैं।

❖ भुज

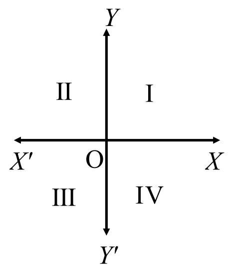
बिन्दु P की y-अक्ष से दूरी इसका भुज कहलाता है चित्र में OM भुज है।

❖ कोटि

बिन्दु P की x-अक्ष से दूरी इसकी कोटि कहलाती है। चित्र में ON कोटि है।

❖ चतुर्थांश

अक्ष समतल को चार भागों में विभाजित करता है। ये चार भाग चतुर्थांश कहलाते हैं। अतः समतल अक्षों तथा चतुर्थांशों को समाहित करता है। समतल कार्तीय समतल या निर्देशी समतल या xy-समतल कहलाता है। ये अक्ष निर्देशी अक्ष कहलाती हैं। चतुर्थांश समतल का $\frac{1}{4}$ भाग होता है, जो निर्देशी अक्षों द्वारा विभाजित होता है।



(i) XOY प्रथम चतुर्थांश कहलाता है

(ii) YOX′ दूसरा चतुर्थांश

(iii) X′OY′ तीसरा चतुर्थांकश

(iv) Y′OX चौथा चतुर्थांश

जैसा कि चित्र में अंकित किया गया है।

➤ निर्देशांको के चिन्हों के नियम

(i) प्रथम चतुर्थांश में दोनों निर्देशांक अर्थात् बिन्दु के भुज तथा कोटि धनात्मक होते है।

(ii) दूसरे चतुर्थांश में किसी बिन्दु के लिए भुज ऋणात्मक तथा कोटि धनात्मक होती है।

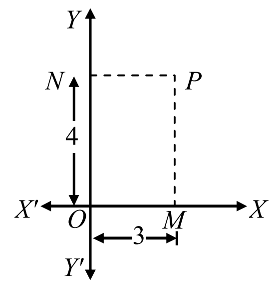
(iii) तीसरे चतुर्थांश में किसी बिन्दु के लिए भुज तथा कोटि दोनों ऋणात्मक होते है।

(iv) चौथे चतुर्थांश में किसी बिन्दु के लिए भुज धनात्मक तथा कोटि ऋणात्मक होती हैं।

चतुर्थांश	x-निर्देशांक	y-निर्देशांक	बिन्दु
प्रथम चतुर्थांश	+	+	(+,+)
दूसरा चतुर्थांश	–	+	(–,+)
तीसरा चतुर्थांश	–	–	(–,–)
चौथा चतुर्थांश	+	–	(+,–)

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 संलग्न आकृति से निम्न को ज्ञात कीजिए



(i) भुज

(ii) कोटि

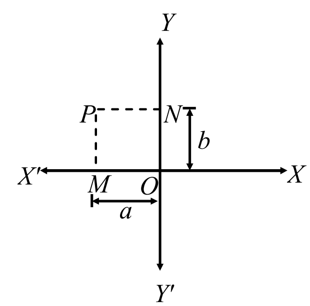
(iii) बिन्दु P के निर्देशांक

Sol. (i) भुज = PN = OM = 3 इकाई

(ii) कोटि = PM = ON = 4 इकाई

(iii) बिन्दु निर्देशांक = (भुज, कोटि) = (3, 4)

Ex.2 दिये गये चित्र में बिन्दु P के (i) भुज (ii) कोटि (iii) निर्देशांक ज्ञात कीजिए



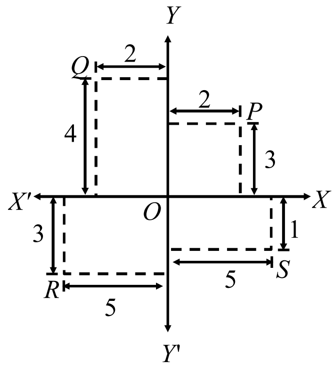
Sol. (i) बिन्दु P का भुज = – NP = – OM = – a

(ii) बिन्दु P की कोटि = MP = ON = b

(iii) बिन्दु P के निर्देशांक = (भुज, कोटि)

= (–a, b)

Ex.3 दिये गये चित्र में P, Q, R तथा S के (i) भुज (ii) कोटि तथा (iii) निर्देशांक लिखिए।



Sol. **बिन्दु P**

P का भुज = 2; P की कोटि = 3

P के निर्देशांक = (2, 3)

बिन्दु Q

Q का भुज = – 2 ; Q की कोटि = 4

Q के निर्देशांक = (–2, 4)

बिन्दु R

R का भुज = – 5; R की कोटि = – 3

R के निर्देशांक = (–5, –3)

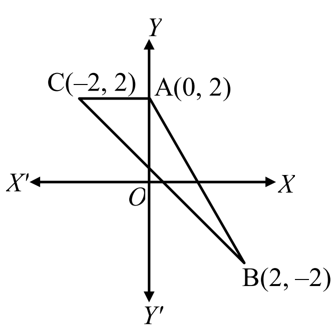
बिन्दु S

S का भुज = 5; S की कोटि = – 1

S के निर्देशांक = (5, – 1)

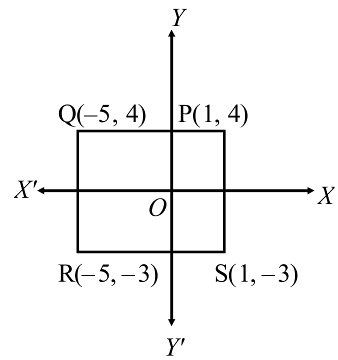
Ex.4 त्रिभुज ABC बनाइए जिसके शीर्ष A, B एवं C क्रमशः (0, 2), (2, – 2), तथा (–2, 2) है।

Sol. भुज 0 तथा कोटि = 2 लेकर बिन्दु A अंकित करते हैं, इसी प्रकार भुज 2 तथा –2 एवं कोटि – 2 तथा 2 लेकर क्रमशः B तथा C को अंकित करते है। A, B तथा C को मिलाते हैं। यह अभीष्ट त्रिभुज है।



Ex.5 एक आयत PQRS बनाइए जिसके शीर्ष P, Q, R तथा S क्रमशः (1, 4), (–5, 4), (–5, –3) तथा (1, – 3) है।

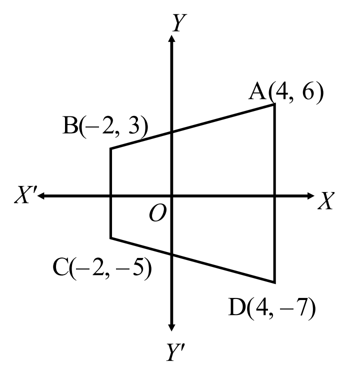
Sol. भुज 1 तथा कोटि – 4 लेते हुए बिन्दु P बनाया इसी प्रकार भुज –5, –5 तथा 1 एवं कोटियाँ क्रमशः 4, –3 तथा –3 लेते हुए क्रमशः बिन्दुओं Q, R तथा S को बनाया। बिन्दुओं P,Q,R, तथा S को मिलाया। PQRS अभीष्ट आयत है।



Ex.6 एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD बनाइए जिसके शीर्ष A, B, C एवं D क्रमशः (4, 6), (–2, 3), (–2, –5) तथा (4, –7) है।

Sol. भुज 4 तथा कोटि 6 लेकर बिन्दु A बनाया। इस प्रकार भुज –2, –2 एवं 4 तथा कोटि 3, – 5 तथा – 7 लेते हुए क्रमशः B, C तथा D बनाया। A, B, C एवं D को मिलाया।

∴ ABCD अभिष्ठ समलम्ब चतुर्भुज है।



➢ दो बिन्दुओं के मध्य दूरी

प्रमेय : दो बिन्दुओं P(x_1, y_1) तथा Q (x_2, y_2) के मध्य दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

अर्थात्, $PQ = \sqrt{(\text{भुज का अन्तर})^2 + (\text{कोटियों का अन्तर})^2}$

टिप्पणी : यदि O मूलबिन्दु है तथा P(x, y) कोई बिन्दु है, तो उपरोक्त सूत्र से

$$OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

❖ उदाहरण ❖

Ex.7 निम्न बिन्दुओं के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए

(i) P(–6, 7) तथा Q(–1, –5)

(ii) R(a + b, a – b) तथा S(a – b, –a – b)

(iii) $A(at_1^2, 2at_1)$ तथा $B(at_2^2, 2at_2)$

Sol. (i) हम पाते हैं

$x_1 = -6, y_1 = 7$ तथा $x_2 = -1, y_2 = -5$

$$\therefore PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Rightarrow PQ = \sqrt{(-1+6)^2 + (-5-7)^2}$$

$$\Rightarrow PQ = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

(ii) हम पाते हैं

$$RS = \sqrt{(a-b-a-b)^2 + (-a-b-a+b)^2}$$

$$\Rightarrow RS = \sqrt{4b^2 + 4a^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

(iii) हम पाते हैं

$$AB = \sqrt{(at_2{}^2 - at_1{}^2)^2 + (2at_2 - 2at_1)^2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{a^2(t_2 - t_1)^2(t_2 + t_1)^2 + 4a^2(t_2 - t_1)^2}$$

$$\Rightarrow AB = a(t_2 - t_1)\sqrt{(t_2 + t_1)^2 + 4}$$

Ex.8 यदि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं (a + b, b – a) तथा (a – b, a + b) से समदूरस्थ है, तो सिद्ध कीजिए कि bx = ay.

