वास्तविक संख्याऐं

CONTENTS (सूची)

- संख्या पद्धति
- यूक्लिड विभाजन लेमा या यूक्लिड विभाजन के नियम
- अंकगणित की आधारभूत प्रमेय
- म॰स॰प॰ तथा ल॰स॰प॰ ज्ञात करने हेतु अंकगणितीय आधारभूत प्रमेय

➤ संख्या पद्धति

❖ प्राकृत संख्याऐं (Natural Numbers) :

वे संख्याऐं जो गिनने के काम आती हैं, जैसे 1, 2, 3, 4....... आदि संख्याऐं, प्राकृत संख्याऐं कहलाती हैं।

❖ पूर्ण संख्याऐं (Whole numbers) :

यदि प्राकृत संख्याओं में शून्य को भी शामिल कर लिया जाये तो प्राप्त संख्याओं का सम्मुचय अर्थात् 0, 1, 2, 3, 4...... आदि पूर्ण संख्याऐं कहलाती हैं। पूर्ण संख्याओं के सम्मुचय को W = {0, 1, 2, 3, 4....} से निरूपित किया जाता है।

❖ पूर्णांक (Integers) :

सभी प्राकृत संख्याऐं, उनकी ऋणात्मक संख्याऐं तथा शून्य को मिलाकर बना सम्मुचय पूर्णांक संख्याऐं कहलाती हैं। पूर्णांको के सम्मुचय को हम

$$Z = \{....-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,....\}$$

से निरूपित करते हैं। पूर्णांको के सम्मुचय में धनात्मक संख्याऐं, ऋणात्मक संख्याऐं तथा शून्य आते है।

❖ परिमेय संख्याऐं (Rational Number) :

(i) परिमेय संख्याऐं वे संख्याऐं होती है, जिन्हें $\frac{p}{q}$ रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p व q दोनों पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$.

(ii) एक परिमेय संख्या या तो परिमित या अपरिमित होती है, तथा आवर्ती (पुनरावृत्ति) दशमलव होती है।

(iii) एक परिमेय संख्या धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य होती है।

❖ सम्मिश्र संख्याऐं (Complex numbers) :

सम्मिश्र संख्याऐं काल्पनिक संख्याऐं होती है, जिन्हें a + ib रूप में लिखा जाता है, जहाँ a व b वास्तविक संख्याऐं हैं तथा $i = \sqrt{-1}$ जो कि एक काल्पनिक राशि है।

❖ भाजक (Factors) :

एक संख्या, दूसरी संख्या की भाजक होती है, यदि पहली संख्या, दूसरी संख्या को पूर्ण रूप से विभाजित करती है तथा कोई शेषफल नहीं रहता (शेषफल शून्य) जैसे 3 व 5 क्रमशः 12 व 25 भाजक हैं।

❖ गुणज (Multiples) :

एक गुणज वह संख्या है जो दूसरी संख्या से पूर्ण रूप से विभाजित होती है, जैसे 2, 3, 4, 9 व 12 प्रत्येक का एक गुणज 36 हैं।

❖ सम संख्याऐं (Even Numbers) :

वे पूर्णांक जो 2 के गुणज हों "सम संख्याऐं" कहलाती हैं जैसे 2,4, 6, 8............... सम संख्याऐं हैं।

❖ विषम संख्याऐं (Odd numbers) :

वे पूर्णांक जो 2 के गुणज नहीं हैं, "विषम संख्याऐं" कहलाती है।

◈ **अभाज्य तथा भाज्य संख्याऐं (Prime and composite Numbers) :**

वे प्राकृत संख्याऐं जो 1 व स्वयं के अलावा अन्य किसी संख्या से विभाजित नहीं होती हैं "अभाज्य संख्याऐं" कहलाती है। संख्या 1 अभाज्य संख्या नहीं हैं। परन्तु 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 .... अभाज्य संख्याऐं हैं और वे संख्याऐं जो अभाज्य नहीं हैं "भाज्य संख्याऐं" कहलाती हैं।

◈ **किसी वास्तविक संख्या का निरपेक्ष मान (मापांक) (The Absolute Value (or modulus) of a real Number) :**

यदि a कोई वास्तविक संख्या है, जिसके मापांक को $|a|$ से लिखते हैं, जहाँ $|a|$ सदैव धनात्मक या शून्य है, इसका तात्पर्य यह है कि a का हमें धनात्मक मान ही प्राप्त होगा चाहे संख्या 'a' धनात्मक या ऋणात्मक हो।

$|3| = 3$ व $|0| = 0$ अतः $|a| = a$; यदि $a = 0$ या $a > 0$ अर्थात् $a \geq 0$

$|-3| = 3 = -(-3)$ अतः $|a| = -a$ जबकि $a < 0$

एवं $|a| = a$ यदि $a > 0$; $|a| = -a$ यदि $a < 0$

◈ **अपरिमेय संख्या या असांत दशमलव संख्या (Irrational number) :**

(i) एक संख्या अपरिमेय कहलाती है यदि और केवल यदि इसका दशमलव निरूपण अपरिमित तथा अन-आवर्ती हो अर्थात् $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π................ आदि

(ii) परिमेय संख्याऐं तथा अपरिमेय संख्याऐं दोनों मिलकर वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का निर्माण करती हैं।

(iii) यदि a व b दो वास्तविक संख्याऐ हों, तब या तो (i) $a > b$ या (ii) $a = b$ या (iii) $a < b$

(iv) अपरिमेय संख्या की ऋणात्मक संख्याऐं भी अपरिमेय होती हैं।

(v) परिमेय संख्या तथा अपरिमेय संख्याओं का योग सदैव अपरिमेय होता है

(vi) अशून्य परिमेय संख्या का अपरिमेय संख्या से गुणनफल सदैव अपरिमेय संख्या होती है।

(vii) दो अपरिमेय संख्याओं का योगफल सदैव अपरिमेय संख्या नहीं होती

(viii) दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव अपरिमेय संख्या नहीं होती

सभी परिमेय संख्याऐं जो $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ रूप में हो, जहाँ p व q पूर्णांक हैं, के लिए दो स्थितियाँ सम्भव हो सकती हैं कि या तो शेषफल शून्य हो या कभी भी शून्य न हो।

प्रकार (Type) (1) : Eg. : $\frac{7}{8} = 0.875$

```
8)70 (0.875
  64
  ---
   60
   56
   ---
    40
    40
    ---
     ×
```

यह दशमलव प्रसार 0.875 परिमित कहलाता है।

∴ यदि शेषफल शून्य हो तब दशमलव प्रसार पूर्ण (समाप्त) होता है (कुछ निश्चित पदों के पश्चात्)। इस प्रकार की संख्याओं का दशमलव प्रसार परिमित होता है।

प्रकार (Type) (2) :

Eg. : $\frac{1}{3} = 0.333$……….

