द्विघात समीकरण

सूची

- मूल अवधारणा
- द्विघात बहुपद का मान
- द्विघात बहुपद के शून्यक
- द्विघात समीकरण एवं इसके मूल
- गुणनखण्डों द्वारा द्विघात समीकरण का हल
- पूर्ण वर्ग द्वारा द्विघात समीकरण का हल
- द्विघात सूत्रों के प्रयोग द्वारा द्विघात समीकरण का हल
- द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति
- मूलों का योग तथा गुणनफल
- द्विघात समीकरण बनाना जिसके मूल दिये गये हैं
- द्विघात समीकरण की रूपान्तरित समीकरणें
- द्विघात समीकरणों पर आधारित प्रश्न

➤ मूल अवधारणा

❖ दो घात का प्रत्येक बीजीय बहुपद द्विघात बहुपद कहलाता है।

उदाहरणार्थ :

(i) $3x^2 + 5x + 7$

(ii) $8x^2 - 6x$

(iii) $5x^2 - 7$

(iv) $\sqrt{2}\,x^2 + 6x - \sqrt{3}$

❖ द्विघात बहुपद का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c$ है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्यायें है, $a \neq 0$ तथा x चर हैं।

विशिष्ट द्विघात बहुपद के लिए a, b, c के मान अचर हैं, इस कारण से a, b एवं c वास्तविक अचर भी कहलाते हैं। उदाहरण के लिए द्विघात बहुपद $3x^2 - 5x + 8$ में, 3, – 5 एवं 8 अचर हैं, जबकि x चर हैं।

➤ द्विघात बहुपद का मान

द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का मान

(i) $x = \alpha$ पर $a(\alpha)^2 + b(\alpha) + c = a\alpha^2 + b\alpha + c$ है

(ii) $x = \beta$ पर $a\beta^2 + b\beta + c$ है

(iii) $x = 5$ पर $a\,(5)^2 + b(5) + c = 25a^2 + 5a + c$

इसी प्रकार

(i) $x = 2$ पर $5x^2 - 3x + 4$ का मान

$$= 5(2)^2 - 3(2) + 4$$
$$= 20 - 6 + 4 = 18$$

(ii) $x = -1$ पर $x^2 - 8x - 15$ का मान

$$= (-1)^2 - 8\,(-1) - 15$$
$$= 1 + 8 - 15 = -6$$

(iii) $x = \frac{2}{3}$ पर $7x^2 - 4$ का मान $= 7\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4$

$$= 7 \times \frac{4}{9} - 4 = \frac{28 - 36}{9} = \frac{8}{9}$$

➤ द्विघात बहुपद के शून्यक

बहुपद $x^2 - 7x + 10$ का मान :

(i) $x = 1$ पर $(1)^2 - 7 \times 1 + 10 = 1 - 7 + 10 = 4$

(ii) $x = 2$ पर $(2)^2 - 7 \times 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$

(iii) $x = 3$ पर $(3)^2 - 7 \times 3 + 10 = 9 - 21 + 10 = -2$

(iv) $x = 5$ पर $(5)^2 - 7 \times 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$

यहाँ यह प्रेक्षित किया गया हैं कि $x = 2$ एवं $x = 5$ के लिए बहुपद $x^2 - 7x + 10$ का मान शून्य हैं। x के ये दो मान बहुपद के शून्यक कहलाते हैं।

इस प्रकार यदि $x = \alpha$, (जहाँ α वास्तविक संख्या है) है, तो दिये गये द्विघात बहुपद का मान शून्य होगा। वास्तविक संख्या α द्विघात बहुपद का शून्यक कहलाता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 प्रदर्शित कीजिए :

(i) $x = 3$ द्विघात बहुपद $x^2 - 2x - 3$ का शून्यक हैं।

(ii) $x = -2$ द्विघात बहुपद $3x^2 + 7x + 2$ का शून्यक हैं।

(iii) $x = 4$ द्विघात बहुपद $2x^2 - 7x - 5$ का शून्यक नही हैं।

Sol. (i) $x = 3$ पर $x^2 - 2x - 3$ का मान

$(3)^2 - 2 \times 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 3$ द्विघात बहुपद $x^2 - 2x - 3$ का शून्यक हैं।

(ii) $x = -2$ पर $3x^2 + 7x + 2$ का मान

$3(-2)^2 + 7(-2) + 2 = 12 - 14 + 2 = 0$

$\Rightarrow$ $x = -2$ द्विघात बहुपद $3x^2 + 7x + 2$ का शून्यक हैं।

(iii) $x = 4$ पर $2x^2 - 7x - 5$ का मान

$2(4)^2 - 7(4) - 5 = 32 - 28 - 5 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ $x = 4$ द्विघात बहुपद $2x^2 - 7x - 5$ का शून्यक नहीं हैं।

Ex.2 m का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x = 2$ द्विघात बहुपद $3x^2 - mx + 4$ का शून्यक है।

Sol. चूँकि, $x = 2$; $3x^2 - mx + 4$ का शून्यक हैं

$\Rightarrow$ $3(2)^2 - m \times 2 + 4 = 0$

$\Rightarrow$ $12 - 2m + 4 = 0$, अर्थात, $m = 8$

➤ द्विघात समीकरण एवं इसके मूल

चूँकि $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ एक द्विघात बहुपद है, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ द्विघात समीकरण कहलाती हैं।

(i) $-x^2 - 7x + 2 = 0$ द्विघात समीकरण हैं

$-x^2 - 7x + 2$ द्विघात बहुपद हैं

(ii) $5x^2 - 7x = 0$ द्विघात समीकरण हैं

(iii) $5x^2 + 2 = 0$ द्विघात समीकरण हैं, परन्तु

(iv) $-7x + 2 = 0$ द्विघात समीकरण नहीं हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.3 निम्न में से कौनसी द्विघात समीकरणें हैं, कारण दीजिए :

(i) $x^2 - 8x + 6 = 0$

(ii) $3x^2 - 4 = 0$

(iii) $2x + \dfrac{5}{x} = x^2$

(iv) $x^2 + \dfrac{2}{x^2} = 3$

Sol. (i) चूँकि $x^2 - 8x + 6$ द्विघात बहुपद हैं।

$\Rightarrow$ $x^2 - 8x + 6 = 0$ द्विघात समीकरण हैं।

(ii) $3x^2 - 4 = 0$ द्विघात समीकरण हैं।

(iii) $2x + \dfrac{5}{x} = x^3$

$\Rightarrow$ $2x^2 + 5 = x^3$

$\Rightarrow$ $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$; जो त्रिघात है परन्तु द्विघात समीकरण नहीं हैं।

(iv) $x^2 + \dfrac{2}{x^2} = 3$

$\Rightarrow$ $x^4 + 2 = 2x^2$

$\Rightarrow$ $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$; जो बहुघातीय है परन्तु द्विघात समीकरण नहीं हैं।

Ex.4 निम्न प्रश्नों में ज्ञात कीजिए कि दिये गये मान समीकरण के हल (मूल) हैं या नहीं :

(i) $3x^2 - 2x - 1 = 0$; $x = 1$

(ii) $x^2 + 6x + 5 = 0$; $x = -1$, $x = -5$

(iii) $x^2 + \sqrt{2}\,x - 4 = 0$; $x = \sqrt{2}$, $x = -2\sqrt{2}$

Sol. (i) $\because$ $x = 1$ पर $3x^2 - 2x - 1$ का मान

$3(1)^2 - 2(1) - 1 = 3 - 2 - 1 = 0 = \text{RHS}$

$\therefore$ x = 1 दी गई समीकरण का हल हैं।

(ii) x = – 1, के लिए बाँया पक्ष = $(-1)^2 + 6(-1) + 5$

$= 1 - 6 + 5 = 0$ = दाँया पक्ष

$\Rightarrow$ x = – 1 दी गई समीकरण का हल है

x = – 5 के लिए, बाँया पक्ष= $(-5)^2 + 6(-5) + 5$

$= 25 - 30 + 5 = 0$ = दाँया पक्ष

$\Rightarrow$ x = – 5 दी गई समीकरण का हल है

(iii) $x = \sqrt{2}$ के लिए बाँया पक्ष = $x^2 + \sqrt{2}\,x - 4$

$= (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}(\sqrt{2}) - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$

