वृत्त

सूची

- परिभाषा
- वृत्त की स्पर्श रेखाओं की संख्या
- स्पर्श रेखा की लम्बाई
- स्पर्श रेखाओं पर आधारित परिणाम

➤ परिभाषा

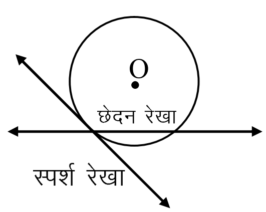
◈ **छेदन रेखा:**

एक रेखा जो वृत्त को दो विभिन्न बिन्दुओं पर काटती है, छेदन रेखा कहलाती है।

◈ **स्पर्श रेखा :**

वह रेखा जो वृत्त को केवल एक ही बिन्दु पर मिलती है, बिन्दु पर वृत्त की स्पर्श रेखा कहलाती है।

वह बिन्दु, जहाँ पर स्पर्श रेखा वृत्त को मिलती है, स्पर्श बिन्दु कहलाता है।



➤ वृत्त की स्पर्श रेखाओं की संख्या

(i) वृत्त के अन्तर्गत बिन्दु से कोई स्पर्श रेखा नहीं गुजरती है।

(ii) वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से एक और केवल एक ही स्पर्श रेखा गुजरती है ।

(iii) वृत्त के बाहर स्थित एक बिन्दु से ठीक दो स्पर्श रेखाऐं गुजरती है।

➤ स्पर्श रेखा की लम्बाई

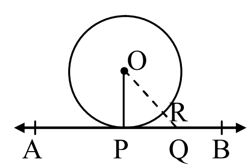
एक दिये गये बिन्दु तथा दिये गये वृत्त के स्पर्श बिन्दु के मध्य स्पर्श रेखा की रेखाखण्ड की लम्बाई, बिन्दु से वृत्त की स्पर्श रेखा की लम्बाई कहलाती है ।

➤ स्पर्श रेखाओं पर आधारित परिणाम

प्रमेय 1 :

वृत्त के किसी भी बिन्दु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या के लम्बवत् होती है।

दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा AB है।



सिद्ध करना है : $OP \perp AB$.

रचना: AB पर P के अतिरिक्त एक बिन्दु Q लेते हैं। OQ को मिलाते हैं ।

उपपत्ति: स्पर्श बिन्दु P के अतिरिक्त, स्पर्श रेखा AB पर Q एक बिन्दु है।

$\therefore$ Q वृत्त के बाहर स्थित है।

माना OQ वृत्त को R पर काटता है ।

तब, $OR < OQ$ [एक भाग संपूर्ण से कम होता है] ....(i)

लेकिन, $OP = OR$ [एक ही वृत्त की त्रिज्याऐं] ...... (ii)

$\therefore$ $OP < OQ$ [(i) तथा (ii) से]

अतः, P के अतिरिक्त, AB के किसी बिन्दु को O से जोड़ने वाले रेखाखण्ड से OP छोटा है।

अन्य शब्दों में, बिन्दु O तथा रेखा AB के मध्य न्यूनतम दूरी OP है।

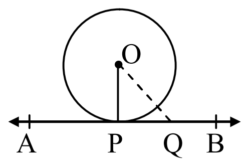
किन्तु, एक बिन्दु तथा रेखा के मध्य न्यूनतम दूरी लम्बवत् दूरी होती है

$\therefore$ $OP \perp AB$

प्रमेय 2 : (प्रमेय-1 का विलोम)

त्रिज्या के सिरे से गुजरने वाली तथा इसके लम्बवत् खींची गई रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, जिसमें OP त्रिज्या है तथा एक रेखा AB, P से इस प्रकार गुजरती है कि $OP \perp AB$



सिद्ध करना है : वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा AB है।

रचना: AB पर P से भिन्न एक बिन्दु Q लेते हैं। OQ को जोड़ते हैं।

उपपत्ति : हम जानते है कि किसी बिन्दु की एक रेखा से लम्बवत् दूरी उनके मध्य न्यूनतम दूरी होती है ।

$\therefore$ $OP \perp AB \Rightarrow$ O से AB की न्यूनतम दूरी OP है।

$\therefore$ $OP < OQ$

$\therefore$ Q वृत्त के बाहर स्थित है।

[$\because$ OP त्रिज्या है तथा $OP < OQ$ है]

अतः AB पर P के अतिरिक्त प्रत्येक बिन्दु वृत्त के बाहर स्थित है।

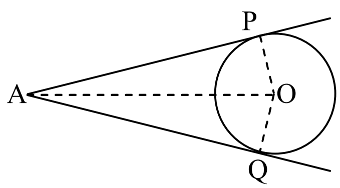
$\therefore$ AB वृत्त को केवल बिन्दु P पर मिलती है।