$= 0.\overline{3}$

```
3)10 (0.33……
   9
  ---
   10
    9
  ---
    1……
```

या $\frac{1}{7} = 0.142857142857$…..

$= 0.\overline{142857}$

```
7)10 (0.14285....
   7
   30
   28
    20
    14
     60
     56
      40
      35
       50
       49
        1....
```

उपरोक्त दोनों उदाहरण से स्पष्ट है कि शेषफल कभी भी शून्य नहीं आता, अतः दशमलव प्रसार कभी भी कुछ पदों या अनन्त पदों के पश्चात् भी समाप्त नहीं होता। इस प्रकार के दशमलव प्रसार अपरिमित कहलाते हैं।

उपरोक्त उदाहरणों में I^{st} पद व 6 पद विभाजन (क्रमशः) में हमें शेषफल, भाज्य के तुल्य मिलता है, अतः दशमलव प्रसार आवर्ती (पुनरावृत्त) हैं।

इस प्रकार इन्हें अपरिमित आवर्ती दशमलव कहते हैं।

उपरोक्त दोनों प्रकार (1 व 2) परिमेय संख्याऐं हैं।

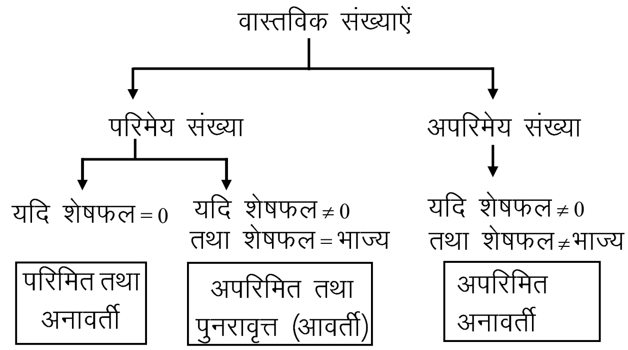
प्रकार (Types) (3) :

Eg. : 0.327172398……का दशमलव प्रसार कहीं पर भी समाप्त नहीं होता है एवं अंको की कोई व्यवस्था नहीं है (अन-आवर्ती) इसलिए इन्हें हम अपरिमित अन आवर्ती कहते हैं।

ये संख्याऐं अपरिमेय संख्याऐं कहलाती हैं।

Eg. :

(1)	0.1279312793	परिमेय	परिमित
(2)	0.1279312793…. या $0.\overline{12793}$	परिमेय	अपरिमित तथा आवर्ती
(3)	0.32777	परिमेय	परिमित
(4)	$0.32\overline{7}$ या 0.32777…….	परिमेय	अपरिमित व आवर्ती
(5)	0.5361279	परिमेय	परिमित
(6)	0.3712854043….	अपरिमेय	अपरिमित तथा अन आवर्ती
(7)	0.10100100010000	परिमेय	परिमित
(8)	0.10100100010000….	अपरिमेय	अपरिमित तथा अन आवर्ती



उदा. : $\frac{18}{5} = 3.6$ उदा. : $\frac{1}{3} = 0.33......$ $= 0.\overline{3}$ उदा. : 0.671234…..

उदा. : 1.343634003908……

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 2 व 3 के मध्य एक परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या को प्रविष्ट कीजिए।

Sol. यदि a व b दो धनात्मक परिमेय संख्याऐं इस प्रकार से हों कि ab एक परिमेय संख्या का पूर्ण वर्ग नहीं हो तब $\sqrt{ab}$ एक अपरिमेय संख्या है जो a व b के मध्य स्थित है एवं परिमेय संख्याऐं a, b है तब $\frac{a+b}{2}$ उनके मध्य एक परिमेय संख्या है।

$\therefore$ 2 व 3 के मध्य एक परिमेय संख्या $\frac{2+3}{2} = 2.5$

2 व 3 के मध्य एक परिमेय संख्या $\sqrt{2\times3} = \sqrt{6}$

Ex.2 2 व 2.5 के मध्य दो अपरिमेय संख्याऐं ज्ञात कीजिए

Sol. यदि a व b दो विभिन्न धनात्मक परिमेय संख्याऐं इस प्रकार से हैं कि ab एक परिमेय संख्या का पूर्ण वर्ग नहीं है, तब $\sqrt{ab}$ दो संख्याओं a व b के मध्य एक अपरिमेय संख्या है।

$\therefore$ 2 व 2.5 के मध्य अपरिमेय संख्या $\sqrt{2\times 2.5} = \sqrt{5}$

इसी तरह से, 2 व $\sqrt{5}$ के मध्य अपरिमेय संख्या $\sqrt{2\times\sqrt{5}}$

अतः अभीष्ठ संख्याऐं $\sqrt{5}$ व $\sqrt{2\times\sqrt{5}}$ हैं।

Ex.3 $\sqrt{2}$ व $\sqrt{3}$ के मध्य दो अपरिमेय संख्याऐं ज्ञात कीजिए।

Sol. हम जानते हैं कि, यदि a व b दो विभिन्न धनात्मक अपरिमेय संख्याऐं हों तब $\sqrt{ab}$ संख्याओं a व b के मध्य एक अपरिमेय संख्या है।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ व $\sqrt{3}$ के मध्य अपरिमेय संख्या $\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{6}} = 6^{1/4}$ है

$\sqrt{2}$ व $6^{1/4}$ के मध्य अपरिमेय संख्या $\sqrt{\sqrt{2}\times 6^{1/4}} = 2^{1/4}\times 6^{1/8}$ है

अतः अभीष्ठ अपरिमेय संख्या $6^{1/4}$ व $2^{1/4}\times 6^{1/8}$ है

Ex.4 0.12 व 0.13 के मध्य दो अपरिमेय संख्याऐं ज्ञात कीजिए

Sol. मानाकि a = 0.12 एवं b = 0.13 स्पष्टतः a व b परिमेय संख्याऐं इस प्रकार से हैं कि $a < b$.

हम देखते हैं कि संख्या a व b के दशमलव के प्रथम स्थान पर 1 आता है, परन्तु दशमलव के दूसरे स्थान पर a में 2 व b में 3 आता है इस प्रकार हम निम्न संख्याओं पर विचार करते हैं

c = 0.1201001000100001 ......