= दायाँ पक्ष

$\therefore x = \sqrt{2}$ दी गई समीकरण का हल है

$x = -2\sqrt{2}$ के लिए

बाँया पक्ष = $(-2\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \times -2\sqrt{2} - 4$

$= 4 \times 2 - 2 \times 2 - 4 = 0$ = दाँया पक्ष

$\therefore x = -2\sqrt{2}$ दी गई समीकरण का हल हैं।

➤ गुणनखण्ड द्वारा द्विघात समीकरण का हल

चूँकि $3x^2 - 5x + 2$ द्विघात बहुपद है।

$3x^2 - 5x + 2 = 0$ द्विघात समीकरण है।

तथा,

$3x^2 - 5x + 2 = 3x^2 - 3x - 2x + 2$ [गुणनखण्ड करने पर]

$= 3x(x - 1) - 2(x - 1)$

$= (x - 1)(3x - 2)$

इसी प्रकार :

$3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 2x + 2 = 0$

[बाँयें पक्ष का गुणनखण्ड करने पर]

$\Rightarrow (x - 1)(3x - 2) = 0$

अर्थात्, $x - 1 = 0$ या $3x - 2 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 1$ या $x = \dfrac{2}{3}$;

जो दी गई द्विघात समीकरण का हल हैं।

दी गई द्विघात समीकरण को क्रमानुसार हल करना :

1. भिन्नों तथा कोष्ठकों को हटाइये यदि दिये गये हैं
2. बाँयी ओर के प्रत्येक पद का स्थानान्तरण कर $ax^2 + bx + c = 0$ या $a + bx + cx^2 = 0$ रूप में व्यक्त कीजिए।
3. प्राप्त समीकरण के बाँये पक्ष के गुणनखण्ड कीजिए **(दायाँ पक्ष शून्य होगा)**
4. प्रत्येक गुणनखण्ड को शून्य के बराबर रखकर, इसे हल कीजिए।

❖ उदाहरण ❖

Ex.5 हल कीजिए :

(i) $x^2 + 3x - 18 = 0$

(ii) $(x - 4)(5x + 2) = 0$

(iii) $2x^2 + ax - a^2 = 0$; जहाँ 'a' वास्तविक संख्या हैं।

Sol. (i) $x^2 + 3x - 18 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x - 3x - 18 = 0$

$\Rightarrow x(x + 6) - 3(x + 6) = 0$

अर्थात्, $(x + 6)(x - 3) = 0 \Rightarrow x + 6 = 0$

या $x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = -6$ या $x = 3$

$\therefore$ दी गई समीकरण के मूल – 6 एवं 3 हैं।

(ii) $(x - 4)(5x + 2) = 0 \Rightarrow x - 4 = 0$

या $5x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = 4$ या $x = -\dfrac{2}{5}$

(iii) $2x^2 + ax - a^2 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2ax - ax - a^2 = 0$

$\Rightarrow 2x(x + a) - a(x + a) = 0$

अर्थात्, $(x + a)(2x - a) = 0$

$\Rightarrow x + a = 0$ या $2x - a = 0$

$\Rightarrow x = -a$ या $x = \dfrac{a}{2}$

Ex.6 निम्न द्विघात समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $x^2 + 5x = 0$ (ii) $x^2 = 3x$

(iii) $x^2 = 4$

Sol. (i) $x^2 + 5x = 0$

$\Rightarrow$ $x(x + 5) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ या $x + 5 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ या $x = -5$

(ii) $x^2 = 3x$

$\Rightarrow$ $x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow$ $x(x - 3) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ या $x = 3$

(iii) $x^2 = 4$

$\Rightarrow$ $x = \pm 2$

Ex.7 निम्न द्विघात समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $7x^2 = 8 - 10x$

(ii) $3(x^2 - 4) = 5x$

(iii) $x(x + 1) + (x + 2)(x + 3) = 42$

Sol. (i) $7x^2 = 8 - 10x$

$\Rightarrow$ $7x^2 + 10x - 8 = 0$

$\Rightarrow$ $7x^2 + 14x - 4x - 8 = 0$

$\Rightarrow$ $7x(x + 2) - 4(x + 2) = 0$

$\Rightarrow$ $(x + 2)(7x - 4) = 0$

$\Rightarrow$ $x + 2 = 0$ या $7x - 4 = 0$

$\Rightarrow$ $x = -2$ या $x = \frac{4}{7}$

(ii) $3(x^2 - 4) = 5x$

$\Rightarrow$ $3x^2 - 5x - 12 = 0$

$\Rightarrow$ $3x^2 - 9x + 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow$ $3x(x - 3) + 4(x - 3) = 0$

$\Rightarrow$ $(x - 3)(3x + 4) = 0$

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ या $3x + 4 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 3$ या $x = -\frac{4}{3}$

(iii) $x(x + 1) + (x + 2)(x + 3) = 42$

$\Rightarrow$ $x^2 + x + x^2 + 3x + 2x + 6 - 42 = 0$

$\Rightarrow$ $2x^2 + 6x - 36 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 + 3x - 18 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 + 6x - 3x - 18 = 0$

$\Rightarrow$ $x(x + 6) - 3(x + 6) = 0$

$\Rightarrow$ $(x + 6)(x - 3) = 0$

$\Rightarrow$ $x = -6$ या $x = 3$

Ex.8 $12\,abx^2 - (9a^2 - 8b^2)\,x - 6ab = 0$ को x के लिए हल कीजिए।

Sol. दिया गया समीकरण :

$12abx^2 - 9a^2x + 8b^2x - 6ab = 0$

$\Rightarrow$ $3ax(4bx - 3a) + 2b(4bx - 3a) = 0$

$\Rightarrow$ $(4bx - 3a)(3ax + 2b) = 0$

$\Rightarrow$ $4bx - 3a = 0$ या $3ax + 2b = 0$

$\Rightarrow$ $x = \frac{3a}{4b}$ या $x = -\frac{2b}{3a}$

➢ पूर्ण वर्ग द्वारा द्विघात समीकरण का हल

प्रत्येक द्विघात समीकरण को निम्न रूपों में परिवर्तित करते है :

$(x + a)^2 - b^2 = 0$ या $(x - a)^2 - b^2 = 0.$

प्रक्रिया :

1. यदि आवश्यक हो तो द्विघात समीकरण के सभी पद बाँयी तरफ लाइये।
2. x को समाहित करने वाले पदों को $x^2 + 2xy$ या $x^2 - 2xy$ के रूप में व्यक्त कीजिए।
3. y^2 को जोड़ने तथा घटाने पर $x^2 + 2xy + y^2 - y^2$ या $x^2 - 2xy + y^2 - y^2$ प्राप्त होता है, जो $(x + y)^2 - y^2$ या $(x - y)^2 - y^2$ देता है।

अतः,

(i) $x^2 + 8x = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 + 2x \times 4 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 + 2x \times 4 + 4^2 - 4^2 = 0$

$\Rightarrow$ $(x + 4)^2 - 16 = 0$

(ii) $x^2 - 8x = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 - 2 \times x \times 4 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 - 4^2 = 0$

$\Rightarrow$ $(x - 4)^2 - 16 = 0$

❖ उदाहरण ❖

Ex.9 निम्न द्विघात समीकरणों (यदि वे विद्यमान हैं) के मूल पूर्ण वर्ग विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

(ii) $4x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$

(iii) $2x^2 + x + 4 = 0$

Sol. (i) $2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad \Rightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