फलतः, वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा AB है।

प्रमेय 3 :

बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं लम्बाई में बराबर होती है।

दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर बिन्दु A से दो स्पर्श रेखाऐं AP तथा AQ खींची गई है।



सिद्ध करना है : $AP = AQ$

रचना : OP, OQ तथा OA को मिलाया।

उपपत्ति : P पर स्पर्श रेखा AP है तथा P से गुजरने वाली त्रिज्या OP है।

$\therefore$ $OP \perp AP$

इसी प्रकार, $OQ \perp AQ$

समकोण त्रिभुज OPA तथा OQA में, हम पाते हैं

$OP = OQ$ [एक ही वृत्त की त्रिज्याऐं]

$OA = OA$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore$ $\Delta OPA \cong \Delta OQA$ [RHS–सर्वांगसमता से]

अतः, $AP = AQ$

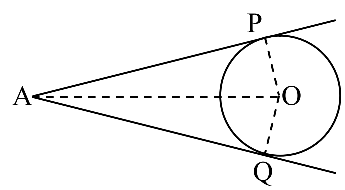
प्रमेय 4 :

यदि बाह्य बिन्दु से दो स्पर्श रेखाऐं खींची गई हो, तब -

(i) वे केन्द्र पर समान कोण बनाती है, तथा

(ii) वे बिन्दु को केन्द्र से जोड़ने वाले रेखाखण्ड से बराबर कोण बनाती है।

दिया है : वृत्त का केन्द्र O है तथा एक बिन्दु A इसके बाहर स्थित है। वृत्त की दो स्पर्श रेखाऐं AP तथा AQ है।



सिद्ध करना है : $\angle AOP = \angle AOQ$

तथा $\angle OAP = \angle OAQ$.

उपपत्ति : ΔAOP तथा ΔAOQ में, हम पाते हैं

$AP = AQ$ [बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखाऐं समान है]

$OP = OQ$ [एक ही वृत्त की त्रिज्याऐं]

$OA = OA$ [उभयनिष्ठ]

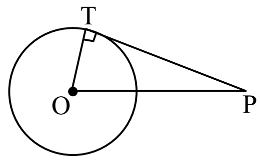
$\therefore$ $\Delta AOP \cong \Delta AOQ$ [SSS–सर्वांगसमता से]

फलतः, $\angle AOP = \angle AOQ$ तथा $\angle OAP = \angle OAQ$ है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 वृत्त के केन्द्र से 10 cm दूर एक बिन्दु P से 8 cm लम्बाई की एक स्पर्श रेखा PT खींची जाती है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

Sol. माना दिये गये वृत्त का केन्द्र O है तथा माना बिन्दु P इस प्रकार है कि



$OP = 10$ cm

माना स्पर्श रेखा PT इस प्रकार है कि $PT = 8$ cm

OT को मिलाया।

अब, T पर स्पर्श रेखा PT है तथा T से गुजरने वाली त्रिज्या OT है।

$\therefore$ $OT \perp PT$

समकोण ΔOTP में, हम पाते हैं

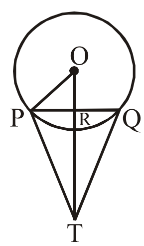
$OP^2 = OT^2 + PT^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$\Rightarrow$ $OT = \sqrt{OP^2 - PT^2} = \sqrt{(10)^2 - (8)^2}$ cm

$= \sqrt{36}$ cm = 6 cm.

फलतः, वृत्त की त्रिज्या 6 cm है।

Ex.2 दिये गये चित्र में, 5 cm त्रिज्या के वृत्त की जीवा PQ की लम्बाई 8 cm है। P तथा Q पर स्पर्श रेखाएँ बिन्दु T पर प्रतिच्छेदित होती है। TP की लम्बाई ज्ञात कीजिए -



Sol. OP तथा OT को मिलाया । माना OT, PQ को बिन्दु R पर काटता है।

तब, $TP = TQ$ तथा $\angle PTR = \angle QTR$.

$\therefore$ $TR \perp PQ$ तथा TR, PQ को समद्विभाजित करता है।

$\therefore PR = RQ = 4$ cm.

$OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$ cm

$= \sqrt{25 - 16}$ cm $= \sqrt{9}$ cm = 3 cm

माना $TP = x$ cm तथा $TR = y$ cm.