एवं d = 0.12101001000100001.......

स्पष्टतः c व d अपरिमेय संख्याऐं इस प्रकार से हैं कि $a < c < d < b$.

प्रमेय (Theorem) : मानाकि p एक अभाज्य संख्या है। यदि p, a^2 को विभाजित करता हो तब p, a को विभाजित करता है, जहाँ a कोई धनात्मक पूर्णांक है।

उपपत्ति (Proof) : मानाकि a का अभाज्य गुणनखण्ड निम्न प्रकार से है :

$a = p_1p_2.....p_n$, जहाँ $p_1,p_2,.....p_n$ अभाज्य है परन्तु आवश्यक रूप से विभिन्न नहीं।

इस प्रकार,

$a^2 = (p_1p_2.....p_n)\,(p_1p_2\ .....\ p_n) = p_1^2p_2^2\ .....\ p_n^2$.

अब हमें दिया गया है कि p, a^2 को विभाजित करता है, इसलिए अंकगणित के आधारभूत प्रमेय से, स्पष्ट है कि p, a^2 का अभाज्य गुणनखण्ड है। यद्यपि अंकगणितीय आधारभूत प्रमेय के अद्वितीय भाग प्रयोग से हम देखते है कि a^2 के केवल अभाज्य गुणनखण्ड $p_1, p_2,..., p_n$ हैं, अतः p; $p_1, p_2,......, p_n$ का एक भाग है।

अब, चूंकि $a = p_1\,p_2\ ......\ p_n$, p ; a को विभाजित करता है

अब हम यह प्रमाण देने को तैयार हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यह प्रमाण 'विरोधाभास द्वारा सत्यापन' तकनीक पर आधारित है।

Ex.5 सिद्ध करो कि

(i) $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है

(ii) $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है

इसी तरह से, $\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11}$ ...... अपरिमेय संख्याऐं हैं।

Sol. (i) मान लो कि विरोधाभास में, $\sqrt{2}$ परिमेय है।

अब हम पूर्णांक r ज्ञात करते है एवं s ($\neq$ 0) ऐसा है कि $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$.

मानाकि r व s का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 1 के अलावा नहीं हैं, तब हम उभयनिष्ठ गुणनखण्ड द्वारा $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, प्राप्त करते है, जहाँ a व b सहअभाजय संख्याऐं हैं, अतः $b\sqrt{2} = a$.

दोनों तरफ का वर्ग कर उन्हें पुनः व्यवस्थित करने पर, हमें $2b^2 = a^2$ मिलता है। अतः 2, a^2 को विभाजित करता है, अब प्रमेय से 2, a को विभाजित करता है

हम a = 2c लिखते हैं, जहाँ c कोई पूर्णांक है, इसे a, की जगह प्रतिस्थापित करने पर, हमें $2b^2 = 4c^2$ मिलता है, अर्थात् $b^2 = 2c^2$.

इसका तात्पर्य यह है कि 2, b^2 को विभाजित करता है एवं 2, b को भी विभाजित करता है (पुनः प्रमेय प्रयोग से जहाँ p = 2)

अतः a व b के कम से कम 2 उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हैं। परन्तु यह उस तथ्य का विरोधाभासी है कि a व b का 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

यह विरोधाभासी कथन से हमारा गलत मानना कि $\sqrt{2}$ परिमेय है, का पता चलता है। अतः हम कह सकते है कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

(ii) मान लो कि $\sqrt{3}$ परिमेय है अर्थात् हम पूर्णांक a व b ($\neq 0$) पायेंगे कि $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$.

मानाकि a व b का 1 के अलावा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है, तब हम उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से विभाजित करते हैं एवं मान लेते हैं कि a व b सह अभाज्य संख्याऐं है।

अतः $b\sqrt{3} = a$.

दोनों तरफ का वर्ग करने पर एवं पुनः व्यवस्थित करने पर, हम पाते हैं कि $3b^2 = a^2$.

अतः a^2, 3 से विभाज्य है एवं प्रमेय से a भी 3 से विभाज्य होना चाहिये।

इसलिए हम लिख सकते हैं कि a = 3c जहाँ c कोई पूर्णांक है

a के प्रतिस्थापन सें, हमें $3b^2 = 9c^2$ मिलता है, अर्थात् $b^2 = 3c^2$.

इसका तात्पर्य यह है कि b^2, 3 से विभाज्य है एवं b भी 3 से विभाज्य है (प्रयोग प्रमेय से p = 3)

अतः a व b के कम से कम 3 उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हैं।

परन्तु यह विरोधाभास उस तथ्य का है कि a व b सह अभाज्य है

यह विरोधाभास हमारे गलत मानने को है कि $\sqrt{3}$ परिमेय है, स्पष्ट करता है

अतः, स्पष्ट है कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय है

Ex.6 सिद्ध करो कि $7-\sqrt{3}$ अपरिमेय है।

Sol. **विधी (Method) I :**

मानाकि $7-\sqrt{3}$ परिमेय संख्या है

$\therefore\ 7-\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ (p, q पूर्णांक है $q \neq 0$)

$\therefore\ 7-\frac{p}{q}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ \sqrt{3}=\frac{7q-p}{q}$

यहाँ p, q पूर्णांक है

$\therefore\ \frac{7q-p}{q}$ भी पूर्णांक हैं।

$\therefore$ LHS = $\sqrt{3}$ भी पूर्णांक है, परन्तु यह विरोधाभासी है कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय है इसलिए हमारा मानना कि $(7-\sqrt{3})$ परिमेय है, गलत है।

$\therefore\ 7-\sqrt{3}$ अपरिमेय है (इतिसिद्धम)

विधी (Method) II :

मानाकि $7-\sqrt{3}$ परिमेय है।

हम जानते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का योग या अन्तर भी परिमेय होता है।

$\therefore\ 7-(7-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ = परिमेय

परन्तु यह विरोधाभासी है कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय है।

$\therefore\ (7-\sqrt{3})$ अपरिमेय है (इतिसिद्धम)

Ex.7 सिद्ध करो कि :

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (ii) $2\sqrt{7}$ अपरिमेय है।

Sol. (i) मानाकि $\frac{\sqrt{5}}{3}$ परिमेय है

$\therefore\ 3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \sqrt{5}$ परिमेय है

($\because$ दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल भी परिमेय होता है)

परन्तु यह विरोधाभासी है कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

$\therefore\ \frac{\sqrt{5}}{3}$ अपरिमेय है (सिद्ध होता है)