[प्रत्येक पद को 2 से भाग देने पर]

$\Rightarrow x^2 - 2 \times x \times \frac{7}{4} + \frac{3}{2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2 \times x \times \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0$

$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{3}{2} = 0$

$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{49 - 24}{16}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0$

अर्थात्, $\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow x - \frac{7}{4} = \pm \frac{5}{4}$

अर्थात्, $x - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$ या $x - \frac{7}{4} = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{7}{4} + \frac{5}{4}$ या $x = \frac{7}{4} - \frac{5}{4}$

$\Rightarrow x = 3$ या $x = \frac{1}{2}$

(ii) $4x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + \sqrt{3}\,x + \frac{3}{4} = 0$

अर्थात्,

$x^2 + 2 \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$

i.e., $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ तथा $x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{-\sqrt{3}}{2}$ तथा $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ मूल हैं।

(iii) $2x^2 + x + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{x}{2} + 2 = 0$

अर्थात्, $x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 2 = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{16} = 0$

$\left[-\frac{1}{16} + 2 = \frac{-1+32}{16} = \frac{31}{16}\right]$

अर्थात्, $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{31}{16}$

यह संभव नहीं है क्योंकि वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता।

➢ द्विघात सूत्र का प्रयोग कर द्विघात समीकरण को हल करना

हिन्दु विधि (श्री धराचार्य विधि) :

पूर्ण वर्ग बनाने पर

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ को जोड़ने तथा घटाने पर

$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$

जिसमें, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ प्राप्त होता है।

अतः द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ के दो मूल हैं।

$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ तथा $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

टिप्पणी : प्रत्येक द्विघात समीकरण के अधिकतम दो और केवल दो वास्तविक मूल हो सकते हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.10 निम्न द्विघात समीकरणों को द्विघात सूत्र से हल कीजिए :

(i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $3x^2 - x - 10 = 0$

Sol. (i) दी गई समीकरण $x^2 - 7x + 12 = 0$ की मानक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 1, b = -7$ तथा $c = 12$

$\therefore b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12$

$= 49 - 48 = 1$

तथा $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{1} = 1$

$\because x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Rightarrow x = \dfrac{7 \pm 1}{2 \times 1} = \dfrac{7+1}{2}$ या $\dfrac{7-1}{2} = 4$ या 3

(ii) दी गई समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ की समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 3, b = -1$ तथा $c = -10$

$\therefore b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times -10 = 1 + 120 = 121$

तथा $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{121} = 11$

अतः, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1 \pm 11}{2} = \dfrac{1+11}{2}$ या $\dfrac{1-11}{2} = 6$ या -5

Ex.11 द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a \neq 0$, के लिए सिद्ध कीजिए $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Sol. $ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

['4a' से गुणा करने पर]

$\Rightarrow (2ax)^2 + 2 \times 2ax \times b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$

$\Rightarrow (2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$

$\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow 2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ex.12 निम्न समीकरणों का द्विघात सूत्र से हल ज्ञात कीजिए:

(i) $2x^2 + 5\sqrt{3}\,x + 6 = 0$

(ii) $3x^2 + 2\sqrt{5}\,x - 5 = 0$

Sol. (i) $2x^2 + 5\sqrt{3}\,x + 6 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$, से तुलना करने पर

$a = 2, b = 5\sqrt{3}$ तथा $c = 6$

$b^2 - 4ac = (5\sqrt{3})^2 - 4 \times 2 \times 6$

$= 25 \times 3 - 48 = 27$

$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 3 \times 3} = 3\sqrt{3}$

$\therefore x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-5\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{2 \times 4}$

$= \dfrac{-5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4}$ या $\dfrac{-5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4}$

$= \dfrac{-2\sqrt{3}}{4}$ या $\dfrac{-8\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ या $-2\sqrt{3}$

(ii) $3x^2 + 2\sqrt{5}\,x - 5 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$, से तुलना करने पर

$a = 3, b = 2\sqrt{5}$ तथा $c = -5$

$b^2 - 4ac = (2\sqrt{5})^2 - 4 \times 3 \times -5 = 4 \times 5 + 60 = 80$

$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$

$\therefore x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2\sqrt{5} \pm 4\sqrt{5}}{2 \times 3}$

$= \dfrac{-2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{6}$ या $\dfrac{-2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}}{6}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{6}$ या $\dfrac{-6\sqrt{5}}{6} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ या $-\sqrt{5}$

Ex.13 द्विघात सूत्र का प्रयोग कर समीकरण $a^2b^2x^2 - (4b^2 - 3a^4)x - 12a^2b^2 = 0$ को हल कीजिए।

Sol. दी गई समीकरण की $Ax^2 + Bx + C = 0$, से तुलना करने पर

$A = a^2b^2, B = -(4b^4 - 3a^4)$ तथा $C = -12\,a^2b^2$

$\therefore B^2 - 4AC = (4b^4 - 3a^4)^2 - 4 \times a^2b^2 \times (-12a^2b^2)$

$= 16b^8 + 9a^8 - 24a^4b^4 + 48a^4b^4$

$= 16b^8 + 9a^8 + 24a^4b^4 = (4b^4 + 3a^4)^2$

$\sqrt{B^2-4AC} = 4b^4 + 3a^4$

$\therefore x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

$= \frac{(4b^4-3a^4) \pm (4b^2+3a^4)}{2 \times a^2b^2}$

$= \frac{4b^4-3a^4+4b^4+3a^4}{2a^2b^2}$

या $\frac{4b^4-3a^4-4b^4-3a^4}{2a^2b^2}$

$= \frac{8b^4}{2a^2b^2}$ या $\frac{-6a^4}{2a^2b^2} = \frac{4b^2}{a^2}$ या $\frac{-3a^2}{b^2}$

➤ द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति

मूलों की प्रकृति $b^2 - 4ac$ के मान पर निर्भर करती है। $b^2 - 4ac$ द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तिकर कहलाता है तथा इसे सामान्यतया D से प्रदर्शित किया जाता है।

$\therefore$ $D = b^2 - 4ac$

◈ यदि **D > 0**, अर्थात् $b^2 - 4ac > 0$; $b^2 - 4ac$ धनात्मक है, तो मूल वास्तविक तथा असमान हैं

(i) यदि $b^2 - 4ac$ पूर्ण वर्ग है, तो मूल परिमेय तथा असमान होंगे।

(ii) यदि $b^2 - 4ac$ धनात्मक है परन्तु पूर्ण वर्ग नहीं है, तो मूल अपरिमेय तथा असमान होंगे।

◈ यदि D = 0, अर्थात्, $b^2 - 4ac = 0$ तो मूल वास्तविक तथा समान होंगे।

◈ यदि **D < 0**, अर्थात्, $b^2 - 4ac < 0$; अर्थात्, $b^2 - 4ac$ ऋणात्मक है, तो मूल वास्तविक नही होंगें, अर्थात् मूल काल्पनिक होंगे।

❖ उदाहरण ❖

Ex.14 हल किये बिना निम्न समीकरणों के मूलों की प्रकृति की जाँच कीजिए :

(i) $2x^2 + 2x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

(iii) $x^2 - 5x - 2 = 0$ (iv) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Sol. (i) $2x^2 + 2x + 3 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर a = 2, b = 2 तथा c = 3

$D = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 4 - 24$

$= -20$, जो ऋणात्मक हैं।

$\therefore$ दी गई समीकरण के मूल काल्पनिक होंगे।

(ii) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर a = 2, b = – 7 तथा c = 3

$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 49 - 24 = 25$, जो पूर्ण वर्ग है

$\therefore$ दी गई समीकरण के मूल परिमेय तथा असमान हैं

(iii) $x^2 - 5x - 2 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर a = 1, b = – 5 तथा c = – 2

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times -2$

$= 25 + 8 = 33$ जो धनात्मक है परन्तु पूर्ण वर्ग नहीं है।

$\therefore$ दी गई समीकरण के मूल अपरिमेय तथा असमान है

(iv) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर a = 4, b = – 4, तथा c = 1

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1$

$= 16 - 16 = 0$

$\therefore$ मूल वास्तविक तथा समान है।

Ex.15 m के किस मान के लिए समीकरण $(3m + 1) x^2 + (11 + m) x + 9 = 0$ के मूल समान होंगे ?