समकोण ΔTRP से, हम पाते हैं

$TP^2 = TR^2 + PR^2$

$\Rightarrow x^2 = y^2 + 16 \Rightarrow x^2 - y^2 = 16$ .... (i)

समकोण ΔOPT से हम पाते हैं

$TP^2 + OP^2 = OT^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + 5^2 = (y + 3)^2$ [$\because OT^2 = (OR + RT)^2$]

$\Rightarrow$ $x^2 - y^2 = 6y - 16$ ....(ii)

(i) तथा (ii) से

$6y - 16 = 16 \Rightarrow 6y = 32 \Rightarrow y = \frac{16}{3}$

(i) में $y = \frac{16}{3}$ रखने पर, हम पाते हैं

$x^2 = 16 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \left(\frac{256}{9} + 16\right) = \frac{400}{9}$

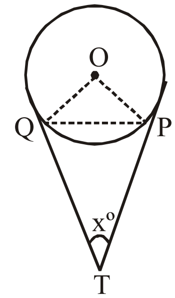
$\Rightarrow$ $x = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}$

फलतः TP की लम्बाई = x cm = $\left(\frac{20}{3}\right)$cm

= 6.67 cm

Ex.3 एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर बाह्य बिन्दु T से दो स्पर्श रेखायें TP तथा TQ खींची जाती है, तो सिद्ध करो कि $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

Sol. **दिया है :** एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा एक बाह्य बिन्दु T है तथा T से खीची गई स्पर्श रेखाऐं TP तथा TQ वृत्त को P तथा Q पर स्पर्श करती हैं।



सिद्ध करना है : $\angle PTQ = 2\angle OPQ$.

उपपत्ति : माना $\angle PTQ = x^o$ तब,

$\angle TQP + \angle TPQ + \angle PTQ = 180^o$

[$\because$ त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^o है]

$\Rightarrow$ $\angle TQP + \angle TPQ = (180^o - x)$ ....(i)

हम जानते हैं कि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाईयाँ बराबर होती है।

इसलिए, TP = TQ

अब, TP = TQ

$\Rightarrow \angle TQP = \angle TPQ$

$$= \frac{1}{2}(180^o - x) = \left(90^o - \frac{x}{2}\right)$$

$\therefore \angle OPQ = (\angle OPT - \angle TPQ)$

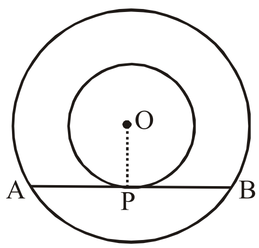
$$= 90^o - \left(90^o - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

$\Rightarrow \angle OPQ = \frac{1}{2} \angle PTQ$

$\Rightarrow \angle PTQ = 2\angle OPQ$

Ex.4 सिद्ध किजिए कि दो संकेन्द्रिय वृत्त में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है ।

Sol. **दिया है :** दो वृत्त जिनके केन्द्र O समान है तथा AB बड़े वृत्त की जीवा है जो छोटे वृत्त को P पर स्पर्श करती है।



सिद्ध करना है : AP = BP

रचना : OP को मिलाते हैं ।

उपपत्ति : AB छोटे वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा है तथा P से गुजरने वाली त्रिज्या OP है।

$\therefore$ OP $\perp$ AB

किन्तु, वृत्त की जीवा पर केन्द्र से खींचा गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है ।

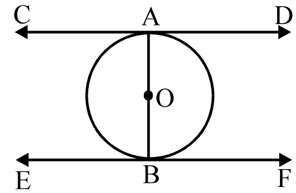
$\therefore$ OP, AB का समद्विभाजक है।

फलतः, AP = BP

Ex.5 सिद्ध कीजिये कि वृत्त के व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं समान्तर होती है।

Sol. **दिया है :** एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, के व्यास AB के सिरे बिन्दु A तथा B पर स्पर्श रेखाऐं CD तथा EF है।

सिद्ध करना है : CD || EF



उपपत्ति : वृत्त के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा CD है ।

$\therefore \angle BAD = 90°$

वृत्त के बिन्दु B पर स्पर्श रेखा EF है।

$\therefore \angle ABE = 90°$

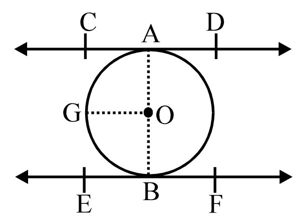
इसलिए, $\angle BAD = \angle ABE$ (प्रत्येक 90^o के बराबर)

किन्तु यह एकान्तर आन्तरिक कोण है ।

$\therefore$ CD || EF

Ex.6 सिद्ध कीजिये कि वृत्त की दो समान्तर स्पर्श रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं को जोड़ने वाला रेखाखण्ड, वृत्त का व्यास होता है।

Sol. **दिया है :** एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, के A तथा B बिन्दुओं पर दो समान्तर स्पर्श रेखाएँ CD तथा EF है।



सिद्ध करना है : AOB वृत्त का व्यास है।

रचना : OA तथा OB को मिलाया ।

OG || CD खींचा

उपपत्ति : OG || CD तथा AO उनको काटता है

$\therefore \angle CAO + \angle GOA = 180°$

$\Rightarrow 90° + \angle GOA = 180°$ [OA $\perp$ CD]