Sol. माना P(x, y), Q(a + b, b – a) तथा R (a – b, a + b) दिये गये बिन्दु है। तब PQ = PR (दिया है)

$$\Rightarrow \sqrt{\{x-(a+b)\}^2 + \{y-(b-a)\}^2} = \sqrt{\{x-(a-b)\}^2 + \{y-(a+b)\}^2}$$

$$\Rightarrow \{x-(a+b)\}^2 + \{y-(b-a)\}^2 = \{x-(a-b)\}^2 + \{y-(a+b)\}^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x(a+b) + (a+b)^2 + y^2 - 2y(b-a) + (b-a)^2$$
$$= x^2 + (a-b)^2 - 2x(a-b) + y^2 - 2(a+b) + (a+b)^2$$

$$\Rightarrow -2x(a+b) - 2y(b-a) = -2x(a-b) - 2y(a+b)$$

$$\Rightarrow ax + bx + by - ay = ax - bx + ay + by$$

$$\Rightarrow 2bx = 2ay \quad \Rightarrow bx = ay$$

Ex.9 x का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिन्दुओं (x, – 1) तथा (3, 2) के मध्य दूरी 5 है।

Sol. माना P(x, – 1) तथा Q(3, 2) दिये गये बिन्दु हैं, तब

PQ = 5 (दिया है)

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (-1-2)^2} = 5$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + 9 = 5^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 18 = 25 \quad \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow x = 7 \text{ या } x = -1$$

Ex.10 प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु (a, a), (–a, –a) तथा $(-\sqrt{3}\,a, \sqrt{3}\,a)$ समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं। तथा इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

Sol. माना A (a, a), B(–a, –a) तथा $C(-\sqrt{3}\,a, \sqrt{3}\,a)$ दिए गए बिन्दु हैं। तब हम पाते हैं

$$AB = \sqrt{(-a-a)^2 + (-a-a)^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$

$$BC = \sqrt{(-\sqrt{3}a + a)^2 + (\sqrt{3}a + a)^2}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{a^2(1-\sqrt{3})^2 + a^2(\sqrt{3}+1)^2}$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3}}$$

$$= a\sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,a$$

तथा, AC = $\sqrt{(-\sqrt{3}a - a^2) + (\sqrt{3}a - a)^2}$

$\Rightarrow$ AC = $\sqrt{a^2(\sqrt{3}+1) + a^2(\sqrt{3}-1)^2}$

$\Rightarrow$ AC = $a\sqrt{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}$

$= a\sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,a$

स्पष्टतया, हम पाते हैं

$$AB = BC = AC$$

अतः दिये गये बिन्दुओं से निर्मित त्रिभुज ABC समबाहु त्रिभुंज

तब,

ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2

$\Rightarrow$ ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times AB^2$

$\Rightarrow$ ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2}\,a)^2$ वर्ग इकाई

$= 2\sqrt{3}\,a^2$ वर्ग इकाई

Ex.11 प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु (1, – 1), (5, 2) तथा (9, 5) संरेखीय हैं।

Sol. माना A (1, –1), B (5, 2) तथा C (9, 5) दिये गये बिन्दु हैं। तब, हम पाते हैं

AB = $\sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

BC = $\sqrt{(5-9)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

तथा,AC = $\sqrt{(1-9)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{64+36} = 10$

स्पष्टतया, AC = AB + BC

अतः, A, B, C संरेखीय बिन्दु है।

Ex.12 प्रदर्शित कीजिए कि चार बिन्दु (0, – 1), (6, 7), (–2, 3) तथा (8, 3) आयत के शीर्ष हैं तथा इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

Sol. माना A (0, –1), B(6, 7), C(–2, 3) तथा D (8, 3) दिये गये बिन्दु हैं, तब

AD = $\sqrt{(8-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$

BC = $\sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$

AC = $\sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

तथा, BD = $\sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$\therefore$ AD = BC तथा AC = BD.

अतः ADBC समान्तर चतुर्भुज है

अब, AB = $\sqrt{(6-0)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{36+64} = 10$

तथा CD = $\sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = 10$

स्पष्टतया, $AB^2 = AD^2 + DB^2$ तथा $CD^2 = CB^2 + BD^2$

अतः ADBC आयत है

अब,

आयत ADBC का क्षेत्रफल = AD × DB

= $(4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5})$ वर्ग इकाई = 40 वर्ग इकाई

Ex.13 यदि P तथा Q दो बिन्दु है जिनके निर्देशांक क्रमशः $(at^2, 2at)$ तथा $\left(\frac{a}{t^2}, \frac{2a}{t}\right)$ हैं तथा S (एक बिन्दु) ; (a, 0) है, तो प्रदर्शित कीजिए कि $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ}$; t से स्वतंत्र होगा

Sol. हम पाते हैं,

SP = $\sqrt{(at^2 - a)^2 + (2at - 0)^2}$

$= a\sqrt{(t^2-1)^2 + 4t^2} = a(t^2 + 1)$

तथा SQ = $\sqrt{\left(\frac{a}{t^2} - a\right)^2 + \left(\frac{2a}{t} - 0\right)^2}$

$\Rightarrow$ SQ = $\sqrt{\frac{a^2(1-t^2)^2}{t^4} + \frac{4a^2}{t^2}}$

$\Rightarrow$ $SQ = \frac{a}{t^2} = \sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2} = \frac{a}{t^2}\sqrt{(1+t^2)^2}$

$= \frac{a}{t^2}(1 + t^2)$

$\therefore$ $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{a(t^2+1)} + \frac{t^2}{a(t^2+1)}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1+t^2}{a(t^2+1)} = \frac{1}{a}$,

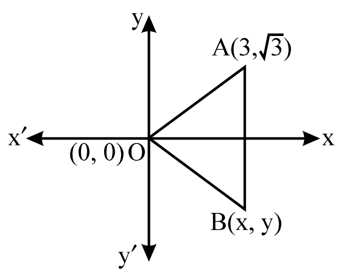
जो t से स्वतंत्र है।

Ex.14 यदि एक समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष (0, 0), $(3, \sqrt{3})$ हैं, तो तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

Sol. O(0, 0) तथा $A(3, \sqrt{3})$ दिये गये बिन्दु हैं तथा माना B(x, y) समबाहु त्रिभुज ΔOAB का तीसरा शीर्ष है। तब

$OA = OB = AB$

$\Rightarrow$ $OA^2 = OB^2 = AB^2$



हम पाते हैं, $OA^2 = (3-0)^2 + (\sqrt{3} - 0)^2 = 12$,

$OB^2 = x^2 + y^2$

तथा, $AB^2 = (x-3)^2 + (y - \sqrt{3})^2$

$\Rightarrow$ $AB^2 = x^2 + y^2 - 6x - 2\sqrt{3}y + 12$

$\therefore$ $OA^2 = OB^2 = AB^2$

$\Rightarrow$ $OA^2 = OB^2$ तथा $OB^2 = AB^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = 12$

तथा, $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 6x - 2\sqrt{3}y + 12$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = 12$ तथा $6x + 2\sqrt{3}y = 12$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = 12$ तथा $3x + \sqrt{3}y = 6$

$\Rightarrow$ $x^2 + \left(\frac{6-3x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 12$

$\left[\because 3x + \sqrt{3}y = 6 \therefore y = \frac{6-3x}{\sqrt{3}}\right]$

$\Rightarrow$ $3x^2 + (6-3x)^2 = 36$

$\Rightarrow$ $12x^2 - 36x = 0 \Rightarrow x = 0, 3$

$\therefore$ $x = 0 \Rightarrow \sqrt{3}y = 6$

$\Rightarrow$ $y = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ [$3x + \sqrt{3}y = 6$ में $x = 0$ रखने पर]

तथा, $x = 3 \Rightarrow 9 + \sqrt{3}y = 6$

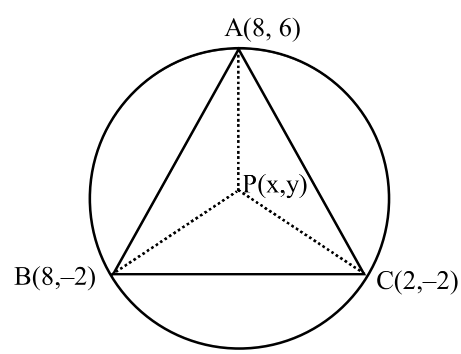
$\Rightarrow y = \frac{6-9}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ [$3x + \sqrt{3}y = 6$ में $x = 3$ रखने पर]