(ii) मानाकि $2\sqrt{7}$ परिमेय है।

$\therefore\ (2\sqrt{7})\times\frac{1}{2} = \sqrt{7}$

($\because$ दो परिमेय संख्याओं का विभाजन भी परिमेय होता है)

$\therefore\ \sqrt{7}$ परिमेय है

परन्तु यह विरोधाभासी है कि $\sqrt{7}$ अपरिमेय है।

$\therefore\ 2\sqrt{7}$ अपरिमेय है (इतिसिद्धम)

प्रमेय (Theorem) 1 :

मानाकि x एक परिमेय संख्या है जिसका दशमलव विस्तार परिमित है, तब x को $\frac{p}{q}$ रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ p व q सह अभाज्य संख्याऐं है एवं q का अभाज्य गुणनखएड 2^n5^m है, जहाँ n, m अऋणात्मक पूर्णांक हैं।

(A) परिमित संख्याऐं (शेषफल = शून्य)

Eg : $\frac{32}{125} = \frac{2^5}{5^3} = \frac{2^8}{(2\times5)^3} = \frac{256}{10^3} = 0.256$

Eg : $\frac{9}{25} = \frac{9\times2^2}{5^2\times2^2} = \frac{36}{(2\times5)^2} = \frac{36}{(10)^2}$

$= 0.36$

इस प्रकार हम एक परिमेय संख्या जो $\frac{p}{q}$ रूप की है, जहाँ q को 2^n5^m रूप से दर्शाया गया है तो इसको इसके तुल्य परिमेय संख्या जो $\frac{a}{b}$ रूप में है, जहाँ b ; 10 की घात हो, ये परिमित हैं।

या

प्रमेय (Theorem) 2 :

मानाकि x = $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है, जो इस प्रकार से है कि q का अभाज्य गुणनखण्ड $2^n\,5^m$ रूप में है। जहाँ n, m अऋणात्मक पूर्णांक है। तब x एक दशमलव विस्तार है जो परिमित है।

(B) अपरिमित एवं आवर्ती

Eg : $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} = 0.142857142857.....$

चूँकि हर 7 जो $2^n\,5^m$ रूप में है, अतः हम शून्य (0) को शेषफल के रूप में नहीं दर्शायेंगे।

प्रमेय (Theorem 3 :

मानाकि x = $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है तथा q के अभाज्य गुणनखण्ड 2^n5^m रूप के नहीं हैं, n, m अऋणात्मक पूर्णांक हैं, तब x का दशमलव विस्तार जो कि अपरिमित पुनरावृत्त (आवर्ती) है।

उपरोक्त विवेचन से, हम यह निष्कर्ष निकालते है कि प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो परिमित या अपरिमित आवर्ती है।

Eg : दी गई परिमेय संख्याओं को पहचानिये कि इनमें से कौन परिमित या अपरिमित है?

(1) $\frac{13}{3125}=\frac{13}{(5)^5}=\frac{13\times 2^5}{2^5\times 5^5}=\frac{(13\times 32)}{(10)^5}$

= परिमित

(2) $\frac{17}{8}=\frac{17}{2^3}=\frac{17\times 5^3}{(2\times 5)^3}=\frac{17\times 125}{(10)^3}$

= परिमित

(3) $\frac{64}{455}=\frac{2^6}{5\times 7\times 13}$ ($\because$हम हर में से 7 व 13 को नहीं हटा सकते) अपरिमित आवर्ती ($\because$संख्या परिमेय है $\therefore$ यह सदैव पुनरावृत्त या आवर्ती है)

(4) $\frac{15}{1600}=\frac{3\times 5}{2^4\times 10^2}=\frac{3\times 5^5}{(2\times 5)^4\times 10^2}=\frac{3\times 5^5}{10^6}$

= परिमित, आवर्ती

(5) $\frac{29}{343}=\frac{29}{(7)^3}$ = अपरिमित, अनावर्ती

(6) $\frac{23}{2^3 5^2}=\frac{23\times 5}{(2\times 5)^3}=\frac{23\times 5}{(10)^3}$

= परिमित, आवर्ती

(7) $\frac{129}{2^5\times 5^7\times 7^5} = \frac{3\times 43\times 2^2}{(2\times 5)^7\times 7^5}$

= अपरिमित, आवर्ती ($\because$हर में से 7 को नहीं हटाया जा सकता)

(8) $\frac{6}{15}=\frac{2\times 3}{5\times 3}=\frac{2}{5}=\frac{2\times 2}{10}$

= परिमित, आवर्ती

(9) $\frac{35}{50}=\frac{35\times 2}{100}$ = परिमित, आवर्ती

(10) $\frac{77}{210}=\frac{7\times 11}{7\times 30}=\frac{7\times 11}{7\times 2\times 5\times 3}$

= अपरिमित, आवर्ती

➤ यूक्लिड़ विभाजन लेमा या यूक्लिड़ विभाजन नियम

कोई दो धनात्मक संख्याओं **a** व **b** के लिए, अद्वितीय पूर्णांक q व r इस प्रकार विद्यमान हैं कि जो $a = bq + r$ जहाँ $0 \le r < b$ को संतुष्ट करते हैं

उदाहरण के लिए

(i) संख्या 23 व 5 पर विचार कीजिए, तब:

$23 = 5 \times 4 + 3$

$a = bq + r$ से तुलना करने पर, हम पाते हैं कि

$a = 23, b = 5, q = 4, r = 3$

एवं $0 \le r < b$ (as $0 \le 3 < 5$).

(ii) धनात्मक पूर्णांक 18 व 4 पर विचार कीजिए

$18 = 4 \times 4 + 2$

$\Rightarrow$ 18 (= a) एवं 4(= b) के लिए, हम q = 4 लेते हैं

$r = 2$ एवं $0 \le r < b$.

