

सूची

- वर्ग चिन्ह
- संचयी बारम्बारता
- बहुभुज
- बारम्बारता बहुभुज
- माध्य
- माध्यिका
- बहुलक

➤ महत्वपूर्ण बिन्दु

- ◆ आंकड़ों का अर्थ है जानकारी। सांख्यिकीय आंकड़े दो प्रकार के होते हैं।
 - (i) प्राथमिक आंकड़े
 - (ii) द्वितीयक आंकड़े
- ◆ यदि एक अन्वेषक आंकड़ों को स्वयं संग्रह करता हो, प्राथमिक आंकड़े कहलाते हैं।
- ◆ वे आंकड़े जो अन्वेषक द्वारा स्वयं एकत्रित ना करके अन्य स्रोतों द्वारा संग्रहित आंकड़ों से प्राप्त किया जाता है।
- ◆ आंकड़ों के संग्रहण के पश्चात् उनके सारणियन की आवश्यकता होती है जिससे उनके द्वारा दी जाने वाली जानकारी का अध्ययन किया जा सके।
- ◆ यथा प्राप्त आंकड़ों (यदि आंकड़ों को उसी रूप में संकलित किया जाए जिस रूप में उन्हें एकत्रित किया गया हो) को यदि बढ़ते या घटते क्रम में जमाया जाए तो इन्हें तैयार रूप या व्यवस्थित रूप कहते हैं।

- ◆ किस भी आंकड़े की पुनरावृत्ति संख्या ही उसकी बारम्बारता कहलाती है।
- ◆ वर्ग या वर्ग अन्तराल वे समूह है जिसमें सभी आंकड़ों को बांटा जाता है।
- ◆ माना वर्ग अन्तराल 10-20 है तब 10 की निम्न सीमा तथा 20 को ऊपरी सीमा कहते हैं।
- ◆ वर्ग अन्तराल के मध्य बिन्दु को वर्ग चिन्ह या मध्यमान कहते हैं।

$$\text{वर्ग चिन्ह} = \frac{\text{ऊपरी सीमा} + \text{निम्न सीमा}}{2}$$

$$\text{वर्ग चिन्ह} = \text{निम्न सीमा} + \frac{1}{2}$$

(ऊपरी तथा निम्न सीमा का अन्तर)

- ◆ यदि प्रथम वर्ग की बारम्बारता को दूसरे वर्ग की बारम्बारता से योग करें तथा इस योग को तीसरे वर्ग की बारम्बारता से योग करें और यही क्रम अन्त तक ले जाएँ तो प्राप्त बारम्बारताओं का संचयी बारम्बारता (c.f.) कहते हैं।
- ◆ संचयी बारम्बारता दो प्रकार की होती है
 - (a) से कम, (b) से अधिक

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 एक विद्यालय के 25 विद्यार्थियों की आयु निम्न सारणी में दी गई है। आंकड़ों की अलग-अलग बारम्बारता सारणी तैयार कीजिए।

15, 16, 16, 14, 17, 17, 16, 15, 15, 16, 16, 17, 15, 16, 16, 14, 16, 15, 14, 15, 16, 16, 15, 14, 15.

Sol. 25 विद्यार्थियों के बारम्बारता बंटन निम्न है।

आयु	गणनाचिन्ह	बारम्बारता
14		4
15		8
16		10
17		3
योग		25

Ex.2 निम्न सूची से बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

15, 18, 16, 20, 25, 24, 25, 20, 16, 15, 18, 18, 16, 24, 15, 20, 28, 30, 27, 16, 24, 25, 20, 18, 28, 27, 25, 24, 24, 18, 18, 25, 20, 16, 15, 20, 27, 28, 29, 16.

आंकड़े	गणना चिन्ह	बारम्बारता
15		4
16		6
18		6
20		6
24		5
25		5
27		3
28		3
29		1
30		1
योग		40

Ex.3 निम्न आंकड़ों में 30 घरों के जल उपभोग का खर्च दिया गया है। इनके लिए वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए जिसका वर्ग अन्तराल 10 है।

30, 32, 45, 54, 74, 78, 108, 112, 66, 76, 88, 40, 14, 20, 15, 35, 44, 66, 75, 84, 95, 96, 102, 110, 88, 74, 112, 14, 34, 44.

Sol. आंकड़ों के अधिकतम तथा न्यूनतम मान क्रमशः 112 तथा 14 हैं।

∴ परिसर = 112 – 14 = 98.

वर्ग अन्तराल 10 दिया है तथा $\frac{\text{परिसर}}{\text{वर्ग अन्तराल}} = \frac{98}{10} = 9.8$

इस प्रकार हमें 10 वर्ग लेने होंगे। हम प्रथम वर्ग 14-24 लेते हैं जो दिए गए न्यूनतम मान 14 को रखता है तथा अन्तिम वर्ग 104-114 लेंगे जो अधिकतम मान 112 रखता है। प्रथम वर्ग 14-24 में 14 शामिल है जबकि 24 शामिल नहीं है। इसी प्रकार अन्य वर्गों में भी निम्न सीमा शामिल है परन्तु ऊपरी सीमा नहीं।

खर्च(रूपये)	गणना चिन्ह	बारम्बारता
14-24		4
24-34		2
34-44		3
44-54		3
54-64		1
64-74		2
74-84		5
84-94		3
94-104		3
104-114		4
योग		30

Ex.4 एक परीक्षा में कक्षा IX के 40 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नानुसार है।

18, 8, 12, 6, 8, 16, 12, 5, 23, 2, 16, 23, 2, 10, 20, 12, 9, 7, 6, 5, 3, 5, 13, 21, 13, 15, 20, 24, 1, 7, 21, 16, 13, 18, 23, 7, 3, 18, 17, 16.