$\Rightarrow \angle GOA = 90°$

इसी प्रकार, $\angle GOB = 90°$

$\therefore \angle GOA + \angle GOB = (90° + 90°) = 180°$

$\Rightarrow$ AOB एक सरल रेखा है

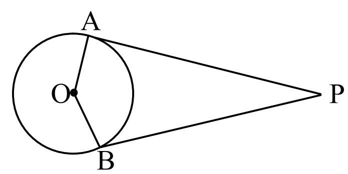
फलतः, AOB उस वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र O है।

Ex.7 सिद्ध कीजिये कि एक वृत्त के बाह्य बिन्दु से खींचे गयी दो स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण स्पर्श बिन्दुओं को केन्द्र से जोड़ने वाले रेखाखण्डों से बने कोण के संपूरक होता है।

Sol. **दिया है :** एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर P से स्पर्श रेखाऐं PA तथा PB खींची जाती है। रेखा खण्ड OA तथा OB भी खींचे जाते हैं ।

सिद्ध करना है : $\angle APB + \angle AOB = 180°$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि एक वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या के लम्बवत् होती है।



$\therefore$ $PA \perp OA \Rightarrow \angle OAP = 90°$, तथा

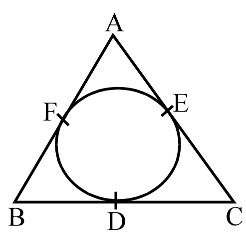
$PB \perp OB \Rightarrow \angle OBP = 90°$.

$\therefore$ $\angle OAP + \angle OBP = 90°$.

फलतः, $\angle APB + \angle AOB = 180°$

[$\because$ एक चतुर्भुज के सभी कोणों का योग 360° होता है]

Ex.8 दिये गये चित्र में, ΔABC का अन्तः वृत्त भुजाओं BC, CA तथा AB के क्रमशः D, E, F पर स्पर्श करता है।



सिद्ध कीजिए $AF + BD + CE = AE + CD + BF$

$= \frac{1}{2}$ (ΔABC का परिमाप)

Sol. हम जानते हैं कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है ।

$\therefore$ $AF = AE$ .... (i) [A से स्पर्श रेखा]

$BD = BF$ ..... (ii) [B से स्पर्श रेखा]

$CE = CD$ ..... (iii) [C से स्पर्श रेखा]

(i), (ii) तथा (iii) को जोड़ने पर, हम पाते हैं

$(AF + BD + CE) = (AE + BF + CD) = k$ (माना)

ΔABC का परिमाप $= (AF + BD + CE)$

$+ (AE + BF + CD)$

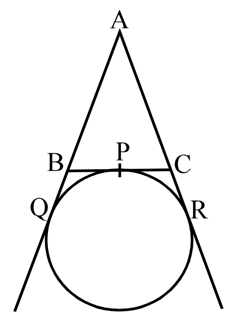
$= (k + k) = 2k$

$\therefore$ $k = \frac{1}{2}$ (ΔABC का परिमाप)

फलतः $AF + BD + CE = AE + CD + BF$

$= \frac{1}{2}$ (ΔABC का परिमाप)

Ex.9 एक वृत्त ΔABC की भुजा BC को P पर स्पर्श करता है तथा AB व AC को क्रमशः Q व R तक बढ़ाने पर स्पर्श करता है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।



प्रदर्शित कीजिये कि $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC का परिमाप)

Sol. हम जानते हैं कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है।

$\therefore$ $AQ = AR$ .... (i) [A से स्पर्श रेखा]

$BP = BQ$ .... (ii) [B से स्पर्श रेखा]

$CP = CR$ .... (iii) [C से स्पर्श रेखा]

ΔABC का परिमाप

$= AB + BC + AC$

$= AB + BP + CP + AC$

$= AB + BQ + CR + AC$ [(ii) तथा (iii) के प्रयोग से]

$= AQ + AR$

$= 2AQ$ [(i) के प्रयोग से]

फलतः, $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC का परिमाप)

Ex.10 सिद्ध कीजिये कि वृत्त की परिधि पर स्थित किसी बिन्दु की एक और केवल एक ही स्पर्श रेखा होती है।

Sol. माना एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर एक बिन्दु P है। यदि संभव हो, तो माना PT तथा PT' क्रमशः वृत्त के बिन्दु P पर दो स्पर्श रेखाऐं हैं।