Sol. दी गई समीकरण की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर a = 3m + 1, b = 11 + m तथ c = 9

$\therefore$ विविक्तिकर, $D = b^2 - 4ac$

$= (11 + m)^2 - 4(3m + 1) \times 9$

$= 121 + 22m + m^2 - 108m - 36$

$= m^2 - 86m + 85$

$= m^2 - 85m - m + 85$

$= m(m - 85) - 1(m - 85)$

$= (m - 85)(m - 1)$

चूँकि मूल समान है, इसलिए D = 0

$\Rightarrow (m - 85)(m - 1) = 0$

$\Rightarrow m - 85 = 0$ या $m - 1 = 0$

$\Rightarrow m = 85$ या $m = 1$

➢ मूलों का योग एवं गुणनफल

माना α एवं β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल है

चूँकि, $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

तब, माना : $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

तथा $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ मूलों का योग $= \alpha + \beta$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha . \beta$

$$= \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$\therefore$ यदि α एवं β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तब :

(i) मूलों का योग

$$= \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$= -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

(ii) मूलों का गुणनफल

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

➢ द्विघात समीकरण बनाना जबकि मूल दिये गये है

x^2 – (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल = 0

दिये गये मूलों से द्विघात समीकरण प्राप्त करना :

(i) मूलों का योग ज्ञात कीजिए।

(ii) मूलों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(iii) क्रम (i) एवं (ii) के मानों को

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

में प्रतिस्थापित करने पर अभीष्ट द्विघात समीकरण प्राप्त होती है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.16 नीचे दी गई प्रत्येक द्विघात समीकरणों के लिए मूलों का योग तथा मूलों का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $x^2 + 3x - 6 = 0$

(ii) $2x^2 + 5\sqrt{3}\,x + 6 = 0$

(iii) $3x^2 + 2\sqrt{5}\,x - 5 = 0$

Sol. (i) $x^2 + 3x - 6 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 1, b = 3$ तथा $c = -6$ प्राप्त होता है

$\therefore$ मूलों का योग $= -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \dfrac{c}{a} = \dfrac{-6}{1} = -6$

(ii) $2x^2 + 5\sqrt{3}\,x + 6 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 2$, $b = 5\sqrt{3}$ तथा $c = 6$ प्राप्त होता है।

$\therefore$ मूलों का योग $= -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \dfrac{c}{a} = \dfrac{6}{2} = 3$

(iii) $3x^2 + 2\sqrt{5}\,x - 5 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 3, b = 2\sqrt{5}$ तथा $c = -5$ प्राप्त होता है।

$\therefore$ मूलों का योग $= -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \dfrac{c}{a} = \dfrac{-5}{3}$

Ex.17 नीचे दिये गये मूलों की सहायता से द्विघात समीकरण का निर्माण कीजिए -

(i) 3, – 3

(ii) $3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}$

(iii) $\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2-\sqrt{5}}{2}$

Sol. (i) चूँकि, मूलों का योग

$= (3) + (-3) = 3 - 3 = 0$

तथा मूलों का गुणनफल

$= (3)(-3) = -9$

$\therefore$ अभीष्ट द्विघात समीकरण :

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

$\Rightarrow x^2 - (0)x + (-9) = 0$, अर्थात, $x^2 - 9 = 0$

(ii) चूँकि, मूलों का योग

$= 3 + \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} = 6$

तथा मूलों का गुणनफल

$= (3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6$

$\therefore$ अभीष्ट द्विघात समीकरण :

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

(iii) चूँकि, मूलों का योग

$$=\frac{2+\sqrt{5}}{2}+\frac{2-\sqrt{5}}{2}=\frac{2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

तथा, मूलों का गुणनफल

$$=\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{4-5}{4}-\frac{1}{4}$$

$\therefore$ अभीष्ट द्विघात समीकरण :

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$\Rightarrow x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$, अर्थात्, $4x^2 - 8x - 1 = 0$

Ex.18 यदि a एवं c इस प्रकार हैं कि द्विघात समीकरण $ax^2 - 5x + 3 = 0$ के मूलों का योग 10 है तथा मूलों का गुणनफल भी 10 है, तो a एवं c ज्ञात कीजिए।

Sol. $ax^2 - 5x + c = 0$ के लिए

मूलों का योग $= -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$$= -\frac{-5}{a} = \frac{5}{a}$$

तथा मूलों का गुणनफल

$$= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a}$$

दिया है : मूलों का योग = 10

$\Rightarrow \frac{5}{a} = 10$, अर्थात्, $10a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

मूलों का गुणनफल = 10

$\Rightarrow \frac{c}{a} = 10 \Rightarrow c = 10a = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$ तथा $c = 5$

Ex.19 यदि द्विघात समीकरण $2x^2 + px + 4 = 0$ का एक मूल 2 है, तो p का मान ज्ञात कीजिए तथा अन्य मूलों का मान भी ज्ञात कीजिए।

Sol. यदि 2 एक मूल है, तो x = 2 समीकरण $2x^2 + px + 4 = 0$ को संतुष्ट करेगा।

$\Rightarrow 2(2)^2 + p(2) + 4 = 0$

$\Rightarrow 8 + 2p + 4 = 0$

अर्थात्, $2p = -12$ तथा $p = -6$

समीकरण $2x^2 + px + 4 = 0$ में $p = -6$ रखने पर

$2x^2 - 6x + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

[प्रत्येक पद को 2 से भाग देने पर]

$\Rightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 0$

$\Rightarrow x(x-2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0$ या $x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 2$ या $x = 1$

$\therefore$ अन्य (दूसरा) मूल 1 हैं।

Ex.20 निम्न में p का मान ज्ञात कीजिए जबकि दी गई समीकरणे समान मूल रखती है

(i) $3x^2 - 5x + p = 0$ (ii) $2px^2 - 8x + p = 0$

Sol. (i) $3x^2 - 5x + p = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 3, b = -5$ तथा $c = p$ प्राप्त होता है।

चूँकि मूल समान हैं, तो विविक्तिकर $b^2 - 4ac = 0$

अर्थात्, $(-5)^2 - 4 \times 3 \times p = 0$

$\Rightarrow$ $25 - 12p = 0$ तथा $p = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$

(ii) $2px^2 - 8x + p = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 2p, b = -8$ तथा $c = p$

$b^2 - 4ac = 0$ [दिया है, मूल समान हैं]

$\Rightarrow$ $(-8)^2 - 4 \times 2p \times p = 0$

$\Rightarrow$ $64 - 8p^2 = 0$

$\Rightarrow$ $-8p^2 = -64, p^2 = 8$ तथा $p = \pm\sqrt{8}$

अर्थात्, $p = \pm 2\sqrt{2}$

Ex.21 यदि α एवं β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$

(iii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

Sol.. हम जानते हैं कि मूलों का योग $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a}$

तथा, मूलों का गुणनफल $(\alpha\,\beta) = \frac{c}{a}$ इसलिए :

(i) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$

$\Rightarrow$ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

(ii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2} - \frac{c}{a}\right)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b^2 - 2ac - ac}{a^2}\right) = -\frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3}$$

(iii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$

$$= \frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a}{c} = \frac{b^2 - 2ac}{ca}$$

मूलों तथा गुणांकों में सम्बन्ध :

यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ के मूल α एवं β हैं, तब :

(i) $(\alpha - \beta) = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$$= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{\pm\sqrt{D}}{a}$$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

(iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$$= -\frac{b\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^2} = \frac{\pm\sqrt{D}}{a}$$

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$.