अतः, तीसरे शीर्ष B के निर्देशांक $(0, 2\sqrt{3})$ या $(3, -\sqrt{3})$ हैं।

Ex.15 उस त्रिभुज के परिकेन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (8, 6), (8, – 2) तथा (2, – 2) हैं। इसकी परित्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

Sol. याद कीजिए कि त्रिभुज का परिकेन्द्र त्रिभुज के शीर्षो से समदूरस्थ होता है। माना A (8, 6), B(8, –2) तथा C(2, – 2) दिये गये त्रिभुज के शीर्ष हैं तथा माना P (x, y) इस त्रिभुज का परिकेन्द्र है, तब

$PA = PB = PC \Rightarrow PA^2 = PB^2 = PC^2$



अब, $PA^2 = PB^2$

$\Rightarrow$ $(x-8)^2 + (y-6)^2 = (x-8)^2 + (y+2)^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100$

$= x^2 + y^2 - 16x + 4y + 68$

$\Rightarrow$ 16y = 32 $\Rightarrow$ y = 2

तथा, $PB^2 = PC^2$

$\Rightarrow (x-8)^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-16x+4y+68 = x^2+y^2-4x+4y+8$

$\Rightarrow 12x = 60 \quad \Rightarrow x = 5$

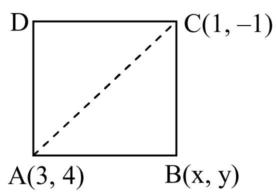
इसलिए परिकेन्द्र P के निर्देशांक (5, 2) है।

तथा परित्रिज्या = PA = PB = PC

$= \sqrt{(5-8)^2+(2-6)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Ex.16 यदि वर्ग के सम्मुख शीर्ष (1, – 1) तथा (3, 4) हैं, तो शेष कोणीय बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Sol. माना A(1, – 1) तथा C(3, 4) वर्ग ABCD के दो सम्मुख शीर्ष हैं तथा B(*x*, *y*) तीसरा शीर्ष है।



तब, AB = BC

$\Rightarrow AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (3-x)^2 + (4-y)^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1$

$= 9 - 6x + x^2 + 16 - 8y + y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$

$\Rightarrow 4x + 10y = 23$

$\Rightarrow x = \dfrac{23-10y}{4}$ ….(1)

समकोण त्रिभुज ABC में

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2$

$= (3-1)^2 + (4+1)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 3y - 1 = 0$ ....(2)

(1) तथा (2) से x का मान प्रतिस्थापित करने पर

$\left(\dfrac{23-10y}{4}\right)^2 + y^2 - (23 - 10y) - 3y - 1 = 0$

$\Rightarrow 4y^2 - 12y + 5 = 0 \Rightarrow (2y-1)(2y-5) = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ या $\dfrac{5}{2}$

(1) में $y = \dfrac{1}{2}$ तथा $y = \dfrac{5}{2}$ रखने पर

क्रमशः $x = \dfrac{9}{2}$ तथा $x = \dfrac{-1}{2}$ प्राप्त होता है।

अतः वर्ग के अभीष्ट शीर्ष $\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ तथा $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ हैं।

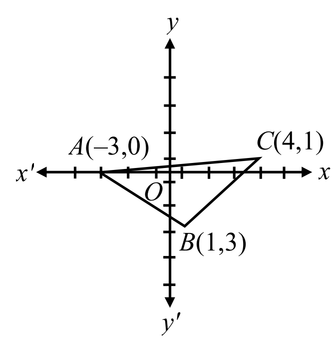
Ex.17 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (–3, 0), (1, –3) तथा (4, 1) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

Sol. माना A (–3, 0), B (1, –3) तथा C (4, 1) दिये गये बिन्दु हैं। तब

$AB = \sqrt{\{1-(-3)\}^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$ इकाई

$BC = \sqrt{(4-1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ इकाई

तथा $CA = \sqrt{(4+3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$ इकाई



स्पष्टतया AB = BC इसलिए ΔABC समद्विबाहु है तथा $AB^2 + BC^2 = 25 + 25 = (5)^2 = CA^2$

$\Rightarrow$ ΔABC, B पर समकोण है

अतः ΔABC समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है

अब, ΔABC का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)

$= \dfrac{1}{2}(AB \times BC)$

$\Rightarrow$ ΔABC का क्षेत्रफल $= \left(\frac{1}{2}\times 5\times 5\right)$ वर्ग इकाई

$= \frac{25}{2}$ वर्ग इकाई

Ex.18 यदि P (2, – 1), Q(3, 4), R(–2, 3) तथा S(–3, –2) समतल में स्थित चार बिन्दु हैं, तो प्रदर्शित कीजिए कि PQRS समचतुर्भुज हैं परन्तु वर्ग नहीं है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Sol. दिये गये बिन्दु P(2, –1), Q(3, 4), R(–2, 3) तथा S(–3, –2) है।

$PQ = \sqrt{(3-2)^2+(4+1)^2} = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$ इकाई

$QR = \sqrt{(-2-3)^2+(3-4)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ इकाई

$RS = \sqrt{(-3+2)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ इकाई

$SP = \sqrt{(-3-2)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{26}$ इकाई

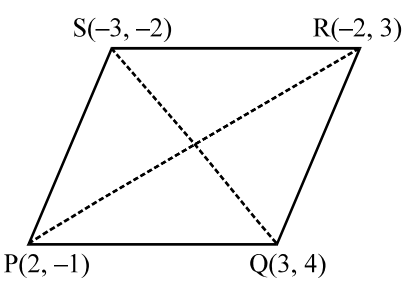
$PR = \sqrt{(-2-2)^2+(3+1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ इकाई

तथा, $QS = \sqrt{(-3-3)^2+(-2-4)^2}$

$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$ इकाई

$\therefore$ $PQ = QR = RS = SP = \sqrt{26}$ इकाई

तथा, $PR \neq QS$



इसका अर्थ है कि PQRS एक चतुर्भुज है जिसकी भुजायें समान हैं परन्तु विकर्ण समान नहीं हैं।

अतः PQRS समचतुर्भुज है परन्तु वर्ग नहीं है

अब समचतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (विकर्णो की लम्बाईयों का गुणनफल)

$\Rightarrow$ समचतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times (PR \times QS)$

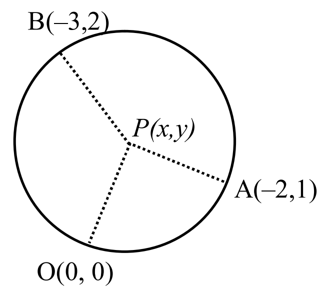
$\Rightarrow$ समचतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

$= \left(\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}\right)$ वर्ग इकाई $= 24$ वर्ग इकाई

Ex.19 बिन्दुओं (0, 0), (–2, 1) तथा (–3, 2) से होकर गुजरने वाले वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए तथा इसकी त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए ।

Sol. माना बिन्दुओं O(0, 0), A(–2,1) तथा B(–3,2) से गुजरने वाले वृत्त का केन्द्र P (x, y) है। तब

OP = AP = BP



अब, $OP = AP \Rightarrow OP^2 = AP^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5$

$\Rightarrow$ $4x - 2y + 5 = 0$ ....(1)

तथा, $OP = BP \Rightarrow OP^2 = BP^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = (x + 3)^2 + (y - 2)^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13$

$\Rightarrow$ $6x - 4y + 13 = 0$ ....(2)

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

$x = \frac{3}{2}$ तथा $y = \frac{11}{2}$

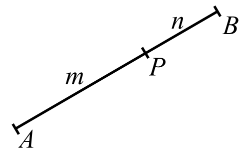
अतः केन्द्र के निर्देशांक, $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$ होंगे

अब, त्रिज्या $= OP = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{121}{4}}$

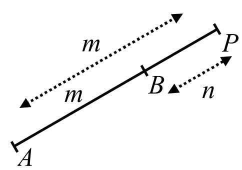
$= \frac{1}{2}\sqrt{130}$ इकाई

➤ विभाजन सूत्र

माना A तथा B समतल में दो बिन्दु हैं, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है तथा A तथा B को मिलाने वाले खण्ड पर बिन्दु P इस प्रकार है कि AP : BP = m : n तब बिन्दु P खण्ड AB को m : n के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

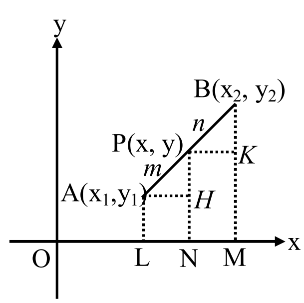


यदि AB पर बिन्दु P इस प्रकार बनाया गया है कि AP : BP = m : n तब बिन्दु P; को m : n के अनुपात में बाह्यतः विभाजित करता है।



बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को m : n के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ।

$$\left(x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$



P के निर्देशांक

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

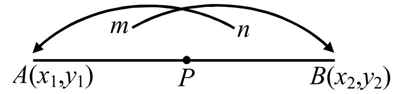
टिप्पणी 1 :

यदि P; AB का मध्य बिन्दु है, तो यह AB को 1 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है इसलिए इसके निर्देशांक

$$\left(\frac{1.x_1 + 1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1 + 1.y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

टिप्पणी 2 :

विभाजन सूत्र को याद रखने के लिए सहायक चित्र



टिप्पणी 3 :

अनुपात m : n को $\frac{m}{n}$: 1 या λ : 1 भी लिखा जा सकता है, जहाँ $\lambda = \frac{m}{n}$.