अब, वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या के लम्बवत् है।

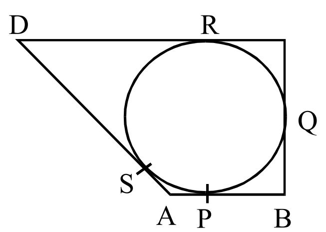
$\therefore$ $OP \perp PT$ तथा इसी प्रकार, $OP \perp PT'$

$\Rightarrow$ $\angle OPT = 90°$ तथा $\angle OPT' = 90°$

$\Rightarrow$ $\angle OPT = \angle OPT'$

यह केवल तभी संभव है, जब PT तथा PT′ संपाती है। फलतः, वृत्त की परिधि पर स्थित बिन्दु पर एक और केवल एक ही स्पर्श रेखा होती है ।

Ex.11 एक चतुर्भुज ABCD वृत्त के परितः खींचा जाता है, जैसा चित्र में दिखाया गया है।



सिद्ध कीजिए कि AB + CD = AD + BC

Sol. हम जानते हैं कि किसी वृत्त के बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई बराबर होती है।

$\therefore$ AP = AS ....(i) [A से स्पर्श रेखा]

BP = BQ ....(ii) [B से स्पर्श रेखा]

CR = CQ ....(iii) [C से स्पर्श रेखा]

DR = DS ....(iv) [D से स्पर्श रेखा]

$\therefore$ AB + CD = (AP + BP) + (CR + DR)

= (AS + BQ) + (CQ + DS)

[(i), (ii), (iii), (iv) के प्रयोग से]

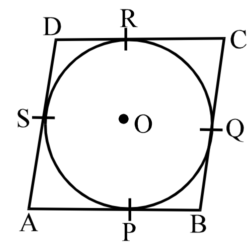
= (AS + DS) + (BQ + CQ)

= (AD + BC).

फलतः, (AB + CD) = (AD + BC)

Ex.12 सिद्ध कीजिये कि एक वृत्त के परितः बनाया गया समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

Sol.



दिया है : एक समान्तर चतुर्भुज ABCD एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, के परितः बनाया गया है।

सिद्ध करना है : AB = BC = CD = AD

उपपत्ति : हम जानते हैं कि एक वृत्त के बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है।

$\therefore$ AP = AS .... (i) [A से स्पर्श रेखाएँ]

BP = BQ .... (ii) [B से स्पर्श रेखाएँ]

CR = CQ .... (iii) [C से स्पर्श रेखाएँ]

DR = DS .... (iv) [D से स्पर्श रेखाएँ]

$\therefore$ AB + CD = AP + BP + CR + DR

= AS + BQ + CQ + DS

[(i), (ii), (iii), (iv) से]

= (AS + DS) + (BQ + CQ)

= AD + BC

फलतः, (AB + CD) = (AD + BC)

$\Rightarrow$ 2AB = 2AD

[$\because$ समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं बराबर है]

$\Rightarrow$ AB = AD

$\therefore$ CD = AB = AD = BC

फलतः, ABCD समचतुर्भुज है

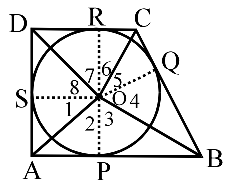
Ex.13 सिद्ध कीजिऐं कि वृत्त के परितः बने चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं वृत्त के केन्द्र पर सम्पूरक कोण बनाती है।

Sol. **दिया है :** एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, के परितः चतुर्भुज ABCD बनाया गया है।

सिद्ध करना है : $\angle AOB + \angle COD = 180°$

तथा $\angle BOC + \angle AOD = 180°$

रचना: OP, OQ, OR तथा OF को मिलाया।



उपपत्ति : हम जानते हैं कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ केन्द्र पर बराबर कोण बनाती है।

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4, \angle 5 = \angle 6$

तथा $\angle 7 = \angle 8$

तथा, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$

$+ \angle 7 + \angle 8 = 360°$ [एक बिन्दु पर कोण]

$\Rightarrow 2(\angle 2 + \angle 3) + 2(\angle 6 + \angle 7) = 360°$

तथा $2(\angle 1 + \angle 8) + 2(\angle 4 + \angle 5) = 360°$

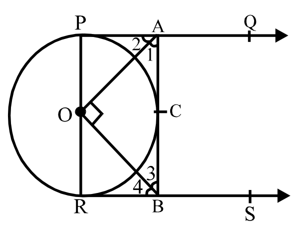
$\Rightarrow \angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180°$

तथा $\angle 1 + \angle 8 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$

$\Rightarrow \angle AOB + \angle COD = 180°$

तथा $\angle AOD + \angle BOC = 180°$

Ex.14 दिये गये चित्र में, PQ तथा RS एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो समान्तर स्पर्श रेखाऐं हैं तथा अन्य स्पर्श रेखा AB जिसका स्पर्श बिन्दु C है, PQ को A पर तथा RS को B पर काटती है।