एक समान वर्ग अन्तराल रखते हुए (उदा. 15-20 जहाँ 20 शामिल नहीं) बारम्बारता बंटन से आंकड़ों को दर्शाइए।

Sol. आंकड़ों का बारम्बारता बंटन

आंकड़े	गणनाचिन्ह	बारम्बारता
0-5		6
5-10		10
10-15		8
15-20		8
20-25		8
योग		40

Ex.5 यदि एक बंटन के वर्ग चिन्ह

47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82, 87, 92, 97, 102 निम्नानुसार हो तो वर्ग अन्तराल, वर्ग सीमाएँ तथा वास्तविक वर्ग सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ वर्ग चिन्ह एक समान अन्तराल पर है। अतः वर्ग अन्तराल दो क्रमागत वर्ग चिन्हों के अन्तर के समान होगा।

∴ अतः वर्ग अन्तराल
= 52 – 47 = 5

हम जानते हैं कि यदि किसी वर्ग का वर्ग चिन्ह a है तथा h उस वर्ग का वर्गअन्तराल है तो

निम्न सीमा तथा ऊपरी सीमाएँ क्रमशः $a - \frac{h}{2}$ तथा

$a + \frac{h}{2}$ होती है।

∴ निम्न सीमा

$$= 47 - \frac{5}{2} = 44.5$$

तथा ऊपरी सीमा

$$= 47 + \frac{5}{2} = 49.5 \text{ है।}$$

प्रथम वर्ग 44.5 – 49.5

इसी प्रकार अन्य को ज्ञात किया जा सकता है।

वर्गचिन्ह	वर्ग सीमाएँ
47	44.5 - 49.5
52	49.5 - 54.5
57	54.5 - 59.5
62	59.5 - 64.5
67	64.5 - 69.5
72	69.5 - 74.5
77	74.5 - 79.5
82	79.5 - 84.5
87	84.5 - 89.5
92	89.5 - 94.5
97	94.5 - 99.5
102	99.5 - 104.5

यहाँ वर्ग परस्पर अपवर्जी है अतः वास्तविक वर्ग सीमाएँ, उपरोक्त वर्ग सीमाओं के समान है।

Ex.6 यदि किसी बंटन के वर्ग चिन्ह 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71 हैं। वास्तविक वर्ग सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ वर्ग चिन्ह समान अन्तराल पर हैं अतः वर्ग अन्तराल, दो क्रमागत वर्ग चिन्हों के अन्तर के समान होता है।

$$\therefore \text{वर्ग अन्तराल} = 31 - 26 = 5.$$

हम जानते हैं कि यदि किसी वर्ग का वर्ग चिन्ह a है तथा h उस वर्ग का वर्ग अन्तराल है तो निम्न सीमा तथा ऊपरी सीमाएँ क्रमशः $a - \frac{h}{2}$ तथा

$a + \frac{h}{2}$ होती है।

अतः $h = 5$

∴ प्रथम वर्ग की निम्न सीमा

$$= 26 - \frac{5}{2} = 23.5$$

तथा प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा

$$= 26 + \frac{5}{2} = 28.5$$

∴ प्रथम वर्ग = 23.5 – 28.5.

अतः वर्ग निम्न है

23.5 – 28.5, 28.5 – 33.5, 33.5 – 38.5, 38.5 – 43.5, 43.5 – 48.5, 48.5 – 53.5

वर्ग, अपवर्जी विधि से बनाए गए है। अतः यही सीमाएँ वास्तविक वर्ग सीमाएँ है।

▶ संचयी बारम्बारता सारणी

वह सारणी जो विभिन्न वर्गों के लिए संचयी बारम्बारताओं का वर्गीकरण दर्शाए संचयी बारम्बारता सारणी कहलाती है।

Ex.7 एक कक्षा के 35 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न है।

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0	1
1	2
2	4
3	4
4	3
5	5
6	4
7	6
8	3
9	2
10	1

Sol.

अंक	बारम्बारता	विद्यार्थियों की संख्या
0	1	1
1	2	3 (=1 + 2)
2	4	7 (=1 + 2 + 4)
3	4	11 (=1 + 2 + 4 + 4)
4	3	14 (=1 + 2 + 4 + 4 + 3)
5	5	19 (=1 + 2 + 4 + 4 + 3 + 5)
6	4	23 (=1 + 2 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4)
7	6	29 (=1 + 2 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6)
8	3	32 (=1 + 2 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 + 3)
9	2	34 (=1 + 2 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 + 3 + 2)
10	1	35 (=1 + 2 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 + 3 + 2 + 1)
योग = 35		

Ex.8 एक कॉलोनी के 40 व्यक्तियों का वर्गीकरण निम्न है।

आयु वर्षों में	व्यक्तियों की संख्या
20-25	7
25-30	10
30-35	8
35-40	6
40-45	4
45-50	5

- (a) प्रत्येक वर्ग के वर्ग चिन्ह ज्ञात करो।
(b) चौथे वर्ग की ऊपरी सीमा ज्ञात करो।
(c) वर्ग चौड़ाई (वर्ग अन्तराल) ज्ञात करो।

Sol. (a) वर्ग चिन्ह निम्न है

$$\frac{20+25}{2}, \frac{25+30}{2}, \frac{30+35}{2}, \frac{35+40}{2}, \frac{40+45}{2}, \frac{45+50}{2}$$

$$= 22.5, 27.5, 32.5, 37.5, 42.5, 47.5$$

- (b) चौथा वर्ग 35-40 है इसकी ऊपरी सीमा 40 है
(c) वर्ग चौड़ाई = 25 - 20 = 5

Ex.9 एक कक्षा के 40 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न है। संचयी बारम्बारता सारणी बनाइए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	3
10-20	8
20-30	9
30-40	15
40-50	5

Sol.