अतः बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को विभाजित करने वाले बिन्दु P के निर्देशांक

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right) = \left(\frac{\frac{m}{n}x_2 + x_1}{\frac{m}{n}+1}, \frac{\frac{m}{n}y_2 + y_1}{\frac{m}{n}+1}\right)$$

$$= \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$$

❖ उदाहरण ❖

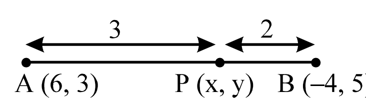
प्रकार I : विभाजन बिन्दु ज्ञात करना जब विभाजन अनुपात दिया है

Ex.20 बिन्दुओं (6, 3) तथा (– 4, 5) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 3 : 2 के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए

Sol. माना P (x, y) अभीष्ट बिन्दु है, तब,

$$x = \frac{3\times(-4) + 2\times 6}{3+2} \text{ तथा } y = \frac{3\times 5 + 2\times 3}{3+2}$$

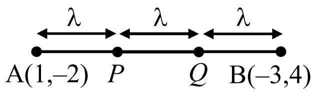
$$\Rightarrow x = 0 \text{ तथा } y = \frac{21}{5}$$



अतः P के निर्देशांक (0, 21/5) हैं।

Ex.21 (1, –2) तथा (–3, 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Sol. माना A(1, –2) तथा B(–3, 4) दिये गये बिन्दु हैं। माना समत्रिभाजन बिन्दु P तथा Q हैं, तब, AP = PQ = QB = λ (माना).



$\therefore$ PB = PQ + QB = 2λ तथा AQ = AP + PQ = 2λ

$\Rightarrow$ AP : PB = λ : 2λ = 1 : 2 तथा

AQ : QB = 2λ : λ = 2 : 1

अतः, P; AB को 1 : 2 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है जबकि Q; AB को 2 : 1 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है। अतः P एवं Q के निर्देशांक

$$P\left(\frac{1\times(-3)+2\times1}{1+2}, \frac{1\times4+2\times(-2)}{1+2}\right) = P\left(\frac{-1}{3}, 0\right)$$

$$Q\left(\frac{2\times(-3)+1\times1}{2+1}, \frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}\right) = Q\left(\frac{-5}{3}, 2\right)$$

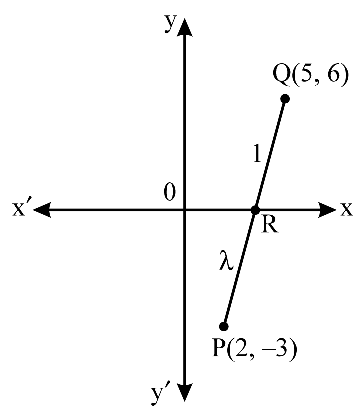
अतः दो समत्रिभाजन बिन्दु (–1/3, 0) तथा (–5/3, 2) है।

प्रकार II : विभाजन अनुपात या खण्ड का अन्त बिन्दु ज्ञात करना जबकि विभाजन बिन्दु दिया है।

Ex.22 बिन्दुओं (2, –3) तथा (5, 6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को x-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है ?

Sol. माना अभीष्ट अनुपात λ : 1 है, तो विभाजन बिन्दु के निर्देशांक,

$$R\left(\frac{5\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{6\lambda-3}{\lambda+1}\right)$$



परन्तु, यह x-अक्ष पर स्थित वह बिन्दु है। जिस पर प्रत्येक बिन्दु का y-निर्देशांक शून्य है ।

$$\therefore \quad \frac{6\lambda-3}{\lambda+1} = 0$$

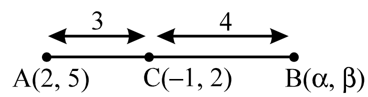
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

इस प्रकार अभीष्ट अनुपात $\frac{1}{2}$: 1 या 1 : 2 है ।

R के निर्देशांकों में λ = ½ रखकर इसके निर्देशांक (3, 0) ज्ञात किये जाते हैं।

Ex.23 यदि बिन्दु A(2, 5) एवं B को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु C (–1, 2), 3 : 4 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है, B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

Sol. माना B के निर्देशांक (α, β) हैं। यह भी दिया है कि AC : BC = 3 : 4 अतः C के निर्देशांक



$$\left(\frac{3\alpha+4\times2}{3+4}, \frac{3\beta+4\times5}{3+4}\right) = \left(\frac{3\alpha+8}{7}, \frac{3\beta+20}{7}\right)$$

परन्तु C के निर्देशांक (–1, 2) हैं ।

$$\therefore \quad \frac{3\alpha+8}{7} = -1 \text{ तथा } \frac{3\beta+20}{7} = 2$$

$\Rightarrow$ α = – 5 तथा β = – 2

अतः B के निर्देशांक (–5, –2) हैं।

Ex.24 बिन्दुओं (1, 3) तथा (2, 7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को रेखा 3x + y – 9 = 0 किस अनुपात में विभाजित करती हैं ।

Sol. मानाकि रेखा 3x + y – 9 = 0 बिन्दु A (1, 3) तथा B(2, 7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को k : 1 के अनुपात में बिन्दु C पर विभाजित करती है, तो C के निर्देशांक

$$\left(\frac{2k+1}{k+1}, \frac{7k+3}{k+1}\right)$$

किन्तु, C रेखा 3x + y – 9 = 0 पर स्थित है इसलिए,

$$3\left(\frac{2k+1}{k+1}\right) + \frac{7k+3}{k+1} - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 6k + 3 + 7k + 3 - 9k - 9 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

अतः, अभीष्ट अनुपात 3 : 4 अन्तः

प्रकार III : दिये गये चतुर्भुज के प्रकार को ज्ञात करना

Ex.25 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (–2, –1), (1, 0), (4, 3) तथा (1, 2) समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं। क्या यह आयत है ?

Sol. माना दिये गये बिन्दु क्रमशः A, B, C तथा D हैं, तब,

AC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (1, 1)$$

BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 1)$$

इस प्रकार AC एवं BD समान मध्य बिन्दु रखते हैं अतः ABCD समान्तर चतुर्भुज हैं ।

अब, हम देखेगें कि ABCD आयत है या नहीं यहाँ,

$$AC = \sqrt{(4-(-2))^2 + (3-(-1))^2} = 2$$

तथा, $BD = \sqrt{(1-1)^2 + (0-2)^2} = 2$

स्पष्टतया, $AC \neq BD$ इसलिए, ABCD आयत नहीं है।

Ex.26 सिद्ध कीजिए कि (4, – 1), (6, 0), (7, 2) तथा (5, 1) समचतुर्भुज के शीर्ष हैं। क्या यह एक वर्ग हैं ?

Sol. माना दिये गये बिन्दु क्रमशः A, B, C तथा D हैं। तब,

AC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{4+7}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{6+5}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

इस प्रकार, AC तथा BD समान मध्य बिन्दु रखते है अतः ABCD समान्तर चतुर्भुज है

अब,

$$AB = \sqrt{(6-4)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{(7-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

$\therefore$ AB = BC

इसलिए, ABCD समान्तर चतुर्भुज हैं जिसकी आसन्न भुजाएँ समान है।

अतः, ABCD समचतुर्भुज हैं।

हम पाते हैं,

$$AC = \sqrt{(7-4)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2} \text{ तथा}$$

$$BD = \sqrt{(6-5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

स्पष्टतया, $AC \neq BD$.