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$$= -\frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3}$$

(v) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$.

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

$$= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}\ \{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\}$$

$$= \frac{(b^2 - ac)\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^3}$$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$$= \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\frac{c^2}{a^2}$$

(vii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)$

$$= \frac{-b(b^2 - 2ac)\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^4}$$

(viii) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta$

(ix) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

(x) $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta)$

(xi) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$

$$= \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$$

➤ द्विघात समीकरणों की रूपांतरित समीकरणें

प्रकार 1 : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ रूप की समीकरणें

विधि : $x^2 = y$ प्रतिस्थापित कर हल करने पर

❖ उदाहरण ❖

Ex.22 निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

(ii) $z^4 - 10z^2 + 9 = 0$

Sol. (i) $x^2 = y$ प्रतिस्थापित करने पर

$x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 26y + 25 = 0$

अर्थात्, $y^2 - 25y - y + 25 = 0$

$\Rightarrow y(y - 25) - 1(y - 25) = 0$

अर्थात्, $(y - 25)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y - 25 = 0$ or $y - 1 = 0$

अर्थात्, $y = 25$ या $y = 1$

$y = 25 \Rightarrow x^2 = 25$ | $y = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm 5$ | $\Rightarrow x = \pm 1$

$\therefore$ दी गई समीकरण के मूल : $\pm 5, \pm 1$

(ii) $z^2 = x$ प्रतिस्थापित करने पर

$z^4 - 10z^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$

अर्थात्, $x^2 - 9x - x + 9 = 0$

$\Rightarrow x(x - 9) - 1(x - 9) = 0$

अर्थात्, $(x - 9)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x - 9 = 0$ या $x - 1 = 0$

$x = 9 \Rightarrow z^2 = 9$ | $x = 1 \Rightarrow z^2 = 1$

$\Rightarrow z = \pm 3$ | $\Rightarrow z = \pm 1$

$\therefore$ दी गई समीकरण का हल : $\pm 3, \pm 1$.

प्रकार 2 : $px + \frac{q}{x} = r$ रूप की समीकरण

विधि : (i) प्रत्येक पद को x से गुणा कीजिए

(ii) x के अशून्य मान प्राप्त करने के लिए द्विघात समीकरण को हल कीजिए।

Ex.23 हल कीजिए :

(i) $x + \frac{5}{x} = 6$ (ii) $3y + \frac{5}{16y} = 2$

Sol. (i) $x + \frac{5}{x} = 6$

$\Rightarrow x^2 + 5 = 6x$ [प्रत्येक पद को x से गुणा करने पर]

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - x + 5 = 0$

अर्थात्, $x(x - 5) - 1(x - 5) = 0$

$\Rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0$ अर्थात्, $x - 5 = 0$

या $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 5$ या $x = 1$.

$\therefore$ अभीष्ट हल 5, 1 है

(ii) $3y + \frac{5}{16y} = 2$

$\Rightarrow 3y \times 16y + 5 = 2 \times 16y$

$\Rightarrow 48y^2 - 32y + 5 = 0$

$\Rightarrow 48y^2 - 12y - 20y + 5 = 0$

अर्थात्, $12y(4y - 1) - 5(4y - 1) = 0$

$\Rightarrow (4y - 1)(12y - 5) = 0$

अर्थात्, $4y - 1 = 0$ या $12y - 5 = 0$

$\Rightarrow 4y = 1$ या $12y = 5$ अथार्त, $y = \frac{1}{4}$ या $y = \frac{5}{12}$

$\therefore$ अभीष्ट हल : $\frac{1}{4}, \frac{5}{12}$

प्रकार 3 :

एक करणी वाली समीकरणें :

$$\sqrt{a - x^2} = bx + c$$

विधि :

1. दोनों तरफ वर्ग करें : $a - x^2 = (bx + c)^2$
2. द्विघात समीकरण प्राप्त करने के लिए इसे सरल कीजिए
3. प्राप्त द्विघात समीकरण को हल कीजिए।

Ex.24 हल कीजिए :

(i) $\sqrt{x} + 2x = 1$ (ii) $\sqrt{3x^2 - 2} + 1 = 2x$

(iii) $\sqrt{2x^2 + 9} + x = 13$

Sol. (i) $\sqrt{x} + 2x = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - 2x$

अर्थात्, $x = (1 - 2x)^2$

$\Rightarrow x = 1 + 4x^2 - 4x$

अर्थात्, $1 + 4x^2 - 4x - x = 0$

$\Rightarrow$ $4x^2 - 5x + 1 = 0$ अर्थात्, $4x^2 - 4x - x + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $4x (x - 1) - 1 (x - 1) = 0$

अर्थात्, $(x - 1) (4x - 1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$

या $4x - 1 = 0$

अर्थात्, $x = 1$ या $x = \frac{1}{4}$

➢ द्विघात समीकरणों पर आधारित प्रश्न

द्विघात समीकरणों पर आधारित प्रश्नों को हल करने के लिए निम्न पदों का प्रयोग कीजिए :

1. अभीष्ट अज्ञात राशि को ज्ञात करने के लिए प्रश्न में दिये गये कथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए।
2. अज्ञात राशि 'x' लिजिए तथा दिये गये कथन के अनुसार 'x' के पदों में समीकरण बनाइये।
3. सरल कीजिए तथा 'x' का मान/मानों को ज्ञात करने के लिए समीकरण को हल कीजिए।

❖ उदाहरण ❖

Ex.25 दो क्रमागत प्राकृत संख्यायें ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल 20 है

Sol. माना दो क्रमागत प्राकृत संख्यायें x एवं x + 1 हैं

दिया है : $x (x + 1) = 20 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0$

$\Rightarrow$ $(x + 5) (x - 4) = 0 \Rightarrow x = -5$, या $x = 4$

चूँकि, x प्राकृत संख्या है

$\therefore$ $x = 4$

अतः अभीष्ट संख्यायें x तथा x + 1 अर्थात्, 4 तथा 5 है

Ex.26 दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं के वर्गों का योग 61 है, तो संख्यायें ज्ञात कीजिए

Sol. माना अभीष्ट क्रमागत पूर्ण संख्यायें x तथा x + 1 हैं

$\therefore$ $x^2 + (x + 1)^2 = 61$

$\Rightarrow$ $x^2 + x^2 + 2x + 1 - 61 = 0$

$\Rightarrow$ $2x^2 + 2x - 60 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 + x - 30 = 0$ [प्रत्येक पद को 2 से भाग देने पर]

$\Rightarrow$ $(x + 6) (x - 5) = 0$ [गुणनखण्ड करने पर]

$\Rightarrow$ $x = -6$, या $x = 5$

$\because$ x एक पूर्ण संख्या है, $\therefore$ $x = 5$

तथा अभीष्ट संख्यायें x तथा x + 1 = 5 तथा 5 + 1 अर्थात्, 5 तथा 6

Ex.27 दो प्राकृत संख्याओं का योग 8 है। यदि उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{8}{15}$ है, तो दो संख्यायें ज्ञात कीजिए।

Sol. माना संख्यायें x तथा 8 – x हैं

$\therefore$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{8-x} = \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{8-x+x}{x(8-x)} = \frac{8}{15}$

$\Rightarrow$ $\frac{8}{8x - x^2} = \frac{8}{15}$ अर्थात, $120 = 64x - 8x^2$

$\Rightarrow$ $8x^2 - 64x + 120 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 8x + 15 = 0$ [8 से भाग देने पर]

$\Rightarrow$ $(x - 5) (x - 3) = 0$ [गुणनखण्ड करने पर]