वर्ग	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0-10	3	3
10-20	8	11 (= 3 + 8)
20-30	9	20 (= 3 + 8 + 9)
30-40	15	35 (= 3 + 8 + 9 + 15)
40-50	5	40 (= 3 + 8 + 9 + 15 + 5)
	कुल = 40	

Ex.10 एक बंटन के वर्ग चिन्ह 25, 35, 45, 55, 65 तथा 75 है। वर्ग चौड़ाई तथा वर्ग सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

Sol. वर्ग चौड़ाई = दो क्रमागत वर्गों के वर्ग चिन्हों का अन्तर = 35 - 25 = 10

हमें वर्ग चौड़ाई 10 वाले वर्ग चिन्ह दिए गए हैं जो 25, 35, 45, 55, 65, 75 है।

अतः प्रथम वर्ग की सीमाएँ $25 - \frac{10}{2}$ तथा $25 + \frac{10}{2}$

अर्थात् 20 तथा 30 है।

अतः प्रथम वर्ग 20-30

इस प्रकार अन्य वर्ग 30 - 40, 40 - 50, 50 - 60, 60 - 70, 70 - 80 है।

Ex.11 निम्न तालिका में 40 विद्यार्थियों के प्राप्तांको की संचयी बारम्बारता सारणी दी गई है।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
20 से कम	5
40 से कम	10
60 से कम	25
80 से कम	32
100 से कम	40

इसे वर्ग तथा इनकी बारम्बारता के रूप में दर्शाओं।

Sol.

प्राप्तांक	संचयी बारम्बारता	बारम्बारता
0-20	5	5
20-40	10	5 (= 10 - 5)
40-60	25	15 (= 25 - 10)
60-80	32	7 (= 32 - 25)
80-100	40	8 (= 40 - 32)

◆ आंकड़ों का ग्राफीय निरूपण

ग्राफीय निरूपण बार ग्राफ, आयत चित्र, बारम्बारता बहुभुज आदि द्वारा किया जा सकता है।

◆ आंकड़ों का बार ग्राफ

यह आंकिक आंकड़ों का चित्रात्मक प्रदर्शन है जो क्षैतिज या उर्ध्वाधर रेखा पर एक समान दूरी तथा एक समान चौड़ाई के आयतों की श्रेणी द्वारा दर्शाया जाता है।

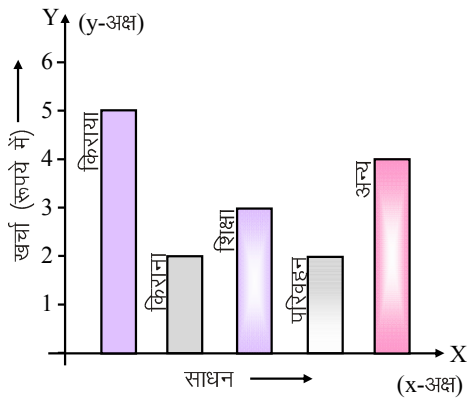
प्रत्येक आयत आंकड़ों का केवल एक आंकिक मान दर्शाता है।

प्रत्येक आयत की ऊँचाई उसके आंकिक मान के समानुपाती होती है।

उदाहरण के लिए एक परिवार का खर्च निम्नानुसार है।

व्यय के साधन	व्यय (रूपये में)
किराया	5
किराना	2
शिक्षा	3
परिवहन	2
अन्य	4

उपरोक्त आंकड़ों के लिए बार ग्राफ निम्न है।



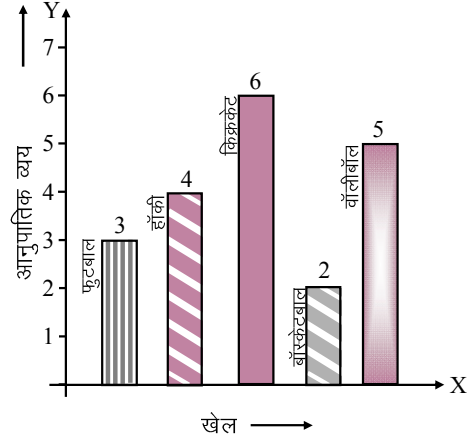
सामान्यतया क्षैतिज अक्ष को x-अक्ष तथा उर्ध्वाधर अक्ष को y-अक्ष कहते हैं।

1. प्रत्येक आयत एक समान चौड़ाई के होते हैं।
2. क्रमागत दो आयतों के मध्य एक समान अन्तराल होता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.12 निम्न बार ग्राफ पाँच अलग-अलग खेलों पर होने वाले आनुपातिक व्यय को दर्शाता है। यदि सभी खेलों पर होने वाला कुल व्यय ₹2,00,000, है तो निम्न पर व्यय ज्ञात कीजिए।

- (i) हॉकी (ii) क्रिकेट



Sol. व्यय का अनुपात 3 : 4 : 6 : 2 : 5 है

कुल व्यय = ₹2,00,000.

अनुपातों का योग 3 + 4 + 6 + 2 + 5 = 20.

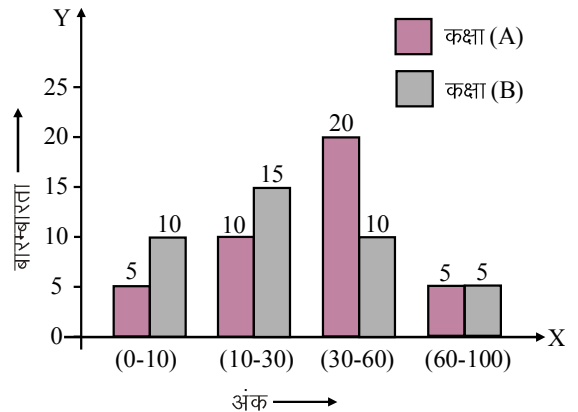
अतः हॉकी पर व्यय = ₹2,00,000 × $\frac{4}{20}$ = ₹40,000