सम्बन्ध $a = bq + r$ जहाँ $0 \le r < b$ कुछ नहीं बल्कि दीर्घ विभाजन का एक कथन है, जिसमें संख्या a को b से विभाजित करने पर भागफल q तथा शेषफल r आता है।

इस प्रकार, भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल
$\Rightarrow a = bq + r$

◈ म॰स॰प॰ (महत्तम समापवर्तक) H.C.F. (Highest Common Factor)

दो या दो से अधिक धनात्मक पूर्णांकों का म॰स॰प॰ वह बड़े से बड़ा धनात्मक पूर्णांक है जो प्रत्येक दी गई धनात्मक संख्या को पूर्णतया विभाजित करता है।

अर्थात् यदि **d** धनात्मक पूर्णांक है दो धनात्मक पूर्णांकों **a** व **b** को विभाजित करता हो, तब **a** व **b** का म॰स॰प॰ **d** है।

उदाहरण के लिए

(i) 14 महत्तम धनात्मक पूर्णांक है, जो 28 व 70 को पूर्णतया विभाजित करता है अतः 28 व 70 म॰स॰प॰ 14 है।

(ii) 75, 125 व 200 का म॰स॰प॰ 25 है, चूँकि 25 प्रत्येक 75, 125 व 200 को पूर्णतया विभाजित करता है।

❖ **यूक्लिड़ विभाजन लेमा के प्रयोग से म॰स॰प॰ ज्ञात करना (Using Euclid's Division Lemma For Finding H.C.F.)**

धनात्मक पूर्णांक 418 व 33 का अवलोकन करें।

पद-1

सबसे बड़ी संख्या (418) को **a** मानें व सबसे छोटी संख्या (33) को **b** को मानें,

अब संख्या को $a = bq + r$ रूप में व्यक्त कीजिए

$\Rightarrow$ $418 = 33 \times 12 + 22$

पद-2

अब विभाजक 33 व शेषफल 22 लेने पर, यूक्लिड़ विभाजन नियम से,

$33 = 22 \times 1 + 11$ [$a = bq + r$ में व्यक्त करने पर]

पद-3

पुनः नये विभाजक 22 व नये शेषफल 11 को लेकर यूक्लिड़ विभाजन नियम लगाने पर,

$22 = 11 \times 2 + 0$

पद-4

चूँकि शेषफल = 0 अतः अब आगे गणना नहीं कर सकते हैं।

पद-5

अंतिम विभाजन 11 है एवं हम कह सकते हैं कि 418 व 33 का म॰स॰प॰ = 11

सत्यापन (Verification) :

(i) गुणनखण्ड विधि प्रयोग से (Using factor method):

$\therefore$ 418 के गुणनखण्ड = 1, 2, 11, 19, 22, 38, 209 व 418 तथा

33 के गुणनखण्ड = 1, 3, 11 व 33 हैं

उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = 1 व 11

$\Rightarrow$ महत्तम समापवर्तक = 11 अर्थात् म॰स॰प॰ = 11

(ii) अभाज्य गुणनखण्ड विधि प्रयोग से (Using prime factor method):

418 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2, 11 व 19

33 के अभाज्य गुणनखण्ड = 3 व 11

$\therefore$ **म॰स॰प॰** = सभी उभयनिष्ठ अभाज्य संख्याओं का गुणनफल = 11 किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a व b के लिए व्यंजक $a = bq + r$ जहाँ $0 \le r < b$ तब (a, b) का म॰स॰प॰ = (q, r) के म॰स॰प॰ एवं इसी प्रकार संख्या 418 व 33 के लिए,

$418 = 33 \times 12 + 22$

$33 = 22 \times 1 + 11$

व $22 = 11 \times 2 + 0$

$\Rightarrow$ (418, 33) का म॰स॰प॰ = (33, 22) का म॰स॰प॰ = (22, 11) का म॰स॰प॰ = 11.

❖ **उदाहरण** ❖

Ex.8 यूक्लिड़ विभाजन नियम से निम्नलिखित के म॰स॰प॰ (H.C.F.) ज्ञात करो **[NCERT]**

(i) 135 व 225 (ii) 196 व 38220

(iii) 867 व 255

Sol.(i) सबसे बड़ी संख्या से शुरू करने पर अर्थात् 225 से शुरू करने पर

$225 = 135 \times 1 + 90$

अब विभाजक 135 व शेषफल 90 लेने पर, हम पाते हैं कि $135 = 90 \times 1 + 45$

इसी प्रकार आगे, विभाजक 90 व शेषफल 45 लेने पर हम पाते हैं कि $90 = 45 \times 2 + 0$

$\therefore$ **अभीष्ठ म॰स॰प॰ = 45**

(ii) महत्तम संख्या 38220 से शुरू करने पर, हम पाते हैं कि

$38220 = 196 \times 195 + 0$

चूँकि शेषफल 0 हैं

$\Rightarrow$ म॰स॰प॰ **= 196**

(iii) दी गई संख्याऐं 867 व 255 हैं

$\Rightarrow$ $867 = 255 \times 3 + 102$ **(पद-1)**

$255 = 102 \times 2 + 51$ **(पद-2)**

$102 = 51 \times 2 + 0$ **(पद-3)**

$\Rightarrow$ **म॰स॰प॰ = 51**

Ex.9 प्रदर्शित करो कि प्रत्येक धनात्मक सम पूर्णांक 2q रूप में होता है तथा प्रत्येक धनात्मक विषम पूर्णांक 2q + 1 रूप में होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

Sol. यूक्लिड़ विभाजन नियम लेमा के अनुसार यदि a व b दो धनात्मक पूर्णांक ऐसे हों कि a का मान b से बड़ा है, तो इन दोनों पूर्णांको को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है

$a = bq + r$ जहाँ $0 \le r < b$

अब मान लो कि

$b = 2$ तब $a = bq + r$ का परिवर्त रूप

$a = 2q + r$ जहाँ $0 \le r < 2$,

अर्थात् $r = 0$ या $r = 1$

यदि $r = 0$, $a = 2q + r \Rightarrow a = 2q$

अर्थात् a सम है

एवं यदि $r = 1$, $a = 2q + r \Rightarrow a = 2q + 1$

अर्थात् a विषम है।

यदि पूर्णांक सम नहीं है, तो यह विषम होगा,

चूँकि a कोई धनात्मक पूर्णांक है इसलिए यह प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक है जिसे निम्न प्रकार व्यक्त करते है

$a = 2q$

$\therefore$ **a** सम है तथा इसे $a = 2q + 1$ से व्यक्त करते है जहाँ a विषम है। **इतिसिद्धम**

Ex.10 प्रदर्शित करो कि कोई धनात्मक विषम पूर्णांक 4q + 1 रूप में या 4q + 3 रूप में होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

Sol. मानाकि **a** तथा **b** दो धनात्मक पूर्णांक हैं, जिनमें **a**, **b** से अधिक है। यूक्लिड़ विभाजन नियम से, **a** व **b** को व्यक्त किया जा सकता है