इसलिए, ABCD वर्ग नहीं है

प्रकार IV : दिये गये बिन्दुओं से अज्ञात शीर्ष ज्ञात करना

Ex.27 एक समान्तर चतुर्भुज के तीन शीर्ष क्रमशः (–1, 0), (3, 1) तथा (2, 2) के क्रम में लिये गये हैं। तो चौथे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

Sol. माना A(–1, 0), B(3, 1), C(2, 2) तथा D(x, y) समान्तर चतुर्भुज ABCD के क्रम में लिये गये शीर्ष हैं। चूँकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।

$\therefore$ AC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

= BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3+x}{2} = \frac{1}{2} \text{ तथा } \frac{y+1}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ x = – 2 तथा y = 1

अतः समान्तर चतुर्भुज का चौथा शीर्ष (–2, 1) है।

Ex.28 यदि एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष बिन्दु A (6, 1), B (8, 2), C(9, 4) तथा D (p, 3) क्रमानुसार लिये गये हैं; तो p का मान ज्ञात कीजिए ।

Sol. हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। इसलिए विकर्ण AC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक विकर्ण BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांक समान होंगे ।

$\therefore \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{15}{2} = \frac{8+p}{2} \Rightarrow 15 = 8 + p \Rightarrow p = 7$

Ex.29 यदि A(–2, –1), B(a, 0), C(4, b) तथा D(1, 2) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

Sol. हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं इसलिए AC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांकों के समान हैं अर्थात,

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$$

$\Rightarrow \left(1, \frac{b-1}{2}\right) = \left(\frac{a+1}{2}, 1\right) \Rightarrow \frac{a+1}{2} = 1$ तथा $\frac{b-1}{2} = 1$

$\Rightarrow a + 1 = 2$ तथा $b - 1 = 2 \Rightarrow a = 1$ तथा $b = 3$

Ex.30 यदि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक (1, 2) (0, –1) तथा (2, –1) हैं, तो इसके शीर्षो के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

Sol. माना $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$; ΔABC के शीर्ष हैं । माना D (1, 2), E (0, –1), तथा F(2, –1) क्रमशः भुजा BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु हैं। चूंकि D, BC का मध्य बिन्दु हैं ।

$\therefore \frac{x_2 + x_3}{2} = 1$ तथा $\frac{y_2 + y_3}{2} = 2$

$\Rightarrow x_2 + x_3 = 2$ तथा $y_2 + y_3 = 4$ .... (1)

इसी प्रकार, E तथा F क्रमशः CA तथा AB के मध्य बिन्दु हैं ।

$\therefore \frac{x_1 + x_3}{2} = 0$ तथा $\frac{y_1 + y_3}{2} = -1$

$\Rightarrow x_1 + x_3 = 0$ तथा $y_1 + y_3 = -2$ .... (2)

तथा $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$ तथा $\frac{y_1 + y_2}{2} = -1$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 4$ तथा $y_1 + y_2 = -2$ .... (3)

(1), (2) तथा (3) से, हम पाते हैं

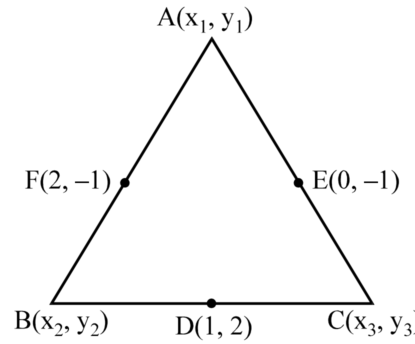
$(x_2 + x_3) + (x_1 + x_3) + (x_1 + x_2) = 2 + 0 + 4$ तथा,

$(y_2 + y_3) + (y_1 + y_3) + (y_1 + y_2) = 4 - 2 - 2$

$\Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) = 6$ तथा

$2(y_1 + y_2 + y_3) = 0$ .... (4)

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3$ तथा $y_1 + y_2 + y_3 = 0$



यदि (1) तथा (4), हम पाते हैं

$x_1 + 2 = 3$ तथा $y_1 + 4 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1$ तथा $y_1 = -4$

इसलिए A के निर्देशांक (1, – 4)

(2) तथा (4) से, हम पाते हैं

$x_2 + 0 = 3$ तथा $y_2 - 2 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 3$ तथा $y_2 = 2$

इसलिए, B के निर्देशांक (3, 2)

(3) तथा (4) से,

$x_3 + 4 = 3$ तथा $y_3 - 2 = 0$

$\Rightarrow x_3 = -1$ तथा $y_3 = 2$

इसलिए, C के निर्देशांक (–1, 2) हैं।

अतः, त्रिभुज ABC के शीर्ष A(1, – 4), B(3, 2) तथा C(–1, 2) हैं।

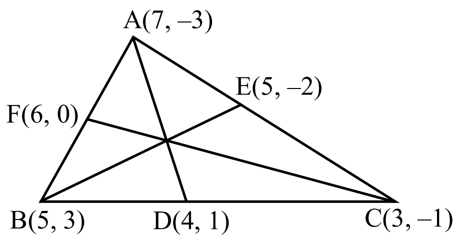
Ex.31 ΔABC की माध्यिकाओं की लम्बाईयाँ ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(7, –3), B(5,3) तथा C(3,–1) है।

Sol. माना D, E, F क्रमशः भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु हैं, तो D, E तथा F के निर्देशांक

$$D\left(\frac{5+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = D(4, 1),$$

$$E\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) = E\ (5, -2)$$

तथा, $F\left(\frac{7+5}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = F\ (6, 0)$



$\therefore\ AD = \sqrt{(7-4)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ इकाई

$BE = \sqrt{(5-5)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{0+25} = 5$ इकाई

तथा, $CF = \sqrt{(6-3)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ इकाई

Ex.32 यदि A (5, –1), B(–3, –2) तथा C(–1, 8) त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं, तो A से होकर जाने वाली माध्यिका की लम्बाई ज्ञात कीजिए तथा केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Sol. माना AD; ΔABC के शीर्ष A से होकर जाने वाली माध्यिका हैं, तो D; BC का मध्य बिन्दु हैं इसलिए D के निर्देशांक अर्थात $\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{-2+8}{2}\right)$

अर्थात,(–2, 3) है

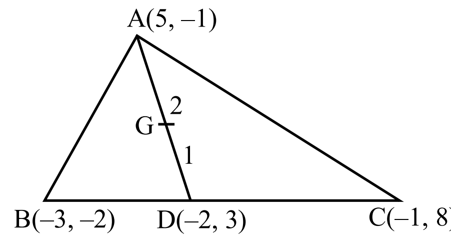
$\therefore\ AD = \sqrt{(5+2)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$ इकाई

माना G; ΔABC का केन्द्रक है, तो G माध्यिका AD पर स्थित होगा तथा इसे 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है, इसलिए G के निर्देशांक

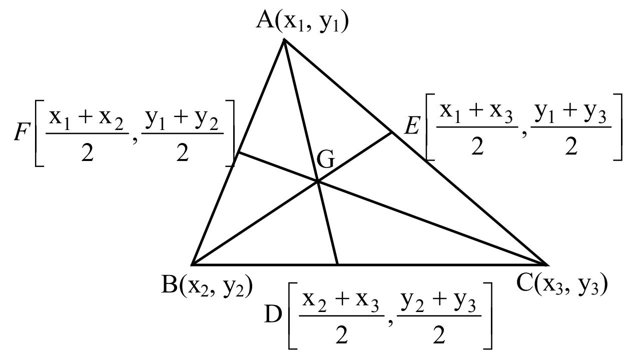
$$\left(\frac{2\times(-2)+1\times 5}{2+1}, \frac{2\times 3+1\times(-1)}{2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{-4+5}{3}, \frac{6-1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$



➢ विभाजन सूत्र के अनुप्रयोग

प्रमेय: त्रिभुज का केन्द्रक जिसके शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) है, $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ है।



❖ उदाहरण ❖

Ex.33 उस त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–1, 0), (5, –2) तथा (8, 2) हैं।

Sol. हम जानते हैं कि त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक जिसके कोणीय बिन्दु (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) है। $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ हैं

इसलिए शीर्षों, (–1, 0), (5, –2) तथा (8, 2) वाले त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक $\left(\frac{-1+5+8}{3}, \frac{0-2+2}{3}\right)$

या (4, 0) हैं

Ex.34 यदि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक (1, 1), (2, – 3) तथा (3, 4) है, तो इसका केन्द्रक ज्ञात कीजिए ।

Sol. माना P (1, 1), Q(2, –3), R(3, 4) क्रमशः ABC की भुजाओं AB, BC तथा CA के मध्य बिन्दु हैं, माना

A (x_1, y_1), B(x_2, y_2) तथा C(x_3, y_3) त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं तब

$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \frac{y_1 + y_2}{2} = 1$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2$ तथा $y_1 + y_2 = 2$ ...(1)

Q; BC का मध्य बिन्दु हैं

$\Rightarrow \frac{x_2 + x_3}{2} = 2, \frac{y_2 + y_3}{2} = -3$

$\Rightarrow x_2 + x_3 = 4$ तथा $y_2 + y_3 = -6$ ...(2)

R; AC का मध्य बिन्दु हैं

$\Rightarrow \frac{x_1 + x_3}{2} = 3$ तथा $\frac{y_1 + y_3}{2} = 4$

$\Rightarrow x_1 + x_3 = 6$ तथा $y_1 + y_3 = 8$ ...(3)