तथा क्रिकेट = ₹2,00,000 × $\frac{6}{20}$ = ₹60,000

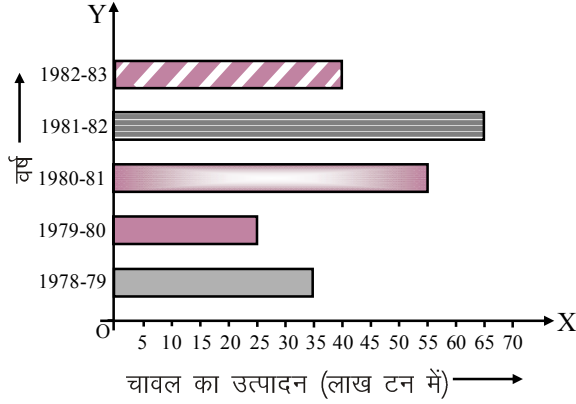
Ex.13 निम्न सारणी के आधार पर बार ग्राफ बनाइए जो दो कक्षाओं A व B प्रत्येक में 40 विद्यार्थियों के शैक्षणिक स्तर की तुलना है।

अंक :	0-10	10-30	30-60	60-100
A में विद्यार्थियों की संख्या :	5	10	20	5
B में विद्यार्थियों की संख्या :	10	15	10	5

Sol.



Ex.14 निम्न ग्राफ को पढ़कर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



- (i) उपरोक्त बार ग्राफ से क्या जानकारी मिलती है ?
(ii) सन् 1980-81 में चावल उत्पादन कितना था ?
(iii) समयान्तराल 1978-1983 में अधिकतम तथा न्यूनतम उत्पादन का अन्तर कितना है ?

Sol. (i) यह बार ग्राफ समय अन्तराल 1978-1983 में चावल उत्पादन को दर्शाता है।

(ii) सन् 1980-81 में आयत की लम्बाई = 55 है।

अतः 1980-81 में चावल उत्पादन 55 लाख टन है।

(iii) 1981-82 में चावल उत्पादन अधिकतम 65 लाख टन है। तथा 1979-80 में उत्पादन न्यूनतम है जो 25 लाख टन है।

अतः अधिकतम तथा न्यूनतम उत्पादन में अन्तर
= 65 – 25 = 40 लाख टन

➤ आयत चित्र

यह वर्ग अन्तराल वाले बारम्बारता बंटन का वह ग्राफीय निरूपण है जो आयतों द्वारा दर्शाया जाता है, दो क्रमागत आयतों में कोई अन्तराल नहीं होता तथा इनकी ऊँचाई, बारम्बारताओं के अनुपात में होती है।

◆ सतत् वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र की रचना

- (i) एक ग्राफ पेपर पर दो परस्पर लम्बवत रेखाएँ एक क्षैतिज तथा दूसरी उर्ध्वाधर खींचीए। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु को O तथा रेखाओं को OX तथा OY लिखिए।
(ii) क्षैतिज रेखा OX को X-अक्ष तथा उर्ध्वाधर रेखा OY को Y-लिखिए।
(iii) उचित पैमाना मानकर X-अक्ष पर वर्ग सीमाएँ अंकित कीजिए।
(iv) उचित पैमाना मानकर Y-अक्ष पर वर्ग सीमाएँ अंकित कीजिए।
(v) अब अधार पर वर्ग अन्तराल तथा संगत बारम्बारता के अनुसार ऊँचाई लेकर आयत बनाइए।

◆ वर्गों के भिन्न वर्ग अन्तराल हो तब सतत् वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र की रचना.

- (i) एक ग्राफ पेपर पर दो परस्पर लम्बवत रेखाएँ एक क्षैतिज तथा दूसरी उर्ध्वाधर खींचीए। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु को O तथा रेखाओं को OX तथा OY लिखिए।
(ii) क्षैतिज रेखा OX को X-अक्ष तथा उर्ध्वाधर रेखा OY को Y-लिखिए।
(iii) उचित पैमाना मानकर X-अक्ष पर वर्ग सीमाएँ अंकित कीजिए।
(iv) अब न्यूनतम वर्ग को चुनिए जिसकी वर्ग चौड़ाई h न्यूनतम है।
(v) अब निम्न सूत्र की सहायता से प्रत्येक बारम्बारताओं को पुनर्व्यवस्थित कीजिए।

$$\text{व्यवस्थित बारम्बारता} = \frac{h}{\text{वर्ग चौड़ाई}} \times \text{वर्ग की बारम्बारता}$$

यही व्यवस्थित बारम्बारता, आयत चित्र में आयतों की ऊँचाईयाँ है परन्तु आयतों की चौड़ाई वर्ग सीमाओं के अनुसार ही रहेगी।

- (vi) उचित पैमाना मानकर Y-अक्ष पर वर्ग सीमाएँ अंकित कीजिए।
(vii) अब अधार पर वर्ग अन्तराल तथा संगत बारम्बारता के अनुसार ऊँचाई लेकर आयत बनाइए।

◆ वर्गों के मध्य बिन्दु दिए हो तब आयत चित्र की रचना

- (i) द्वितीय तथा प्रथम मध्य बिन्दु का अन्तर ज्ञात कीजिए माना यह h है।
(ii) इसे 2 से विभाजित कीजिए।
(iii) अब प्रथम मध्य बिन्दु से $\frac{h}{2}$ को घटाइए। जिससे प्रथम वर्ग की निम्न सीमा प्राप्त होगी तथा प्रथम मध्य बिन्दु में $\frac{h}{2}$ को जोड़ने पर ऊपरी सीमा प्राप्त होगी
(iv) अब प्रथम तीन पद अन्य मध्य बिन्दुओं के साथ दोहराइए।

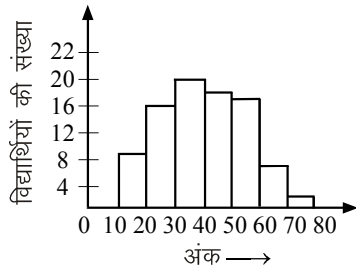
◆ उदाहरण ◆

Ex.15 निम्न तालिका 100 विद्यार्थियों द्वारा प्रवेश परीक्षा में प्राप्तांकों को दर्शाती है।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (बारम्बारता)
0-10	4
10-20	10
20-30	16
30-40	22
40-50	20
50-60	18
60-70	8
70-80	2