$a = bq + r$ जहाँ q भागफल व r शेषफल है तथा $0 \le r < b$

$b = 4$ लेने पर, हम पाते हैं कि $a = 4q + r$,

जहाँ $0 \le r < 4$ अर्थात् $r = 0, 1, 2$ या 3

r = 0 $\Rightarrow a = 4q$ जो कि 2 से विभाज्य है, अतः सम है।

r = 1 $\Rightarrow a = 4q + 1$ जो कि 2 से विभाज्य नहीं है, अतः विषम है।

r = 2 $\Rightarrow q = 4q + 2$ जो कि 2 से विभाज्य है, अतः सम है।

एवं **r = 3** $\Rightarrow q = 4q + 3$ जो कि 2 से विभाज्य नहीं है, अतः विषम है।

$\therefore$ **कोई धनात्मक विषम पूर्णांक 4q + 1 या 4q + 3 रूप में होता है,**

जहाँ q एक पूर्णांक है। **इतिसिद्धम**

Ex.11 प्रदर्शित करो कि एक और केवल एक n; n + 2 या n + 4 में से 3 से विभाज्य है जहाँ **n** कोई धनात्मक पूर्णांक है।

Sol. कोई दो धनात्मक पूर्णांक **a** व **b** इस प्रकार से लें कि **a** का मान **b** से बड़ा हो, तो यूक्लिड़ विभाजन नियम के अनुसार

$a = bq + r$ जहाँ q व r धनात्मक पूर्णांक हैं एवं $0 \le r < b$

मानाकि $a = n$ एवं $b = 3$ तब

$a = bq + r \Rightarrow n = 3q + r$ जहाँ $0 \le r < 3$.

r = 0 $\Rightarrow n = 3q + 0 = 3q$

r = 1 $\Rightarrow n = 3q + 1$ व **r = 2** $\Rightarrow n = 3q + 2$

यदि $n = 3q$; **n, 3 से विभाज्य है**

यदि $n = 3q + 1$ तब $n + 2 = 3q + 1 + 2$

$= 3q + 3$ जो कि 3 से विभाज्य है।

$\Rightarrow$ **n + 2, 3 से विभाज्य है**

यदि $n = 3q + 2$ तब $n + 4 = 3q + 2 + 4$

$= 3q + 6$ जो कि 3 से विभाज्य है

$\Rightarrow$ **n + 4, 3 से विभाज्य है**

अतः यदि **n** कोई धनात्मक पूर्णांक हो, तब n, n + 2 या n + 4 में से एक और केवल एक 3 से विभाज्य है। **इतिसिद्धम**

Ex.12 प्रदर्शित करो कि कोई धनात्मक पूर्णांक जो कि $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ विषम है, जहाँ q कोई पूर्णांक हैं।

Sol. यदि **a** व **b** दो धनात्मक पूर्णांक ऐसे है कि **a, b** से बड़ा है, तो यूक्लिड़ के विभाजन नियम से

$a = bq + r$ जहाँ q व r धनात्मक पूर्णांक है एवं $0 \leq r < b$.

मानाकि $b = 6$ तब

$a = bq + r \Rightarrow \mathbf{a = 6q + r}$ जहाँ $0 \leq r < 6$

जब $r = 0 \Rightarrow a = 6q + 0 = 6q$;

जो कि सम पूर्णांक है

जब $r = 1 \Rightarrow a = 6q + 1$

जो कि विषम पूर्णांक है

जब $r = 2 \Rightarrow a = 6q + 2$ **जो कि सम है**

जब $r = 3 \Rightarrow a = 6q + 3$ **जो कि विषम है**

जब $r = 4 \Rightarrow a = 6q + 4$ **जो कि सम है**

जब $r = 5 \Rightarrow a = 6q + 5$ **जो कि विषम है**

इससे सत्यापित होता है कि जब r = 1 या 3 या 5 हो तो प्राप्त पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ होता है एवं पूर्णांकों में से प्रत्येक धनात्मक विषम संख्या होती हैं। **इतिसिद्धम**

Ex.13 यूक्लिड़ विभाजन नियम प्रयोग से सिद्ध करो कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग या तो 3m या 3m + 1 रूप में होता है, जहाँ m कोई पूर्णांक है।

Sol. मानाकि **a** व **b** दो धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार से है कि **a, b** से अधिक है, तब

$a = bq + r$ जहाँ q व r भी धनात्मक पूर्णांक है तथा $0 \leq r < b$

$b = 3$ लेने पर, हम पाते हैं कि

$a = 3q + r$ जहाँ $0 \leq r < 3$

$\Rightarrow$ धनात्मक पूर्णांक **a** का मान $3q + 0$, $3q + 1$ या $3q + 2$ है।

अर्थात् 3q, 3q + 1 या 3q + 2.

अब हमें प्रदर्शित करना है कि धनात्मक पूर्णांक 3q, 3q + 1 तथा 3q + 2 के वर्ग को 3m या 3m + 1 से व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ m कोई पूर्णांक हैं।

$\therefore$ **3q का वर्ग** $= (3q)^2$

$= 9q^2 = 3(3q^2) = 3m$; 3 जहाँ m कोई पूर्णांक है।

3q + 1 का वर्ग $= (3q + 1)^2$

$= 9q^2 + 6q + 1$

$= 3(3q^2 + 2q) + 1 = 3m + 1$ कोई पूर्णांक m के लिए

3q + 2 का वर्ग $= (3q + 2)^2$

$= 9q^2 + 12q + 4$

$= 9q^2 + 12q + 3 + 1$

$= 3(3q^2 + 4q + 1) + 1 = \mathbf{3m + 1}$ किसी पूर्णांक m के लिए

$\therefore$ किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग 3m या 3m + 1 रूप में होता है। जहाँ m कोई पूर्णांक है। **इतिसिद्धम**

Ex.14 यूक्लिड़ विभाजन नियम से प्रदर्शित करो कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन या तो 9m, 9m + 1 या 9m + 8 रूप में होता है, जहाँ m कोई पूर्णांक है।

Sol. मानाकि **a** व **b** दो धनात्मक पूर्णांक ऐसे हैं कि **a, b** से बड़ा है, तब

$\mathbf{a} = \mathbf{b}q + r$ जहाँ q व r धनात्मक पूर्णांक हैं एवं $0 \leq r < b$.

$b = 3$ लेने पर, हम पाते है कि

$a = 3q + r$ जहाँ $0 \leq r < 3$

$\Rightarrow$ पूर्णांक **a** के विभिन्न मान हैं

3q, 3q + 1 or 3q + 2.