सिद्ध कीजिये कि $\angle AOB = 90°$

Sol. **दिया है:** एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, की दो समान्तर स्पर्श रेखाऐं PQ तथा RS है तथा AB वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श रेखा है, जो PQ तथा RS को क्रमशः A तथा B पर काटती है ।

सिद्ध करना है : $\angle AOB = 90°$

उपपत्ति : चूंकि PA तथा RB क्रमशः वृत्त के बिन्दु P तथा R पर स्पर्श रेखाएँ हैं तथा POR वृत्त का व्यास है।

$\angle OPA = 90°$ तथा $\angle ORB = 90°$

$\Rightarrow \angle OPA + \angle ORB = 180°$

$\Rightarrow PA \parallel RB$

हम जानते हैं कि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं इस बिन्दु को केन्द्र से जोड़ने वाले रेखा खण्ड से बराबर कोण बनाती है।

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 1$ तथा $\angle 4 = \angle 3$

अब, $PA \parallel RB$ तथा AB अनुप्रस्थ है

$\therefore \quad \angle PAB + \angle RBA = 180°$

$\Rightarrow (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = 180°$

$\Rightarrow 2\angle 1 + 2\angle 3 = 180°$

[$\therefore \angle 2 = \angle 1$ तथा $\angle 4$ तथा $\angle 3$]

$\Rightarrow 2(\angle 1 + \angle 3) = 180°$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 90°$

ΔAOB से, हम पाते हैं

$\angle AOB + \angle 1 + \angle 3 = 180°$

[$\because$ त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° है]

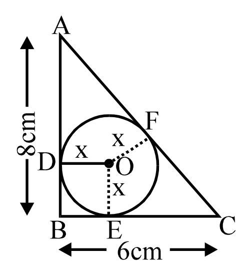
$\Rightarrow \angle AOB + 90° = 180°$

$\Rightarrow \angle AOB = 90°$

फलतः, $\angle AOB = 90°$

Ex.15 ABC समकोण त्रिभुज है जो B पर समकोण है। एक वृत्त इसके अन्तर्गत बनाया गया है। समकोण बनाने वाली दो भुजाओं की लम्बाई 6 cm तथा 8 cm है। अन्तः वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

Sol.



माना अन्तः वृत्त की त्रिज्या x cm है।

माना अन्तः वृत्त, भुजाओं AB, BC तथा CA को क्रमशः D, E, F पर स्पर्श करता है। माना वृत्त का केन्द्र O है।

तब, OD = OE = OF = x cm

AB = 8 cm तथा BC = 6 cm

चूंकि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं लम्बाई में बराबर होती है, इसलिए

AF = AD = (8 – x) cm, तथा

CF = CE = (6 – x) cm.

$\therefore$ AC = AF + CF = (8 – x) cm + (6 – x) cm = (14 – 2x) cm.

अब , $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow (14 - 2x)^2 = 8^2 + 6^2 = 100 = (10)^2$

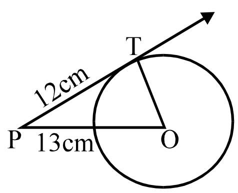
$\Rightarrow 14 - 2x = \pm 10 \quad \Rightarrow x = 2$ or $x = 12$

$\Rightarrow$ x = 2 [x = 12 को नहीं लेने पर]

फलतः अन्तः वृत्त की त्रिज्या 2 cm है।

Ex.16 एक बिन्दु P वृत्त के केन्द्र से 13 cm दूरी पर है। P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई 12cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Sol. चूँकि वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या के लम्बवत् होती है ।



$\therefore \quad \angle OTP = 90°$

समकोण त्रिभुज OTP में, हम पाते हैं कि

$OP^2 = OT^2 + PT^2$

$\Rightarrow 13^2 = OT^2 + 12^2$

$\Rightarrow OT^2 = 13^2 - 12^2$

$= (13 - 12)(13 + 12) = 25$

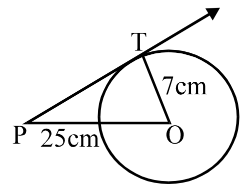
$\Rightarrow$ OT = 5

फलतः वृत्त की त्रिज्या 5 cm है।

Ex.17 उस बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो वृत्त के केन्द्र से 25 cm दूरी पर है। दिया है कि वृत्त की त्रिज्या 7 cm है।

Sol. माना दिया गया बिन्दु P है, O वृत्त का केन्द्र है तथा PT, P से स्पर्श रेखा की लम्बाई है। तब,

OP = 25 cm तथा OT = 7 cm.