उपरोक्त को आयत चित्र में दर्शाइए।

Sol. वर्ग सीमाओं को X-अक्ष तथा बारम्बारताओं को Y-अक्ष पर उचित पैमाना लेकर दर्शाते हैं।



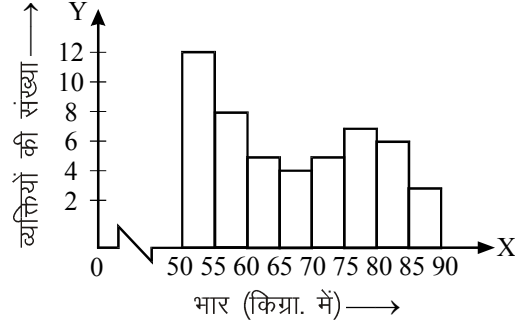
Ex.16 निम्न बंटन 50 व्यक्तियों के भार (कि.ग्रा. में) दर्शाता है।

भार (कि. ग्रा. में)	व्यक्तियों की संख्या
50-55	12
55-60	8
60-65	5
65-70	4
70-75	5
75-80	7
80-85	6
85-90	3

उपरोक्त के लिए आयत चित्र बनाइए।

Sol. वर्ग सीमाओं को X-अक्ष तथा बारम्बारताओं को Y-अक्ष पर उचित पैमाना लेकर दर्शाते हैं।

∴ पैमाना X-अक्ष पर 50 से शुरू होता है अतः मूलबिन्दु के पास एक टूटी हुई रेखा (kink) बनाई गई है जो यह दर्शाती है कि पैमाना 50 से शुरू हुआ है 0 से नहीं



Ex.17 निम्न आंकड़ों को आयत चित्र द्वारा दर्शाइए।

साप्ताहिक खर्च (रु. में)	कर्मचारियों की संख्या (बारम्बारता):
10-15	7
15-20	9
20-25	8
25-30	5
30-40	12
40-60	12
60-80	8

Sol. यहाँ वर्ग अन्तराल एक समान चौड़ाई के नहीं है। अतः प्रत्येक वर्ग के लिए व्यवस्थित बारम्बारता ज्ञात करेंगे।

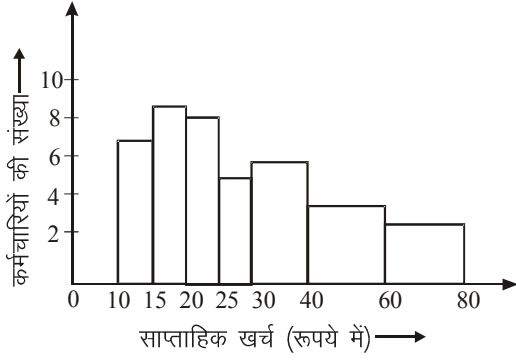
न्यूनतम वर्ग चौड़ाई $15 - 10 = 5$ है।

अतः सूत्र

$$= \frac{\text{न्यूनतम वर्ग चौड़ाई}}{\text{वर्ग चौड़ाई}} \times \text{वर्ग की बारम्बारता}$$

से निम्न सारणी प्राप्त होती है।

साप्ताहिक खर्च (रु.)	व्यवस्थित बारम्बारता
10-15 7	$\frac{5}{5} \times 7 = 7$
15-20 9	$\frac{5}{5} \times 9 = 9$
20-25 8	$\frac{5}{5} \times 8 = 8$
25-30 5	$\frac{5}{5} \times 5 = 5$
30-45 12	$\frac{5}{10} \times 12 = 6$
40-60 12	$\frac{5}{20} \times 12 = 3$
60-80 8	$\frac{5}{20} \times 8 = 2$



Ex.18 निम्न सारणी में विद्यार्थियों के अंको के लिए आयत चित्र बनाइए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	8
10-30	32
30-45	18
45-50	10
50-60	6

Sol. न्यूनतम वर्ग आकार = 5

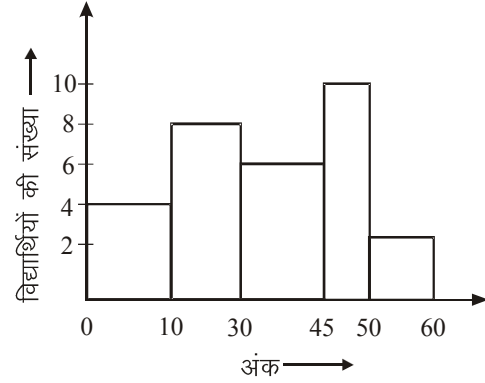
हम निम्न सूत्र की सहायता से बारम्बारताओं को पुनर्व्यवस्थित करेंगे।

वर्ग की नई बारम्बारता

$$= \frac{\text{न्यूनतम वर्ग आकार}}{\text{वर्ग आकार}} \times \text{वर्ग की बारम्बारता}$$

नई बारम्बारता सारणी निम्न है

वर्ग अन्तराल	विद्यार्थियों की संख्या (बारम्बारता)	पुनर्व्यवस्थित बारम्बारता
0-10	8	$\frac{5}{10} \times 8 = 4$
10-30	32	$\frac{5}{20} \times 32 = 8$
30-45	18	$\frac{5}{15} \times 18 = 6$
45-50	10	$\frac{5}{5} \times 10 = 10$
50-60	6	$\frac{5}{10} \times 6 = 3$



Ex.19 65 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न सारणी में दिए गए हैं। इस बंटन के लिए आयत चित्र बनाइए।