3q का घन = $(3q)^3 = 27q^3 = 9(3q^3) = 9m$ जहाँ **m** कोई पूर्णांक है।

3q + 1 का घन = $(3q + 1)^3$

$= (3q)^3 + 3(3q)^2 \times 1 + 3(3q) \times 1^2 + 1^3$

$[\because (q + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1]$

$= 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1$

$= 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1$

= **9m + 1** जहाँ m कोई पूर्णांक है।

3q + 2 का घन = $(3q + 2)^3$

$= (3q)^3 + 3(3q)^2 \times 2 + 3 \times 3q \times 2^2 + 2^3$

$= 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8$

$= 9(3q^3 + 6q^2 + 4q) + 8$

= **9m + 8** जहाँ m कोई पूर्णांक है।

$\therefore$ किसी भी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m या 9m + 1 या 9m + 8 रूप में होता है।

इतिसिद्धम

➤ अंकगणितीय मूलभूत प्रमेय

कथन : प्रत्येक भाज्य संख्या को अद्वितीय रूप से अभाज्य संख्याओं के गुणन के रूप में तोड़ा जा सकता है तथा इसमें अभाज्य संख्याओं के क्रम का कोई महत्त्व नहीं होता।

उदाहरण के लिए :

(i) $30 = 2 \times 3 \times 5$, $30 = 3 \times 2 \times 5$,

$30 = 2 \times 5 \times 3$ एवं इसी प्रकार

(ii) $432 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^3$

या $432 = 3^3 \times 2^4$.

(iii) $12600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

व्यापक रूप से, एक भाज्य संख्या को अभाज्य गुणनखण्डो के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है तथा उन्हें मान के बढ़ते क्रम में लिखते हैं

e.g., (i) $6615 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$

$= 3^3 \times 5 \times 7^2$

(ii) $532400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 11 \times 11 \times 11$

❖ उदाहरण ❖

Ex.15 संख्या 6^n पर विचार कीजिए, जहाँ n प्राकृत संख्या है। जाँच करके बतलाइये कि क्या $n \in N$ का कोई ऐसा मान है, जिसके लिए 6^n, 7 से विभाज्य है।

Sol. चूँकि $6 = 2 \times 3$; $6^n = 2^n \times 3^n$

$\Rightarrow$ दी गई संख्या 6^n के अभाज्य गुणनखण्ड

$\Rightarrow$ **6^n ; 7 से विभाज्य नहीं है।**

Ex.16 संख्या 12^n पर विचार कीजिए, जहाँ n प्राकृत संख्या है एवं जाँच करके बतलाइये कि $n \in N$ के किसी मान के लिए 12^n के अन्त में क्या शून्य अंक आता है।

Sol. हम जानते हैं कि यदि कोई संख्या के अन्त में शून्य अंक आता है तो वह संख्या सदैव 5 से विभजित होती है।

$\Rightarrow$ यदि 12^n के अन्त में शून्य है, तो यह 5 से विभाज्य होनी चाहिये

यह तब ही संभव है जबकि 12^n के अभाज्य गुणनखण्ड में, अभाज्य संख्या 5 आती हो।

अब $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

$\Rightarrow$ $12^n = (2^2 \times 3)^n = 2^{2n} \times 3^n$

अर्थात् 12^n के अभाज्य गुणनखण्ड में अभाज्य संख्या 5 नहीं आता है

$\Rightarrow$ **$n \in N$ का ऐसा कोई मान नहीं है जिसके लिए 12^n के अन्त में शून्य अंक आता है**

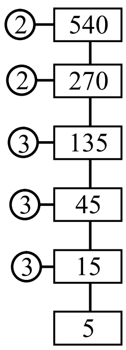
➤ गुणनखण्ड ट्री के प्रयोग से

❖ उदाहरण ❖

Ex.17 निम्न के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) 540 (ii) 21252 (iii) 8232

(i)



540 को 2 से विभाजित करने पर 270 आता है।

270 को 2 से विभाजित करने पर 135 आता है।

135 को 3 से विभाजित करने पर 45 आता है।

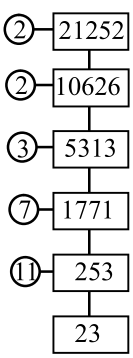
45 को 3 से विभाजित करने पर 15 आता है।

15 को 3 से विभाजित करने पर 5 आता है।

चूँकि 5 अभाज्य संख्या है, जिसे आगे किसी अभाज्य संख्या से विभाजित नहीं किया जा सकता है।

$\therefore$ $540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

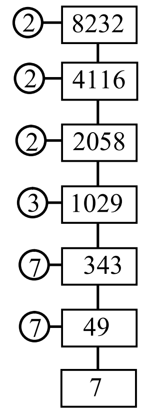
(ii)



$\therefore$ $21252 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23$

$= \mathbf{2^2 \times 3 \times 11 \times 7 \times 23.}$

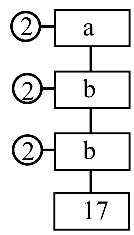
(iii)



$\therefore$ $8232 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7$

$= \mathbf{2^3 \times 3 \times 7^3.}$

Ex.18 निम्न गुणनखण्ड में a, b व c कौनसी संख्या को निरूपित करती हैं, ज्ञात कीजिए:



क्या आप सबसे ऊपर वाली संख्या को बिना दूसरी संख्या ज्ञात किये प्राप्त कर सकते हैं ?

Sol. $c = 17 \times 2 = 34$

$b = c \times 2 = 34 \times 2 = 68$ एवं

$a = b \times 2 = 68 \times 2 = 136$

अर्थात् a = 136, b = 68 एवं c = 34.

हाँ, सबसे ऊपर (Top) की संख्या को बिना दूसरी संख्या मालूम किये ज्ञात कर सकते हैं

(कारण) : दी गई संख्याएें 2, 2, 2 व 17 शीर्ष वाली संख्या केवल अभाज्य गुणनखण्ड हैं, अतः शीर्ष पर संख्या = 2 × 2 × 2 × 17 = 136

➤ ल.स.प. व म.स.प. ज्ञात करने हेतु अंकगणितीय मूलभूत प्रमेय का प्रयोग

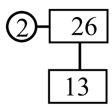
❖ उदाहरण ❖

Ex.19 अंकगणितीय मूलभूत प्रमेय अर्थात् गुणनखण्ड विधि के प्रयोग से निम्न पूर्णांकों के युग्मों के ल.स.प. तथा म.स.प. ज्ञात कीजिए

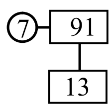
(i) 26 व 91 (ii) 1296 व 2520

(iii) 17 व 25

Sol. (i) चूँकि $26 = 2 \times 13$ एवं $91 = 7 \times 13$



एवं



∴ **ल.स.प.** = प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड का उच्चतम घाताँकों से गुणनफल $= 2 \times 13 \times 7 = 182$.