$\Rightarrow$ $x = 5$, या $x = 3$

जब x = 5, है, तो संख्यायें x एवं 8 – x = 5 तथा 3, तथा जब x = 3 है, तो संख्यायें x एवं 8 – x = 3 तथा 5 है।

$\therefore$ अभीष्ट संख्यायें 5 एवं 3 हैं।

Ex.28 16 को ऐसे दो भागों में विभाजित कीजिए कि बड़े भाग के वर्ग का दुगुना छोटे भाग के वर्ग से 164 अधिक हो।

Sol. माना बड़ा भाग x है, इसलिए छोटा भाग = 16 – x

दिया है : $2x^2 - (16 - x)^2 = 164$

$\Rightarrow$ $2x^2 - (256 + x^2 - 32x) - 164 = 0$

अर्थात्, $2x^2 - 256 - x^2 + 32x - 164 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 + 32x - 420 = 0$

गुणनखण्ड करने पर : $(x + 42) (x - 10) = 0$

अर्थात्, $x = -42$ या $x = 10$

$\therefore$ $x = 10$

अतः बड़ा भाग = 10 तथा छोटा भाग = 16 – x

= 16 – 10 = 6

Ex.29 दो धनात्मक संख्यायें 2 : 5 के अनुपात में हैं। यदि इन संख्याओं के वर्गों के मध्य अंतर 189 है, तो संख्यायें ज्ञात कीजिए।

Sol. माना संख्यायें 2x तथा 5x है

$\therefore$ $(5x)^2 - (2x)^2 = 189$

$\Rightarrow$ $25x^2 - 4x^2 = 189$ तथा $21x^2 = 189$

अर्थात्, $x^2 = \frac{189}{21} = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

चूँकि, अभीष्ट संख्यायें धनात्मक हैं

$\therefore$ $x = 3$

तथा अभीष्ट संख्यायें = 2x तथा 5x = 2 × 3 तथा 5 × 3 = 6 एवं 15

Ex.30 एक दो अंकीय संख्या इस प्रकार है कि इसके अंकों का गुणनफल 35 है। जब इस संख्या में 18 जोड़ा जाता है, तो अंकों के स्थान परस्पर बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

Sol. माना संख्याओं का दहाई अंक = x तथा इसका इकाई अंक = y है

$\therefore$ दो अंकीय संख्या 10x + y

दिया हैं : x . y = 35 तथा 10x + y + 18 = 10y + x

$\Rightarrow y = \frac{35}{x}$ तथा 9x + 18 = 9y अर्थात्, x + 2 = y

x + 2 = y में $y = \frac{35}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर :

$x + 2 = \frac{35}{x} \Rightarrow x^2 + 2x = 35$

तथा $x^2 + 2x - 35 = 0$

गुणनखण्ड़ करने पर : (x + 7)(x – 5) = 0

अर्थात्, x = – 7 या x = 5

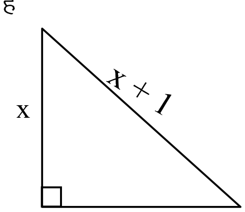
चूँकि, x अंक है इसलिए x = 5 तथा

$y = \frac{35}{x} = 7$

$\therefore$ अभीष्ट दो अंकीय संख्या = 10x + y
= 10 × 5 + 7 = 57

Ex.31 एक समकोण त्रिभुज की भुजायें (सेमी. में) x – 1, x तथा x + 1 है, तो त्रिभुज की भुजायें ज्ञात कीजिए।

Sol. यह स्पष्ट है कि महत्तम भुजा x + 1 समकोण त्रिभुज का कर्ण है



पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार :

$x^2 + (x - 1)^2 = (x + 1)^2$

$\Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$

$\Rightarrow x^2 - 4x = 0$

$\Rightarrow x(x - 4) = 0$ अर्थात्, x = 0 या x = 4

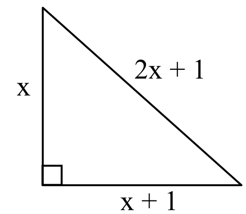
चूँकि, x = 0 से त्रिभुज संभव नहीं हैं अतः x = 4.

$\therefore$ भुजायें x – 1, x तथा x + 1 = 4 – 1

अर्थात्, 3 सेमी., 4 सेमी. तथा 5 सेमी.

Ex.32 एक समकोण त्रिभुज का कर्ण छोटी भुजा के दुगुने से 1 मी. कम हैं। यदि तीसरी भुजा छोटी भुजा से 1 मी. अधिक है, तो त्रिभुज की भुजायें ज्ञात कीजिए।

Sol. माना सबसे छोटी भुजा x मी. है



$\therefore$ कर्ण = (2x – 1) मी.

तथा तीसरी भुजा = (x + 1) मी.

पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर ;

$(2x - 1)^2 = x^2 + (x + 1)^2$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x^2 + x^2 + 2x + 1$

अर्थात्, $2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$

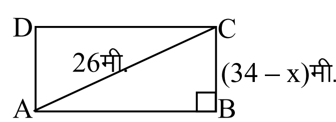
अर्थात्, $x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ या x = 3

चूँकि, x = 0 से त्रिभुज असंभव है इसलिए, x = 3

तथा त्रिभुज की भुजाएँ = x, 2x – 1 तथा x + 1 = 3, 2 × 3 –1 तथा 3 + 1 = 3मी., 5मी. तथा 4मी.

Ex.33 यदि आयताकार प्लॉट का परिमाप 68 मी. है तथा इसका विकर्ण 26 मी. है तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Sol. माना प्लॉट की लम्बाई = x मी.



$\because$ 2(लम्बाई + चौड़ाई) = परिमाप

$\Rightarrow$ 2(x + चौड़ाई) = 68

$\Rightarrow$ x + चौड़ाई = $\frac{68}{2}$ तथा चौड़ाई = (34 – x) मी.

दिया है कि इसका विकर्ण = 26 मी. तथा हम जानते हैं कि आयत का प्रत्येक कोण = 90º.

$\therefore x^2 + (34 - x)^2 = 26^2$

[पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर]

$\Rightarrow$ $x^2 + 1156 - 68x + x^2 - 676 = 0$

$\Rightarrow$ $2x^2 - 68x + 480 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 34x + 240 = 0$

अर्थात्, $x^2 - 34x + 240 = 0$

गुणनखण्ड करने पर : $(x - 24)(x - 10) = 0$

अर्थात्, $x = 24$ या $x = 10$

$x = 24$

$\Rightarrow$ लम्बाई = 24 मी.

तथा चौड़ाई = (34 – 24) मी. = 10 मी.

तथा, $x = 10$

$\Rightarrow$ लम्बाई = 10 मी.

तथा चौड़ाई = (34 – 10) मी. = 24 मी.

$\therefore$ दिये गये आयताकार प्लॉट की विमायें 24 मी. तथा 10 मी. होगी।

अतः इसका क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 24 मी. × 10 मी. = 240 मी.^{2}

Ex.34 एक ट्रेन 300 किमी. की दूरी एकसमान चाल से तय करती है। यदि ट्रेन की चाल 5 किमी./घंटा बढ़ा दी जाए तो यात्रा में दो घण्टे कम लगते हैं, तो ट्रेन की वास्तविक चाल ज्ञात कीजिए।

Sol. माना ट्रेन की वास्तविक चाल x किमी./घंटा है।

प्रथम स्थिति में, दूरी = 300 किमी.

तथा चाल = x किमी./घंटा

$\Rightarrow$ लिया गया समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{300}{x}$ घंटे

दूसरी स्थिति में, दूरी = 300 किमी.