अंक (मध्य बिन्दु)	विद्यार्थियों की संख्या
150	8
160	10
170	25
180	12
190	7
200	3

Sol. प्रथम दो मध्य बिन्दुओं का अन्तर

$$160 - 150 = 10.$$

$$\therefore h = 10$$

$$\Rightarrow \frac{h}{2} = 5.$$

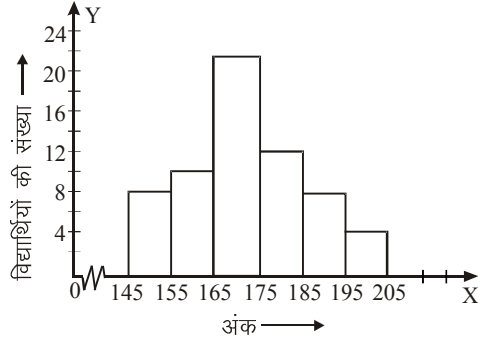
अतः प्रथम वर्ग की निम्न सीमा तथा ऊपरी सीमा क्रमशः $150 - 5$ तथा $150 + 5$ या 145 तथा 155 है।

\therefore अतः प्रथम वर्ग 145 - 155 है।

इसी विधि को अन्य मध्य बिन्दुओं के साथ दोहराने पर अन्य वर्ग सीमाएँ प्राप्त होती हैं।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
145-155	8
155-165	10
165-175	25
175-185	12
185-195	7
195-205	3

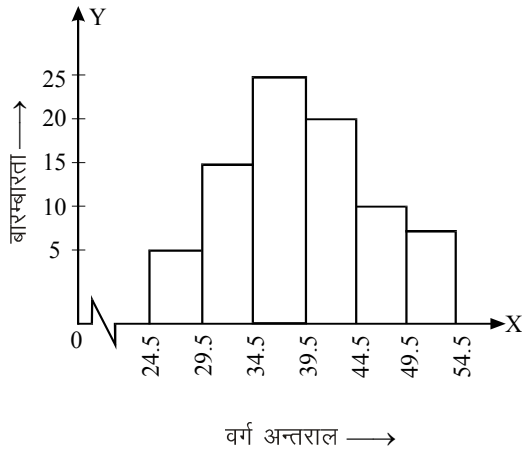
उपरोक्त बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र निम्न है



Ex.20 निम्न आंकड़ों के लिए आयत चित्र बनाइए।

वर्ग	बारम्बारता
25-29	5
30-34	15
35-39	23
40-44	20
45-49	10
50-54	7

उपरोक्त के लिए आयत चित्र निम्न है

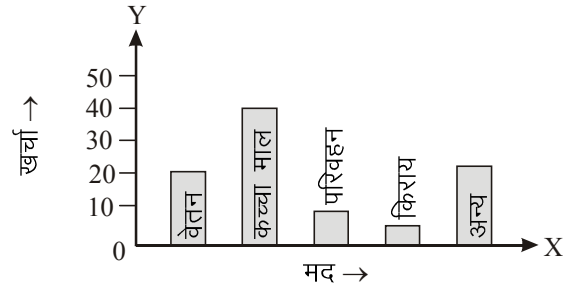


Ex.21 एक कम्पनी के विभिन्न मदों पर खर्च (मिलियन रुपये में) निम्न है।

मद	खर्चा
वेतन	20
कच्चा माल	40
परिवहन	10
किराया	5
अन्य	15

उपरोक्त लिए अन्तराल वाला आयत चित्र (बार ग्राफ) बनाइए।

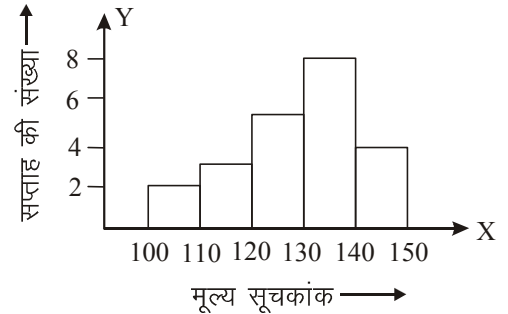
Sol.



Ex.22 निम्न के लिए आयत चित्र खींचिए।

मूल्य सूचकांक	सप्ताह की संख्या
100-110	2
110-120	3
120-130	5
130-140	8
140-150	4

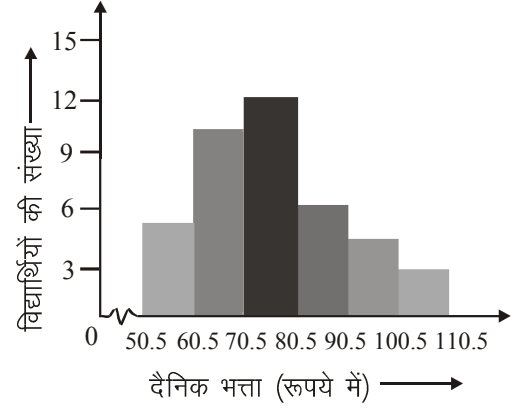
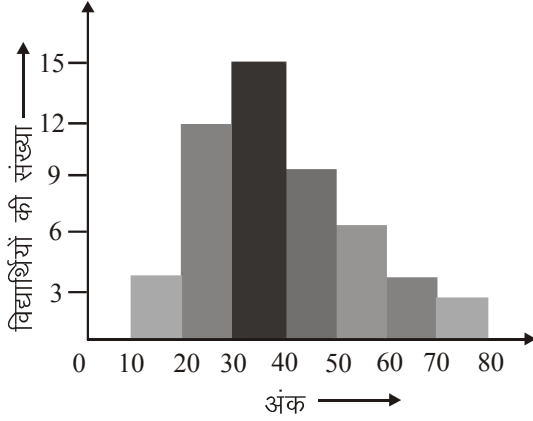
Sol. आवश्यक आयत चित्र निम्न है



Ex.23 50 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांकों के लिए आयत चित्र बनाइए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10-20	4
20-30	12
30-40	15
40-50	8
50-60	5
60-70	4
70-80	2