(1), (2) तथा (3), से

$x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_1 + x_3 = 2 + 4 + 6$

तथा, $y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_1 + y_3 = 2 - 6 + 8$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 6$ तथा $y_1 + y_2 + y_3 = 2$...(4)

ΔABC के केन्द्रक के निर्देशांक

$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$= \left(2, \frac{2}{3}\right)$ [(4) का प्रयोग करने पर]

Ex.35 एक त्रिभुज के दो शीर्ष (3, –5) तथा (–7, 4) हैं। यदि इसका केन्द्रक (2, –1) है, तो तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

Sol. माना तीसरे शीर्ष के निर्देशांक (x, y) है, तब,

$\frac{x + 3 - 7}{3} = 2$ तथा $\frac{y - 5 + 4}{3} = -1$

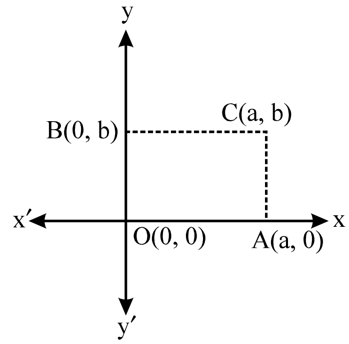
$\Rightarrow x - 4 = 6$ तथा $y - 1 = -3$

$\Rightarrow x = 10$ तथा $y = -2$

अतः तीसरे शीर्ष के निर्देशांक (10, –2) हैं।

Ex.36 सिद्ध कीजिए कि किसी आयत के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तथा समान होते हैं।

Sol. माना आयत OACB इस प्रकार है कि OA; x-अक्ष के अनुदिश है तथा OB; y-अक्ष के अनुदिश है। माना OA = a तथा OB = b.



तब, A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (a, 0) तथा (0, b) होगें

चूँकि, OACB आयत है इसलिए,

AC = OB $\Rightarrow$ AC = b

अतः OA = a तथा AC = b

इसलिए, C के निर्देशांक (a, b) है

OC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

तथा, AB के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

स्पष्टतया OC तथा AB एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं

तथा, OC = $\sqrt{a^2 + b^2}$ तथा

AB = $\sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\therefore$ OC = AB

➤ त्रिभुज का क्षेत्रफल

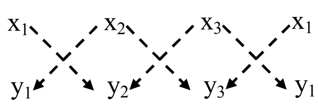
प्रमेय: शीर्षो (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\,|$$

टिप्पणी : ΔABC का क्षेत्रफल निम्न चरणों का प्रयोग कर ज्ञात किया जाता है।

चरण I : शीर्षो के निर्देशांक $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ को तीन स्तम्भों में लिखिए जैसा कि नीचे दर्शाया गया है तथा A के निर्देशांक (x_1, y_1) को चौथे स्तम्भ में लिखिए ।

चरण II : बाँये से दाँयें तथा दाँये से बाँये नीचे की तरफ निर्देशित करती हुई समान्तर रेखायें खींचीए ।



चरण III : बाँये से दाँये नीचे की तरफ बिन्दुकित रेखाओं के सिरों पर स्थित संख्याओं के गुणनफल का योग ज्ञात कीजिए तथा इस योग में से दाँये से बाँये नीचे की ओर बिन्दुकित रेखाओं के सिरों पर स्थित संख्याओं के गुणनफल का योग घटाइए । अर्थात

$$(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)$$

चरण IV : चरण III में प्राप्त संख्या का निरपेक्ष मान ज्ञात कर क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिए इसका आधा लीजिए अर्थात $\frac{1}{2}$ से गुणा कीजिए ।

टिप्पणी : तीन बिन्दु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ से संरेखीय होते हैं यदि और केवल यदि

ΔABC का क्षेत्रफल = 0 अर्थात

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

❖ उदाहरण ❖

प्रकार I : त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना जब इसके शीर्षो के निर्देशांक दिये गये हों ।

Ex.37 उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(3, 2), B (11, 8) तथा C(8, 12) है।

Sol. माना $A = (x_1, y_1) = (3, 2)$, $B = (x_2, y_2) = (11, 8)$ तथा $C = (x_3, y_3) = (8, 12)$ दिये गये बिन्दु हैं;

तब $\Delta ABC = \frac{1}{2}|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}|$

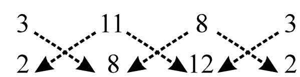
$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}|\{3(8 - 12) + 11(12 - 2) + 8(2 - 8)\}|$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}|(-12 + 110 - 48)| = 25$ वर्ग इकाई

वैकल्पिक हल,



$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= |(3 \times 8 + 11 \times 12 + 8 \times 2) - (11 \times 2 + 8 \times 8 + 3 \times 12)|$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}|(24 + 132 + 16) - (22 + 64 + 36)|$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\,172 - 122\,| = 25$ वर्ग इकाई

Ex.38 सिद्ध कीजिए कि शीर्षो $(t, t - 2)$, $(t + 2, t + 2)$ तथा $(t + 3, t)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल t से स्वतंत्र होगा।

Sol. माना $A = (x_1, y_1) = (t, t - 2)$, $B(x_2, y_2) = (t + 2, t + 2)$ तथा $C = (x_3, y_3) = (t + 3, t)$ दिये गये त्रिभुज के शीर्ष हैं, तब,

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} |\{t(t+2-t) + (t+2)(t-t+2)$

$+ (t+3)(t-2-t-2)\}|$

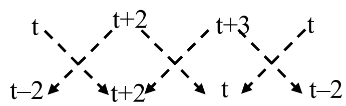
$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} |\{2t+2t+1-4t-12\}| = |-4|$

$= 4$ वर्ग इकाई

स्पष्टतया ΔABC का क्षेत्रफल t से स्वतंत्र होगा

वैकल्पिक हल,



$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \left| \{t(t+2)+(t+2)t+(t+3)(t-2)\} - \{(t+2)(t-2) + (t+3)(t+2) + t \times t\} \right|$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} |(t^2 + 2t + t^2 + 2t + t^2 + t - 6)$

$- (t^2 - 4 + t^2 + 5t + 6 + t^2)|$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} |(3t^2 + 5t - 6) - (3t^2 + 5t + 2)|$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} |(-6-2)|$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= 4$ वर्ग इकाई

अतः ΔABC का क्षेत्रफल t से स्वतंत्र होगा

Ex.39 उस त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु को मिलाने पर निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (0, –1), (2, 1) तथा (0, 3) है। तथा दिये गये त्रिभुज के क्षेत्रफल का निर्मित त्रिभुज के क्षेत्रफल का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

Sol. माना A (0, –1), B(2, 1) तथा C(0, 3) त्रिभुज ΔABC के शीर्ष हैं । माना D, E, F क्रमशः भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु हैं; तब D, E तथा F के निर्देशांक क्रमशः (1, 2), (0, 1) तथा (1, 0) होगें।

अब, ΔABC का क्षेत्रफल

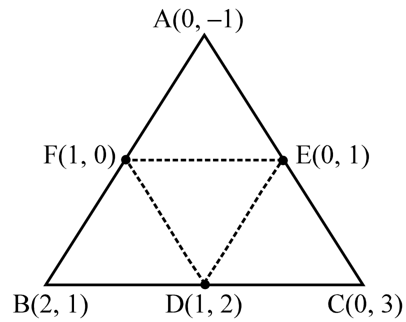
$= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} |0(1-3) + 2(3-(-1)) + 0(0-1)|$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} |0 + 8 + 0| = 4$ वर्ग इकाई



ΔDEF का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

$\Rightarrow \Delta DEF$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} |1(1-0) + 0(0-2) + 1(2-1)|$

$\Rightarrow \Delta DEF$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} |1 + 1| = 1$ वर्ग इकाई

$\therefore \Delta DEF$ का क्षेत्रफल : ΔABC का क्षेत्रफल $= 1 : 4$

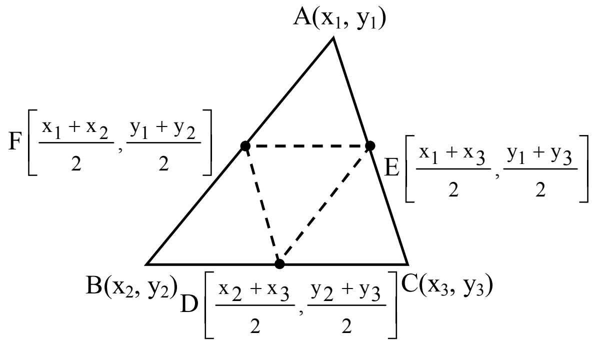
Ex.40 यदि D, E तथ F क्रमशः एक ΔABC की भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु हैं, तो निर्देशांक ज्यामिती का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए

ΔDEF का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$ (ΔABC का क्षेत्रफल)

Sol. माना $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं; तो D, E तथा F क्रमशः

$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right) \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$

तथा $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ होते हैं



$F\left[\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right]$, $E\left[\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right]$, $D\left[\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right]$