अर्थात् **ल.स.प.** (26, 91) = 182.

म.स.प. = उभयनिष्ठ गुणनखण्ड का निम्नतम घाताँकों से गुणनफल = 13.

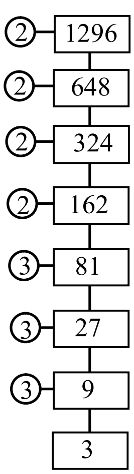
अर्थात् **म.स.प.** (26, 91) = 13.

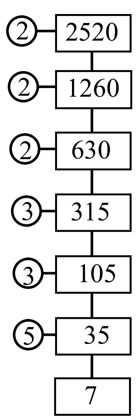
(ii) चूँकि $1296 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 2^4 \times 3^4$

एवं $2520 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$





∴**ल.स.प.** = प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड का उच्चतम घाताँकों से गुणनफल

$= 2^4 \times 3^4 \times 5 \times 7 = \mathbf{45,360}$

अर्थात् **ल.स.प.** (1296, 2520) = 45,360

म.स.प. = उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड का निम्नतम घाताँकों से गुणनफल

$= 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$

अर्थात् **ल.स.प.** (1296, 2520) = **72.**

(iii) चूँकि $17 = 17$

एवं $25 = 5 \times 5 = 5^2$

∴ **ल.स.प.** $= 17 \times 5^2 = 17 \times 25 = 425$

एवं **म.स.प.** = उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डो का निम्नतम घाताँकों से गुणनफल = 1 चूँकि दी गई संख्या का कोई उभयनिष्ठ अभाज्य नहीं है।

उदाहरण 19 (i) में :

दी गई संख्याओं का गुणनफल

$= 26 \times 91 = 2366$

एवं उनके **ल.स.प.** एवं **म.स.प.** का गुणनफल

$= 182 \times 13 = 2366$

∴ दी गई संख्याओं के ल.स.प. एवं म.स.प. का गुणनफल = दी गई संख्याओं का गुणनफल

उदाहरण 19 (ii) में :

दी गई संख्याओं का गुणनफल

$= 1296 \times 2520 = 3265920$

एवं उनके **ल.स.प.** एवं **म.स.प.** का गुणनफल

$= 45360 \times 72 = 3265920$

∴ ल.स.प. (1296, 2520) × म.स.प. (1296, 2520)

$= 1296 \times 2520$

उदाहरण 19 (iii) में :

दी गई संख्याऐं 17 व 25 का कोई उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनफल नहीं है ऐसी संख्याऐं सह अभाज्य संख्याऐं कहलाती हैं एवं उनके म.स.प. सदैव 1 (एक) के तुल्य होता है, जहाँ उनका ल.स.प. दी गई संख्याओं का गुणनफल होता है।

परन्तु दो सह अभाज्य संख्याओं के संदर्भ में, संख्याओं का गुणनफल सदैव उनके ल॰स॰प॰ व म॰स॰प॰ के तुल्य होता है।

सह अभाज्य संख्याओं 17 व 25 के संदर्भ में,

म॰स॰प॰ = 1, ल॰स॰प॰ = 17 × 25 = 425;

संख्याओं का गुणनफल = 17 × 25 = 425

एवं उनके म॰स॰प॰ व ल॰स॰प॰ का गुणनफल

= 1 × 425 = 425.

> ➢ किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए:
> उनका ल॰स॰प॰ × म॰स॰प॰
> = संख्याओं के गुणनफल
>
> ⇒ (i) ल॰स॰प॰ = $\frac{\text{संख्याओं का गुणनफल}}{\text{म॰स॰प॰}}$
>
> (ii) म॰स॰प॰ = $\frac{\text{संख्याओं का गुणनफल}}{\text{ल॰स॰प॰}}$
>
> (iii) एक संख्या = $\frac{\text{ल॰स॰प॰} \times \text{म॰स॰प॰}}{\text{दूसरी संख्या}}$

Ex.20 दिया हैं कि (306, 657) का म॰स॰प॰ = 9 तो

(306, 657) का ल॰स॰प॰ ?

Sol. (306, 657) का म॰स॰प॰ = 9 अर्थात्

306 व 657 का म॰स॰प॰ = 9

(306, 657) का ल॰स॰प॰ से तात्पर्य 306 व 657 का ल॰स॰प॰

किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए;

उनका ल॰स॰प॰ = $\frac{\text{संख्याओं का गुणनफल}}{\text{उनका म॰स॰प॰}}$

अर्थात् ल॰स॰प॰ (306, 657) = $\frac{306 \times 657}{9}$ = 22,338.

Ex.21 दिया गया है कि (150, 100) का ल॰स॰प॰ = 300 तो (150, 100) का म॰स॰प॰ ज्ञात करो ?

Sol. ल॰स॰प॰ (150, 100) = 300

⇒ 150 व 100 = 300 का ल॰स॰प॰

चूँकि संख्यओं 150 व 100 का गुणनफल

= 150 × 100

एवं इसी प्रकार :

(150, 100) का म॰स॰प॰ = $\frac{\text{150 व 100 का गुणनफल}}{\text{(150,100) का ल॰स॰प॰}}$

= $\frac{150 \times 100}{300}$ = 50.

Ex.22 दो संख्याओं का म॰स॰प॰ तथा ल॰स॰प॰ क्रमशः 12 व 240 है। यदि इन संख्याओं में से कोई एक संख्या 48 हो, तो अन्य संख्या ज्ञात करो?

Sol. चूँकि दो संख्याओं का गुणनफल

= उनका म॰स॰प॰ × उनका ल॰स॰प॰

⇒ एक संख्या × दूसरी संख्या = म॰स॰प॰ × ल॰स॰प॰

⇒ दूसरी संख्या = $\frac{12 \times 240}{48}$ = 60.

Ex.23 समझाइये कि 7 × 11 × 13 + 13 व

7 × 6 × 5 × 4 × 3 + 5 भाज्य संख्याऐं हैं।

Sol. चूँकि

7 × 11 × 13 + 13 = 13 × (7 × 11 + 1)

= 13 × 78 = 13 × 13 × 3 × 2;

अर्थात् दी गई संख्या के दो से अधिक गुणनखण्ड हैं एवं यह भाज्य संख्या है,

इसी प्रकार, 7 × 6 × 5 × 4 × 3 + 5

= 5 × (7 × 6 × 4 × 3 + 1)

= 5 × 505 = 5 × 5 × 101

⇒ दी गई संख्या भाज्य संख्या है।