Sol. वर्ग अन्तरालों को X-अक्ष तथा विद्यार्थियों की संख्या को Y-अक्ष पर लेने पर



Ex.24 40 कर्मचारियों के दैनिक भत्ते निम्न प्रकार है।

दैनिक भत्ते (रूपये में)	कर्मचारियों की संख्या
51-60	5
61-70	10
71-80	12
81-90	6
91-100	4
101-110	3

Sol. दिया गया बंटन असतत है अतः हमें इसे सतत बंटन में बदलना है। प्रथम वर्ग की ऊपरी तथा द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा का 1 है अतः प्रथम वर्ग की सीमाएँ 50.5 तथा 60.5 है। अन्य वर्गों की सीमाएँ भी इसी प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

दैनिक भत्ते (रूपये में)	कर्मचारियों की संख्या
50.5 – 60.5	5
60.5 – 70.5	10
70.5 – 80.5	12
80.5 – 90.5	6
90.5 – 100.5	4
100.5 – 110.5	3

आयत चित्र निम्न है .

दैनिक भत्ता क्षैतिज अक्ष पर तथा कर्मचारियों की संख्या ऊर्ध्वाधर अक्ष पर अंकित है। \therefore क्षैतिज अक्ष पर प्रारम्भिक बिन्दु 50.5 (पैमाने के अनुसार शून्य नहीं है) है अतः मूल बिन्दु के पास kink (break) अंकित है।

► बारम्बारता बहुभुज

आयत चित्र के आयतों के ऊपरी क्षैतिज भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त बहुभुज ही बारम्बारता बहुभुज कहलाता है।

◆ बारम्बारता बहुभुज की आयत चित्र की सहायता से रचना :

- बारम्बारता बंटन प्राप्त करके इससे प्रदर्शित होने वाला आयत चित्र प्राप्त कीजिए।
- आयतों के उपरि भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को अंकित कीजिए।
- अब इन मध्य बिन्दुओं को क्रमिक रूप से बिन्दु रेखा द्वारा मिलाइए।
- अब शून्य बारम्बारता वाले दो वर्ग समूहों (जो x-अक्ष पर है), प्रथम आयत के आसन्न बायी ओर तथा अन्तिम आयत के आसन्न दायी ओर के मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए
ये वर्ग समूह काल्पनिक वर्ग समूह कहलाते हैं।
- अब प्रथम आयत तथा अन्तिम आयत की मध्य बिन्दुओं को काल्पनिक वर्ग समूह के मध्य बिन्दुओं से मिलाकर बहुभुज पूरा करें।

◆ आयत चित्र की सहायता के बिना बारम्बारता बहुभुज बनाना :

- बारम्बारता बंटन ज्ञात कीजिए
- वर्गसमूहों के मध्य बिन्दु अर्थात् वर्ग चिन्ह ज्ञात कीजिए।

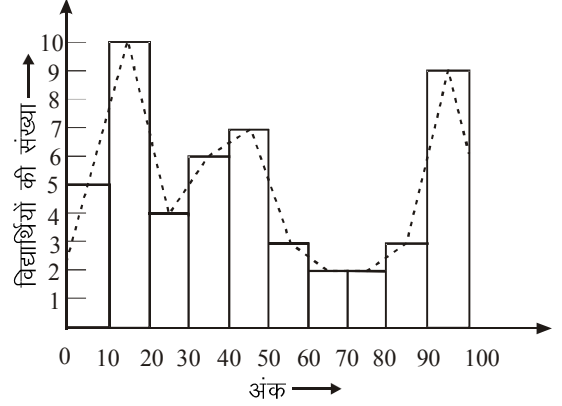
- (iii) उचित पैमाना लेकर वर्ग चिन्ह को X-अक्ष पर अंकित कीजिए।
- (iv) बारम्बारताओं को उचित पैमाना लेकर Y-अक्ष पर अंकित कीजिए।
- (v) बिन्दुओं (x_i, f_i) को अंकित कीजिए जहाँ x_i वर्ग चिन्हों तथा f_i बारम्बारताओं को दर्शाता है
- (vi) अब पद V में प्राप्त बिन्दुओं को रेखाखण्डों द्वारा मिलाइए।
- (vii) अब प्रारम्भ तथा अन्त में शून्य बारम्बारताओं वाले वर्ग समूह कीजिए तथा उनके मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।
- (viii) अब प्रथम काल्पनिक वर्ग समूहों के मध्य प्रारम्भ करते हुए सभी मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बारम्बारता बहुभुज सभी प्राप्त कीजिए।

❖ उदाहरण ❖

Ex.25 निम्न आँकड़ों के लिए, आयत चित्र तथा बारम्बारता बहुभुज बनाइए :

अंक :	विद्यार्थियों की संख्या:
0-10	5
10-20	10
20-30	4
30-40	6
40-50	7
50-60	3
60-70	2
70-80	2
80-90	3
90-100	9

Sol. निम्न ग्राफ में आयत चित्र तथा बारम्बारता बहुभुज (बिन्दु रेखा द्वारा) समान स्केल द्वारा दर्शाए गए हैं

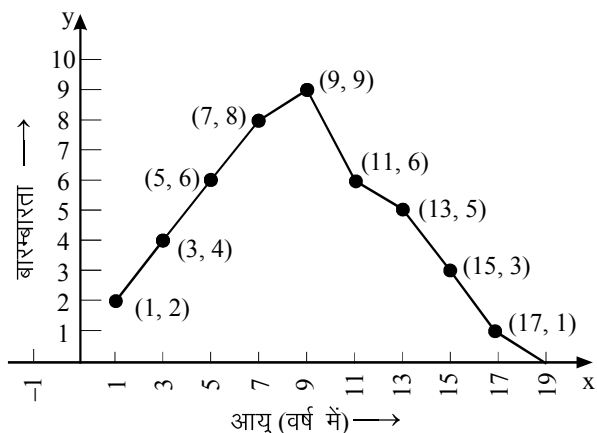


Ex.26 निम्न आँकड़ों के लिए बारम्बारता बहुभुज बनाइए।

आयु (वर्षों में) :	बारम्बारता :
0-2	2
2-4	4
4-6	6
6-8	8
8-10	9
10-12	6
12-14	5
14-16	3
16-18	1