तथा चाल = (x +5) किमी./घंटा

$\therefore$ लिया गया समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{300}{x+5}$ घंटे

दिया है : $\frac{300}{x} - \frac{300}{x+5} = 2$

$\Rightarrow$ $\frac{300(x+5) - 300x}{x(x+5)} = 2$

अर्थात्, $\frac{300x + 1500 - 300x}{x^2 + 5x} = 2$

$\Rightarrow$ $2(x^2 + 5x) = 1500$

$\Rightarrow$ $x^2 + 5x - 750 = 0$

गुणनखण्ड करने पर, $(x + 30)(x - 25) = 0$

अर्थात्, $x = -30$ या $x = 25$

$x = -30$ को नगण्य मानने पर, $x = 25$

अर्थात्, x = 25 किमी. प्रति घण्टा

Ex.35 एक नाव की शांत (still) जल में चाल 15 किमी./घंटा है यह 30 किमी. धारा के विपरीत ओर जाता है तथा पुनः कुल 4 घण्टे 30 मिनट में वापस आता हैं। धारा का वेग ज्ञात कीजिए।

Sol. माना धारा का वेग = x कि.मी./घण्टा

$\Rightarrow$ धारा के विपरीत दिशा में नाव का वेग

= (15 + x) कि.मी./घण्टा

तथा धारा की दिशा में नाव का वेग

= (15 – x) कि.मी./घण्टा

अब धारा के विपरीत दिशा में 30 कि.मी. जाने में लिया गया समय = $\frac{30}{15+x}$ घण्टे

तथा धारा की दिशा में 30 कि.मी. वापस आने में लिया गया समय = $\frac{30}{15-x}$ घण्टे

दिया है : दोनों यात्राओं में लिया गया समय

= 4 घण्टे 30 मिनट = $4\frac{1}{2}$ घण्टे = $\frac{9}{2}$ घण्टे

$\therefore$ $\frac{30}{15+x} + \frac{30}{15-x} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{30(15-x) + 30(15+x)}{(15+x)(15-x)} = \frac{9}{2}$

अर्थात्, $\frac{450 - 30x + 450 + 30x}{225 - x^2} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow$ $2 \times 900 = 9(225 - x^2)$

दोनों तरफ 9 से भाग देने पर :

$2 \times 100 = 225 - x^2$

अर्थात्, $x^2 = 225 - 200 \Rightarrow x^2 = 25$ तथा $x = \pm 5$

x के ऋणात्मक मान को छोड़ने पर,

x = 5 प्राप्त होता है।

अर्थात्, धारा का वेग = 5 कि.मी./घण्टा

Ex.36 एक होटल में रात को ठहरने वाले व्यक्तियों का बिल ₹ 4, 800 है। यदि वहाँ 4 व्यक्ति और बढ़ जाते है तो प्रत्येक व्यक्ति को ₹ 200 कम देने पड़ते है, तो रात में ठहरने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

Sol. माना रात को ठहरने वाले व्यक्तियों की संख्या x हैं।

$\therefore$ x व्यक्तियों के लिए होटल का बिल = ₹ 4,800

$\Rightarrow$ 1 व्यक्ति के लिए होटल का बिल = ₹ $\frac{4,800}{x}$

जब 4 लोग अधिक हैं

(x + 4) व्यक्तियों के लिए होटल का बिल = ₹ 4,800

$\Rightarrow$ 1 व्यक्ति के लिए होटल का बिल = ₹ $\frac{4,800}{x+4}$

यह दिया है कि प्रत्येक व्यक्ति को ₹ 200 कम देने पड़ते हैं।

$$\therefore \quad \frac{4,800}{x} - \frac{4,800}{x+4} = 200$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4,800(x+4) - 4,800x}{x(x+4)} = 200$$

अर्थात्, $200(x^2 + 4x) = 4800x + 19200 - 4800x$

$\Rightarrow x^2 + 4x = \frac{19200}{200} = 96$

अर्थात्, $x^2 + 4x - 96 = 0$

गुणनखण्ड करने पर $(x + 12)(x - 8) = 0$

अर्थात्, $x = -12$ या $x = 8$

$\because$ व्यक्तियों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती।

$\Rightarrow$ रात्रि में ठहरने वाले व्यक्तियों की संख्या = 8

Ex.37 एक सभागार में पक्तियों की संख्या प्रत्येक पंक्ति की सीटों की संख्या के बराबर हैं। यदि मूलों की संख्या को दुगुना कर दिया जाये तथा प्रत्येक पंक्ति की सीटों की संख्या में 5 की कमी कर दी जाये तो सीटों की कुल संख्या में 375 की बढ़ोतरी हो जाती हैं। बताइए कि वहाँ कितनी पंक्तियाँ थी ?

Sol. माना पंक्तियों की संख्या x है

$\Rightarrow$ प्रत्येक पंक्ति में सीटों की संख्या = x

$\therefore$ सभागार में सीटों की कुल संख्या = $x \times x = x^2$

अब पंक्तियों की नई संख्या = 2x तथा प्रत्येक पंक्ति में सीटों की नई संख्या = x – 5

$\therefore$ सभागार में कुल सीटों की नई संख्या = 2x(x – 5)

दिया है : $2x(x - 5) - x^2 = 375$

$\Rightarrow 2x^2 - 10x - x^2 = 375$ तथा $x^2 - 10x - 375 = 0$

अर्थात् : $(x - 25)(x + 15) = 0$

अर्थात्, x = 25 या x = – 15

x = – 15 को छोड़ने पर पंक्तियों की संख्या = 25

Ex.38 दो वर्ष पहले एक व्यक्ति की आयु उसके पुत्र की आयु के वर्ग की तिगुनी थी। तीन वर्षो में उसकी आयु उसके पुत्र की आयु की चार गुनी है, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

Sol. माना पुत्र की वर्तमान आयु = x वर्ष

दो वर्ष पूर्व : पुत्र की आयु (x – 2) वर्ष तथा व्यक्ति की आयु $3(x - 2)^2$ थी

$\therefore$ व्यक्ति की वर्तमान आयु = $3(x - 2)^2 + 2$

$= 3(x^2 - 4x + 4) + 2 = 3x^2 - 12x + 14$

3 वर्षो में पुत्र की आयु (x + 3) वर्ष होगी तथा व्यक्ति की आयु $(3x^2 - 12x + 14) + 3$

$= 3x^2 - 12x + 17$ वर्ष

दिया है : $3x^2 - 12x + 17 = 4(x + 3)$

$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 17 = 4x + 12$

अर्थात्, $3x^2 - 16x + 5 = 0$

गुणनखण्ड करने पर : $(x - 5)(3x - 1) = 0$

अर्थात्, x = 5 या $x = \frac{1}{3}$

चूँकि, $x = \frac{1}{3}$ संभव नहीं है ; x = 5

$\therefore$ व्यक्ति की वर्तमान आयु

$= 3x^2 - 12x + 14$

$= 3 \times 5^2 - 12 \times 5 + 14 = 29$ वर्ष

तथा पुत्र की वर्तमान आयु = x = 5 वर्ष

Ex.39 समीकरण $x^2 - 2x - 8 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

Sol. द्विघात समीकरण $x^2 - 2x - 8 = 0$

गुणनखण्ड करने पर $(x - 4)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 4, -2$

Ex.40 समीकरण $x^2 - 4x + 1 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ a = 1, b = 4, c = 1

हिन्दु विधि का प्रयोग करने पर

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Ex.41 द्विघात समीकरण $7x^2 - 9x + 2 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Sol. $b^2 - 4ac = 81 - 56 = 25 > 0$ तथा पूर्ण वर्ग है इसलिए मूल परिमेय तथा भिन्न हैं।

Ex.42 द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 4 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Sol. $b^2 - 4ac = 49 - 32 = 17 > 0$ (पूर्ण वर्ग नहीं है)
इसके मूल अपरिमेय तथा भिन्न हैं

Ex.43 द्विघात समीकरण $x^2 - 2(a + b)x + 2(a^2 + b^2) = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Sol. $A = 1, B = -2(a + b), C = 2(a^2 + b^2)$
$B^2 - 4AC = 1[2(a + b)]^2 - 4(1)(2a^2 + 2b^2)$
$= 4a^2 + 4b^2 + 8ab - 8a^2 - 8b^2$
$= -4a^2 - 4b^2 + 8ab$
$= -4(a-b)^2 < 0$
अतः मूल काल्पनिक तथा भिन्न हैं

Ex.44 समीकरण $x^2 - 2\sqrt{2}\, x + 1 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Sol. समीकरण का विविक्तकर
$(-2\sqrt{2})^2 - 4(1)(1) = 8 - 4 = 4 > 0$ तथा पूर्ण वर्ग है इसलिए मूल वास्तविक तथा भिन्न हैं परन्तु इससे हम यह नहीं कह सकते हैं कि मूल परिमेय हैं क्योंकि गुणांक परिमेय नहीं हैं, इसलिए

$$\alpha, \beta = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pm 2}{2} = \sqrt{2} \pm 1$$

यह अपरिमेय है।
$\therefore$ मूल वास्तविक तथा भिन्न हैं।

Ex.45 समीकरण $(b + c)x^2 - (a + b + c)x + a = 0$, $(a,b,c \in Q)$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए ?