$\Delta_1 = \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

$\Delta_2 = \Delta DEF$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)\left(\frac{y_1+y_3}{2} - \frac{y_1+y_2}{2}\right) + \left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)\left(\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{y_2+y_3}{2}\right) + \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{y_2+y_3}{2} - \frac{y_1+y_3}{2}\right)\right|$

$\Rightarrow \Delta_2 = \frac{1}{8}|(x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 - y_3) + (x_1 + x_2)(y_2 - y_1)|$

$\Rightarrow \Delta_2 = \frac{1}{8}|x_1(y_1 - y_3 + y_2 - y_1) + x_2(y_3 - y_2 + y_2 - y_1) + x_3(y_3 - y_2 + y_1 - y_3)|$

$\Rightarrow \Delta_2 = \frac{1}{8}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

$\Rightarrow \Delta_2 = \frac{1}{4}$ (ΔABC का क्षेत्रफल) $= \frac{1}{4}\Delta_1$

अतः ΔDEF का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$ (ΔABC का क्षेत्रफल)

Ex.41 ΔABC के शीर्ष A (4, 6), B(1, 5) तथा C(7, 2) हैं। भुजाओं AB तथा AC को क्रमशः D तथा E पर प्रतिच्छेदित करने के लिए एक रेखा इस प्रकार खींची गई है कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ है, तो ΔADE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा इसकी ΔADE के क्षेत्रफल से तुलना कीजिए ।

Sol. दिया है, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = 4$

$\Rightarrow \frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE} = 4$

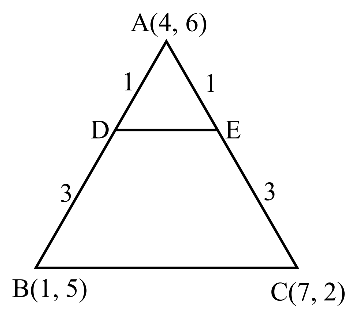
$\Rightarrow 1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE} = 4$

$\Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} = 3$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ AD : DB = AE : EC = 1 : 3

$\Rightarrow$ D तथा E भुजाओं AB तथा AC को क्रमशः 1 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।

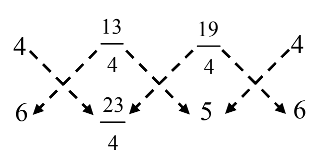


अतः D तथा E के निर्देशांक क्रमशः है

$\left(\frac{1+12}{1+3}, \frac{5+18}{1+3}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{23}{4}\right)$

तथा $\left(\frac{7+12}{1+3}, \frac{2+18}{1+3}\right) = \left(\frac{19}{4}, 5\right)$

हम जानते हैं कि



$\therefore$ ΔADE का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\left|\left(4\times\frac{23}{4} + \frac{13}{4}\times5 + \frac{19}{4}\times6\right) - \left(\frac{13}{4}\times6 + \frac{19}{4}\times\frac{23}{4} + 4\times5\right)\right|$

$\Rightarrow$ ΔABC का क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{92}{4}+\frac{65}{4}+\frac{114}{4}\right)-\left(\frac{78}{4}+\frac{437}{16}+20\right)\right|$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\left|\frac{271}{4}-\frac{1069}{16}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{15}{16} = \frac{15}{32} \text{ वर्ग इकाई}$$

हम जानते हैं कि

$$\begin{matrix} 4 & & 1 & & 7 & & 4 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 6 & & 5 & & 2 & & 6 \end{matrix}$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}|(4 \times 5 + 1 \times 2 + 7 \times 6) - (1 \times 6 + 7 \times 5 + 4 \times 2)|$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}|(20+2+42)-(6+35+8)|$$

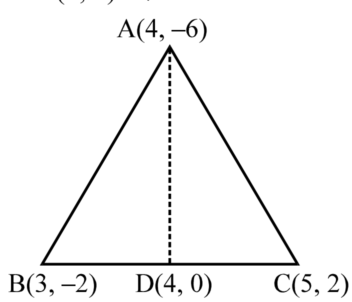
$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\ |64 - 49| = \frac{15}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

$$\therefore \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{15/32}{15/2} = \frac{1}{16}$$

अतः ΔADE का क्षेत्रफल : ΔABC का क्षेत्रफल = 1 : 16.

Ex.42 यदि A(4, –6), B(3, –2) तथा C(5, 2) त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं तो सत्यापित कीजिए कि त्रिभुज ABC की माध्यिका इसे समान क्षेत्रफलों के दो त्रिभुज में विभाजित करती हैं ।

Sol. माना D भुजा BC का मध्य बिन्दु है, तो D का निर्देशांक (4, 0) है।



यहाँ,

$$\begin{matrix} 4 & & 3 & & 5 & & 4 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -6 & & -2 & & 2 & & -6 \end{matrix}$$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|(4 \times (-2) + 3 \times 2 + 5 \times (-6)) - (3 \times (-6) + 5 \times (-2) + 4 \times 2)|$$

$\Rightarrow$ ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\ |(-8 + 6 - 30) - (-18 - 10 + 8)|$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\ |-32 + 20| = 6 \text{ वर्ग इकाई}$$

तथा यह भी दिया है

$$\begin{matrix} 4 & & 3 & & 4 & & 4 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -6 & & -2 & & 0 & & -6 \end{matrix}$$

$\therefore$ ΔABD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\{(4\times(-2)+3\times 0+4\times(-6))\} \\ -\{3\times(-6)+4\times(-2)+4\times 0\}\end{matrix}\right|$$

$\Rightarrow$ ΔABD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|(-8 + 0 + 26) - (-18 - 8 + 0)|$$

$$\Rightarrow \Delta ABD \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}|(-32 + 26)| = 3 \text{ वर्ग इकाई}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABD \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

$\Rightarrow$ ΔABC का क्षेत्रफल = 2 (ΔABD का क्षेत्रफल)

प्रकार II : चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना जबकि इसके शीर्षों के निर्देशांक दिये गये हों ।

Ex.43 उस चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष क्रमशः A(1, 1), B(7, –3), C(12, 2) तथा D(7, 21) है।

Sol. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= |ΔABC का क्षेत्रफल | + | ΔACD का क्षेत्रफल |

यहाँ,

$$\begin{matrix} 1 & & 7 & & 12 & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & & -3 & & 2 & & 1 \end{matrix}$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}|(1\times -3 + 7 \times 2 + 12 \times 1) - (7 \times 1 + 12 \times (-3) + 1\times 2)|$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}|(-3+14+12)-(7-36+2)|$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}|23 + 27| = 25 \text{ वर्ग इकाई}$$

तथा हम जानते हैं कि

$$\begin{array}{cccc} 1 & 12 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 21 & 1 \end{array}$$

$\therefore$ ΔACD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ |(1 \times 2 + 12 \times 21 + 7 \times 1) - (12 \times 1 + 7 \times 2 + 1 \times 21)|$

$\Rightarrow$ ΔACD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\ |(2+252 + 7) - (12 + 14 + 21)|$$

$\Rightarrow \Delta ACD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ |261 - 47| = 107$ वर्ग इकाई

$\therefore$ चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= 25 + 107 = 132$ वर्ग इकाई

प्रकार III : तीन बिन्दुओं की समरेखीयता

सूत्र:

तीन बिन्दु (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) संरेखीय है यदि और केवल यदि

$$x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0$$

अथवा, $(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_3y_2 + x_2y_1) = 0$

Ex.44 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(2, -2)$, $(-3, 8)$ तथा $(-1, 4)$ संरेखीय है।

Sol. माना दिये गये बिन्दुओं से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ है

हम जानते हैं,

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 8 & 4 & -2 \end{array}$$

$\therefore \Delta = \frac{1}{2} |\{2 \times 8 + (-3) \times 4 + (-1) \times (-2)\} - \{(-3) \times (-2) + (-1) \times 8 + 2 \times 4\}|$

$\Rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{2}\ |(16 - 12 + 2) - (6 - 8 + 8)|$

$\Rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{2}\ |6 - 6| = 0$

अतः, दिये गये बिन्दु संरेखीय हैं।

Ex.45 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a, b + c)$, $(b, c + a)$ तथा $(c, a + b)$ संरेखीय हैं ।

Sol. माना बिन्दुओं $(a, b + c)$, $(b, c + a)$ तथा $(c, a + b)$ निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ है

हम जानते हैं,

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & a \\ b+c & c+a & a+b & b+c \end{array}$$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2} |\{a (c + a) + b (a + b) + c (b + c)\} - \{b (b + c) + c (c + a) + a (a + b)\}|$

$\Rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{2} |(ac + a^2 + ab + b^2 + bc + c^2) - (b^2 + bc + c^2 + ca + a^2 + ab)|$

$\Rightarrow \quad \Delta = 0$

अतः दिये गये बिन्दु संरेखीय हैं।

प्रकार IV : वांछनीय या अज्ञात परिणाम ज्ञात करना जब तीन बिन्दु संरेखीय है

Ex.46 k के किस मान के लिए बिन्दु $(k, 2 - 2k)$, $(-k + 1, 2k)$ तथा $(-4 - k, 6 - 2k)$ संरेखीय है ?