चूँकि एक वृत्त की स्पर्श रेखा हमेशा स्पर्श बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या के लम्बवत् होती है ।

$\therefore \quad \angle OTP = 90°$

समकोण त्रिभुज OTP में, हम पाते हैं

$OP^2 = OT^2 + PT^2$

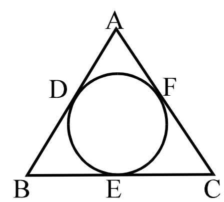
$\Rightarrow 25^2 = 7^2 + PT^2$

$\Rightarrow PT^2 = 25^2 - 7^2 = (25 - 7)(25 + 7) = 576$

$\Rightarrow$ PT = 24 cm

फलतः, P से स्पर्श रेखा की लम्बाई = 24 cm

Ex.18 चित्र में, यदि AB = AC है, तो सिद्ध कीजिए कि BE = EC



Sol. चूँकि वृत्त के बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाऐं लम्बाई में बराबर होती है ।

$\therefore$ AD = AF [A से स्पर्श रेखाऐं]

BD = BE [B से स्पर्श रेखाऐं]

CE = CF [C से स्पर्श रेखाऐं]

अब,

AB = AC

$\Rightarrow$ AB – AD = AC – AD

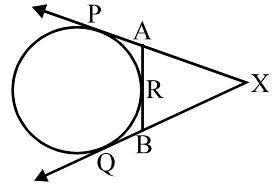
[दोनो तरफ से AD घटाने पर]

$\Rightarrow$ AB – AD = AC – AF [(i) से]

$\Rightarrow$ BD = CF $\Rightarrow$ BE = CF [(ii) से]

$\Rightarrow$ BE = CE [(iii) से]

Ex.19 चित्र में XP तथा XQ, X से वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं हैं। R वृत्त पर स्थित बिन्दु है।



सिद्ध कीजिए कि, XA + AR = XB + BR.

Sol. चूँकि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है।

$\therefore$ XP = XQ .... (i) [X से]

AP = AR .... (ii) [A से]

BQ = BR .... (iii) [B से]

अब, XP = XQ

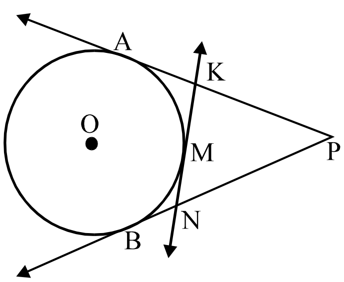
$\Rightarrow$ XA + AP = XB + BQ

$\Rightarrow$ XA + AR = XB + BR

[समीकरण (i) तथा (ii) से]

Ex.20 PA तथा PB क्रमशः वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर P से खींची गई स्पर्श रेखाऐं हैं। बिन्दु M पर खींची गई स्पर्श रेखा PA को K पर तथा PB को N पर काटती है। सिद्ध कीजिए कि KN = AK + BN

Sol. हम जानते हैं कि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है।



$\therefore$ PA = PB .... (i) [P से]

KA = KM .... (ii) [K से]

अब, NB = NM .... (iii) [N से]

समीकरण (ii) तथा (iii) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

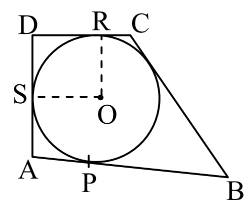
KA + NB = KM + NM

$\Rightarrow$ AK + BN = KM + MN $\Rightarrow$ AK + BN = KN

Ex.21 चतुर्भुज ABCD इस प्रकार है कि $\angle D = 90°$ है। एक वृत्त (O, r) भुजाओं AB, BC, CD तथा DA को क्रमशः P,Q,R तथा S पर स्पर्श करता है। यदि BC = 38 cm, CD = 25 cm तथा BP = 27 cm है, तो r ज्ञात करें ।

Sol. चूँकि वृत्त की स्पर्श रेखा, बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या के लम्बवत् होती है।

$\therefore$ $\angle ORD = \angle OSD = 90°$



यह दिया है कि $\angle D = 90°$ यह भी, OR = OS,

ORDS वर्ग है ।

चूँकि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ लम्बाई में बराबर होती है।

$\therefore$ BP = BQ

CQ = CR

तथा DR = DS

अब,

BP = BQ

$\Rightarrow$ BQ = 27 [$\because$ BP = 27 cm (दिया है)]

$\Rightarrow$ BC – CQ = 27

$\Rightarrow$ 38 – CQ = 27 [$\because$ BC = 38 cm]

$\Rightarrow$ CQ = 11cm

$\Rightarrow$ CR = 11cm [$\because$ CR = CQ]

$\Rightarrow$ CD – DR = 11

$\Rightarrow$ 25 – DR = 11 [$\because$ CD = 25cm]