Sol. समीकरण का विविक्तकर हैं
$(a + b + c)^2 - 4(b + c)(a)$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 4(b+c)a$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 4ab - 4ac$
$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$
$(a - b - c)^2 > 0$
इसलिए मूल परिमेय तथा भिन्न हैं।

Ex.46 यदि समीकरण $x^2 + 2x + P = 0$ के मूल वास्तविक हैं, तो P का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ $a = 1, b = 2, c = P$
$\therefore$ विविक्तकर $= (2)^2 - 4(1)(P)\ 0$
(चूँकि मूल वास्तविक हैं)
$\Rightarrow 4 - 4P \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 4P$
$\Rightarrow P \leq 1$

Ex.47 यदि द्विघात समीकरण $mx^2 - 2x + (2m-1) = 0$ के मूलों का गुणनफल 3 है, तो m का मान ज्ञात कीजिए -

Sol. मूलों का गुणनफल $c/a = 3 = \frac{2m - 1}{m}$
$\therefore\ 3m - 2m = -1 \Rightarrow m = -1$

Ex.48 यदि α तथा β समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ के मूल हैं, तो $\alpha^3 + \beta^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
अब $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
$= (5)^3 - 3.6(5) \quad = 125 - 90 = 35$

Ex.49 यदि समीकरण $(k - 2)x^2 - (k - 4)x - 2 = 0$ के मूलों का अन्तर 3 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. $(\alpha - \beta) = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

अब $\alpha + \beta = \frac{(k-4)}{(k-2)}, \alpha\beta = \frac{-2}{k-2}$

$$\therefore\ (\alpha - \beta) = \sqrt{\left(\frac{k-4}{k-2}\right)^2 + \frac{8}{(k-2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{k^2 + 16 - 8k + 8(k-2)}}{(k-2)}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{k^2 + 16 - 8k + 8k - 16}}{(k-2)}$$

$\Rightarrow 3k - 6 = \pm k$
$\therefore\ k = 3, 3/2$

Ex.50 यदि α, β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो $\frac{1}{(a\alpha + b)^2} + \frac{1}{(a\beta + b)^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. चूँकि α, β समीकरण $ax^2 + bx + c$ के मूल हैं, तब $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$\Rightarrow \alpha(a\alpha+b) + c = 0$

$\Rightarrow (a\alpha+b) = -c/\alpha$ ...(1)

इसी तरह

$(a\beta+b) = -c/\beta$ ...(2)

$$\therefore \frac{1}{(a\alpha+b)^2} + \frac{1}{(a\beta+b)^2} = \frac{1}{(-c/\alpha)^2} + \frac{1}{(-c/\beta)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{c^2}$$

$$= \frac{b^2/a^2 - 2c/a}{c^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$$

Ex.51 वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल 3 तथा 4 हैं

Sol. द्विघात समीकरण

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

$\therefore$ अभीष्ट समीकरण

$= x^2 - (3 + 4)x + 3.4 = 0$

$= x^2 - 7x + 12 = 0$

Ex.52 परिमेय गुणांकों वाली द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका एक मूल $2 + \sqrt{3}$ है

Sol. अभीष्ट समीकरण

$x^2 - \{(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})\}x$

$+ (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 0$

या $x^2 - 4x + 1 = 0$

Ex.53 यदि α, β द्विघात समीकरण $x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूल है, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $(\alpha^2 - 3\alpha + 7)$ तथा $(\beta^2 - 3\beta + 7)$ हैं।

Sol. चूँकि α, β समीकरण $x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूल हैं

इसलिए $\alpha^2 - 3\alpha + 5 = 0$ एवं $\beta^2 - 3\beta + 5 = 0$

$\therefore \alpha^2 - 3\alpha = -5$ एवं $\beta^2 - 3\beta = -5$

उपरोक्त मान $(\alpha^2 - 3\alpha + 7)$ तथा $(\beta^2 - 3\beta + 7)$ में रखने पर

$-5 + 7, -5 + 7$

2 तथा 2 अभीष्ट समीकरण $x^2 - 4x + 4 = 0$ के मूल है

Ex.54 यदि α,β समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha + 3$ तथा $\beta + 3$ हैं -

Sol. माना $\alpha + 3 = x$

$\therefore \alpha = x - 3$ (x के स्थान पर x – 3 प्रतिस्थापित करने पर)

अभीष्ट समीकरण

$(x-3)^2 - 5(x-3) + 6 = 0$ ...(1)

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 5x + 15 + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 11x + 30 = 0$ ...(2)

Ex.55 यदि α, β समीकरण $2x^2 + x - 1 = 0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $1/\alpha$, $1/\beta$ होंगे -

Sol. दी गई समीकरण से

$\alpha + \beta = -1/2$, $\alpha\beta = -1/2$

अभीष्ट समीकरण -

$$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right)x + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 0$$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

लघुविधि : x की जगह 1/x रखने पर

$\Rightarrow 2(1/x)^2 + 1/x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

❖ कुछ अन्य उदाहरण ❖

Ex.56 यदि r और s धनात्मक है, तो समीकरण $x^2 - rx - s = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ विविक्तकर

$= r^2 + 4s > 0$ $(\because r, s > 0)$

$\Rightarrow$ मूल वास्तविक है

पुनः $a = 1 > 0$ तथा $c = -s < 0$

$\Rightarrow$ मूल विपरित चिन्ह के हैं।

Ex.57 समीकरण $(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b) = 0$ के दोनों मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Sol. दी गई समीकरण निम्न रूप में लिखी जा सकती है

$3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$

यहाँ विविक्तकर

$= 4(a + b + c)^2 - 12\ (ab + bc + ca)$

$= 4[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)] > 0$

$[\ a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca]$

$\therefore$ दोनों मूल वास्तविक हैं।

Ex.58 यदि समीकरण $4x^2 + 2x - 1 = 0$ का एक मूल α, है, तो अन्य मूल ज्ञात कीजिए।

Sol. माना α एवं β दी गई समीकरण के मूल हैं, तब

$\alpha + \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} - \alpha$

अब $4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$

$4\alpha^2 = 1 - 2\alpha$ ...(1)

अब $4\alpha^3 = \alpha - 2\alpha^2$

$= \alpha - \frac{1}{2}(1 - 2\alpha)$ [(1) से]

$\therefore\ 4\alpha^3 - 3\alpha = -\ 2\alpha - \frac{1}{2}(1 - 2\alpha)$

$= -\frac{1}{2} - \alpha = \beta$

Ex.59 वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका एक मूल $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ हैं -

Sol. दिया गया मूल $= \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$

अन्य मूल $= -\sqrt{5} - 2$ तब मूलों का योग $= -4$, मूलों का गुणनफल $= -1$

अतः समीकरण $x^2 + 4x - 1 = 0$