Sol. दिये गये बिन्दु संरेखीय होंगे यदि इनके द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य है ।

हम जानते हैं,

$$\begin{array}{cccc} k & -k+1 & -4-k & k \\ 2-2k & 2k & 6-2k & 2-2k \end{array}$$

अतः,

$|\{2k^2 + (-k + 1) (6 - 2k) + (-4 - k) (2 - 2k)\} - \{(-k + 1) (2 - 2k) + (-4 - k) (2k) + k (6 - 2k)\}| = 0$

$\Rightarrow \quad |(2k^2 + 6 - 8k + 2k^2 + 2k^2 + 6k - 8) - (2 - 4k + 2k^2 - 8k - 2k^2 + 6k - 2k^2)|$

$\Rightarrow \quad (6k^2 - 2k - 2) - (-2k^2 - 6k + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad 8k^2 + 4k - 4 = 0$

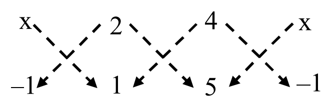
$\Rightarrow \quad 2k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow (2k - 1) (k + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad k = 1/2$ या $k = -1$

अतः k = 1/2 या k = – 1 के लिए दिये गये बिन्दु संरेखीय होंगे ।

Ex.47 x के किस मान के लिए बिन्दु (x, –1), (2, 1) तथा (4, 5) एक रेखा पर स्थित होंगे ?

Sol. दिये गये बिन्दु संरेखीय होंगे यदि इनके द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा ।



$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

$\Rightarrow |\{x \times 1 + 2 \times 5 + 4 \times (-1)\}$

$- \{(2 \times (-1) + 4 \times 1 + x \times 5\}| = 0$

$\Rightarrow (x + 10 - 4) - (-2 + 4 + 5x) = 0$

$\Rightarrow (x + 6) - (5x + 2) = 0$

$\Rightarrow -4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = 1$

अतः दिये गये बिन्दु एक रेखा पर स्थित होंगे यदि x = 1.

प्रकार V : त्रिभुज के क्षेत्रफल की अवधारणा पर आधारित मिश्रित प्रश्न

Ex.48 यदि दो बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (3, 4) तथा (5, – 2) हैं, तो किसी बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए यदि PA = PB तथा ΔPAB का क्षेत्रफल = 10

Sol. यदि दो बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (x, y) है, तब,

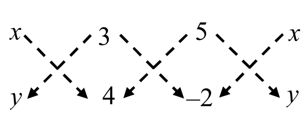
PA = PB

$\Rightarrow PA^2 = PB^2$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (x - 5)^2 + (y + 2)^2$

$\Rightarrow x - 3y - 1 = 0$ ....(1)

अब, ΔPAB का क्षेत्रफल = 10



$\Rightarrow \frac{1}{2}|(4x + 3 \times (-2) + 5y) - (3y + 20 - 2x)| = 10$

$\Rightarrow |(4x + 5y - 6) - (-2x + 3y + 20)| = 20$

$\Rightarrow |6x + 2y - 26| = \pm 20 \Rightarrow 6x + 2y - 26 = \pm 20$

$\Rightarrow 6x + 2y - 46 = 0$ या, $6x + 2y - 6 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 23 = 0$ या, $3x + y - 3 = 0$

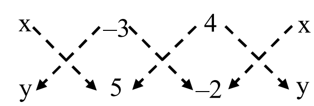
$x - 3y - 1 = 0$ तथा $3x + y - 23 = 0$ को हल करने पर $x = 7, y = 2$.

$x - 3y - 1 = 0$ तथा $3x + y - 3 = 0$ को हल करने पर $x = 1, y = 0$.

अतः P, के निर्देशांक (7, 2) या (1, 0) है।

Ex.49 A, B, C के निर्देशांक क्रमशः (6, 3), (–3, 5) तथा (4, – 2) हैं तथा कोई बिन्दु P (x, y) है, तो प्रदर्शित कीजिए कि त्रिभुज PBC तथा ABC के क्षेत्रफलों का अनुपात $\left|\frac{x + y - 2}{7}\right|$ होगा

Sol. यहाँ,



$\therefore$ ΔPBC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}|(5x + 6 + 4y) - (-3y + 20 - 2x)|$

$\Rightarrow$ ΔPBC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}|5x + 6 + 4y + 3y - 20 + 2x|$

$\Rightarrow$ ΔPBC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|7x + 7y - 14|$

$\Rightarrow$ ΔPBC का क्षेत्रफल $= \frac{7}{2}|x + y - 2|$

$\Rightarrow$ ΔPBC का क्षेत्रफल $= \frac{7}{2}|6 + 3 - 2|$

[ΔPBC के क्षेत्रफल में x = 6 तथा y = 3 रखने पर]

$\Rightarrow$ ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{49}{2}$

$\therefore \frac{\Delta PBC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{7}{2}|x + y - 2|}{\frac{49}{2}}$

$= \frac{|x + y - 2|}{7} = \left|\frac{x + y - 2}{7}\right|$

याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिन्दू

1. दो लम्बवत् रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु मूलबिन्दु O(0, 0) कहलाता है।

2. क्षैतिज रेखा XOX' ; x-अक्ष कहलाती है तथा ऊर्ध्वाधर रेखा YOY' ; y-अक्ष कहलाती है

3. वह समतल जिस पर ये रेखायें बनाई गई हैं कार्तीय समतल कहलाता है तथा रेखायें निर्देशी अक्ष कहलाती है

4. यह दो परस्पर लम्बवत् रेखायें कार्तिय समतल को चार भागों में बाँटती है जो चतुर्थांश I, II, III तथा IV कहलाते हैं।

5.

चतुर्थांश	भुज (x)	कोटि (y)	निर्देशांक (x,y)
1st	+	V	(+, +)
2nd	–	+	(–, +)
3rd	–	–	(–, –)
4th	+	–	(+, –)

6. बिन्दु A(x, y) में x-निर्देशांक भुज तथा y-निर्देशांक कोटि कहलाता है।

7. x-अक्ष का समीकरण y = 0

8. y-अक्ष का समीकरण x = 0

9. रेखा x = a का ग्राफ सदैव y-अक्ष के समान्तर होता है।

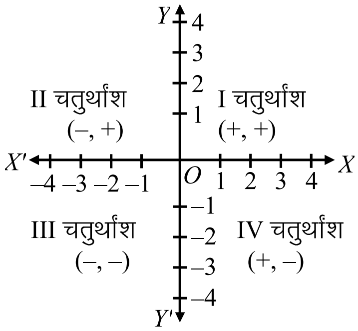
10. रेखा y = b का ग्राफ सदैव x-अक्ष के समान्तर होता है।

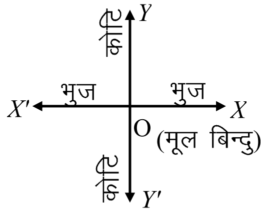
11. x-अक्ष पर कोई बिन्दु (x, 0) तथा y-अक्ष पर कोई बिन्दु (0, y) होता है।

12. मूलबिन्दु के दाँयी ओर भुज धनात्मक है तथा मूलबिन्दु के बाँयी ओर ऋणात्मक है

13. कोटि (y) x-अक्ष के ऊपर धनात्मक तथा x-अक्ष के नीचे ऋणात्मक होती है।

14. चिन्ह परिपाटी – जब वर्गाकार पेपर पर बिन्दु लिखा जाता है, तो चिन्ह परिपाटी का ध्यान रखना चाहिए ।





15. दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ के मध्य दूरी

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

16. बिन्दु P(x, y) की मूलबिन्दु O(0,0) से दूरी -

$$OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

17. विभाजन सूत्र : बिन्दुओं A(x, y), $B(x_2, y_2)$ मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु P(x, y) के निर्देशांक

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

18. किसी रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु रेखाखण्ड को 1 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है इसलिए बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को मिलाने पर बिन्दु P के निर्देशांक

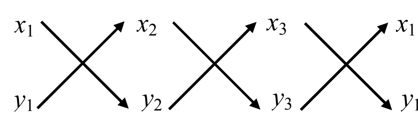
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

19. शीर्षों $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ वाले

ΔABC का क्षेत्रफल -

$$= \frac{1}{2}\ [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

अथवा



अथवा

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\ [(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_3y_2 + x_2y_1)]$$

20. बिन्दु A, B, C संरेखीय होंगे यदि ΔABC का क्षेत्रफल = 0

21. केन्द्रक : $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

22. चतुर्भुज का क्षेत्रफल

यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ तथा $D(x_4, y_4)$ चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} [x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4]$$