$\Rightarrow$ DR = 14 cm

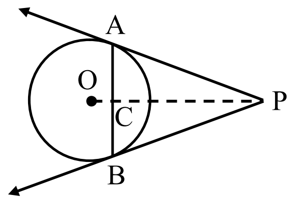
लेकिन, ORDS एक वर्ग है

अतः, OR = DR = 14 cm

फलतः, r = 14 cm

Ex.22 सिद्ध कीजिये कि किसी जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं जीवा के साथ बराबर कोण बनाती है।

Sol. माना AB वृत्त की जीवा है, जिसका केन्द्र O है, तथा माना AP तथा BP क्रमशः A तथा B पर स्पर्श रेखाऐं हैं। मानाकि स्पर्श रेखाऐं P पर मिलती है। OP को मिलाया । मानाकि OP, AB को C पर मिलती है। हमें सिद्ध करना है कि $\angle PAC = \angle PBC$.
त्रिभुजों PCA तथा PCB में, हम पाते हैं -



PA = PB [$\because$ बाह्य बिन्दुओं से स्पर्श रेखाऐं बराबर है]

$\angle$ APC = $\angle$ BPC

[$\because$ PA तथा PB, OP से समान कोण बनाती है]

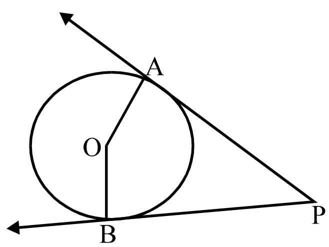
तथा, PC = PC [उभयनिष्ठ]

इसलिए , SAS – सर्वागसमता गुणधर्म से, हम पाते हैं-

Δ PAC $\cong$ Δ PBC $\Rightarrow$ $\angle$ PAC = $\angle$ PBC

Ex.23 चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। PA तथा PB स्पर्श रेखा है, तो प्रदर्शित कीजिए कि AOBP चक्रीय चतुर्भुज है।

Sol.



चूँकि वृत्त के बिन्दु पर स्पर्श रेखा बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या के लम्बवत् होती है।

$\therefore$ OA $\perp$ AP तथा OB $\perp$ BP

$\Rightarrow$ $\angle$OAP = 90° तथा $\angle$OBP = 90°

$\Rightarrow$ $\angle$OAP + $\angle$OBP = 90° + 90° = 180° ....(i)

चतुर्भुज OAPB में हम पाते हैं,

$\angle$OAP + $\angle$APB + $\angle$AOB + $\angle$OBP = 360°

$\Rightarrow$ ($\angle$APB + $\angle$AOB) + ($\angle$OAP +$\angle$OBP) = 360°

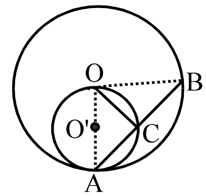
$\Rightarrow$ $\angle$APB + $\angle$AOB + 180° = 360°

$\angle$APB + $\angle$AOB = 180° ....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से, हम कह सकते हैं कि चतुर्भुज AOBP चक्रीय है।

Ex.24 चित्र में, वृत्त C(O,r) तथा C(O′, r/2) बिन्दु A पर अन्तः स्पर्श करते हैं तथा वृत्त C(O, r) की जीवा AB, C (O′, r/2) को C पर काटती है, तो सिद्ध करो कि AC = CB

Sol. OA, OC तथा OB को मिलाया । स्पष्टतः, $\angle$OCA अर्द्धवृत्त में बना कोण हैं ।



$\therefore$ $\angle$OCA = 90°

समकोण त्रिभुज OCA तथा OCB में, हम पाते है

OA = OB = r

$\angle$OCA = $\angle$OCB = 90°

तथा OC = OC

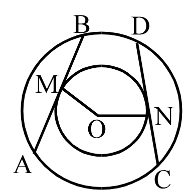
इसलिए , RHS सर्वांगसमता गुणधर्म से, हम पाते हैं

Δ OCA $\cong$ Δ OCB

$\Rightarrow$ AC = CB

Ex.25 सिद्ध किजिये कि दो संकेन्द्रिय वृत्तों में, बाह्य वृत्त की सभी जीवाएँ जो अन्तःवृत्त को स्पर्श करती है, बराबर लम्बाई की होती है।

Sol. माना AB तथा CD वृत्त की दो जीवाऐं है जो अन्तःवृत्त को क्रमशः M तथा N पर स्पर्श करती है।



तब, हमे सिद्ध करना है कि

AB = CD

चूँकि AB तथा CD छोटे वृत्त की स्पर्श रेखाऐं है।

$\therefore$ OM = ON = छोटे वृत्त की त्रिज्या है।

इसी प्रकार, AB तथा CD दो बड़े वृत्त की जीवाऐं इस प्रकार है कि वे केन्द्र से समान दूरी पर है। फलतः, AB = CD.