Sol. निम्न सारणी में वर्ग चिन्ह ज्ञात किए गए हैं

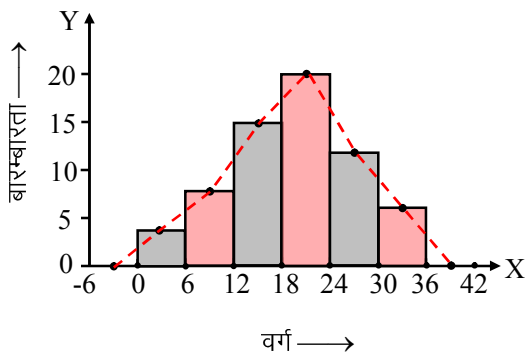
आयु (वर्षों में) :	वर्ग चिन्ह	बारम्बारता
0-2	1	2
2-4	3	4
4-6	5	6
6-8	7	8
8-10	9	9
10-12	11	6
12-14	13	5
14-16	15	3
16-18	17	1



Ex.27 आयत चित्र की सहायता से बारम्बारता बहुभुज बनाइए :

वर्ग	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36
बारम्बारता	4	8	15	20	12	6

Sol. वर्ग $(-6-0)$, $(0-6)$, $(6-12)$, $(12-18)$, $(18-24)$, $(24-30)$, $(30-36)$ तथा $(36-42)$, x-अक्ष पर तथा बारम्बारताएँ 0, 4, 8, 15, 20, 12, 6 तथा 0, y-अक्ष पर दर्शाए गए हैं।



आयत चित्र बनाकर आयत चित्र के आयतों के ऊपरी मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर बहुभुज प्राप्त हुआ जो बिन्दु रेखा द्वारा दर्शाया गया है।

Ex.28 बिना आयत चित्र की सहायता के निम्न आंकड़ों के लिए आयत चित्र बनाइए :

वर्ग	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
बारम्बारता	5	10	20	9	6	2

Sol. दिए गए वर्गों

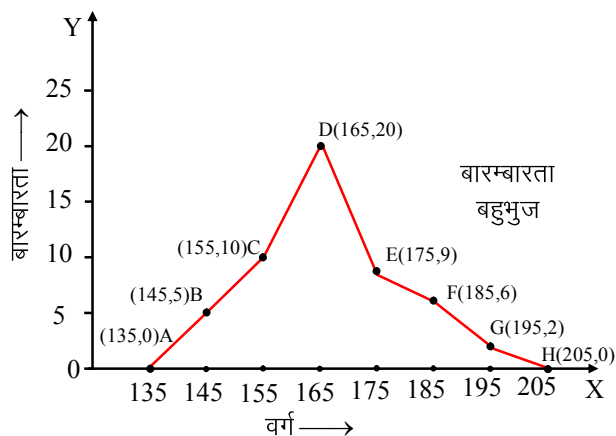
130-140, 140-150, 150-160, 160-170, 170-180, 180-190, 190-200, 200-210 की बारम्बारताएँ क्रमशः 0, 5, 10, 20, 9, 6, 2, 0 हैं।

जिनके वर्गचिन्ह क्रमशः निम्न हैं

$$\frac{130+140}{2} = 135, \frac{140+150}{2} = 145, \dots, \dots,$$

$$\frac{200+210}{2} = 205$$

वर्ग चिन्हों को x-अक्ष तथा बारम्बारताओं को y-अक्ष पर लेने पर निम्न बिन्दुओं को अंकित किया। $(135, 0)$, $(145, 5)$, $(155, 10)$, $(165, 20)$, $(175, 9)$, $(185, 6)$, $(195, 2)$ तथा $(205, 0)$ अब इन बिन्दुओं को मिलाने पर अभीष्ट बहुभुज ABCDEFGH प्राप्त हुआ जो निम्न है



Ex.29 दो खेल समूह के सदस्यों की आयु (वर्षों में) निम्न प्रकार है :

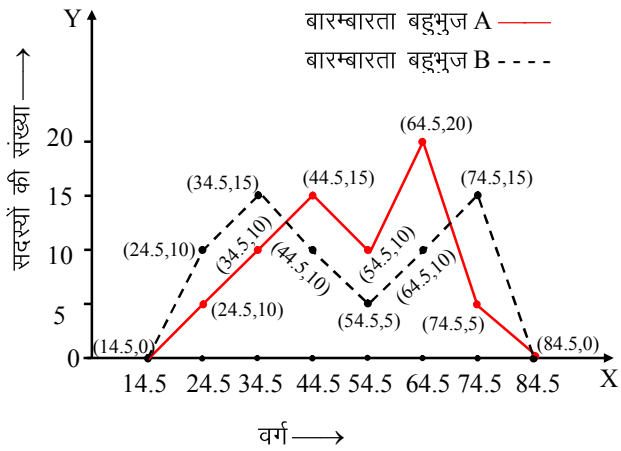
आयु (वर्षों में)	समूह A में सदस्यों की संख्या	समूह B में सदस्यों की संख्या
20-29	5	10
30-39	10	15
40-49	15	10
50-59	10	5
60-69	20	10
70-79	5	15
कुल	65	65

एक ही ग्राफ पर दोनों समूहों A व B के लिए बारम्बारता बहुभुज बनाइए। सदस्यों की आयु के अनुसार इनकी तुलना भी कीजिए।

Sol. वर्गों 20-29, 30-39, 40-49, 50-59, 60-69, 70-79 के वर्ग चिन्ह क्रमशः 24.5, 34.5, 44.5, 54.5, 64.5, 74.5 हैं। समूह A तथा B की बारम्बारताएँ क्रमशः 5, 10, 15, 10, 20, 5 ; 10, 15, 10, 5, 10, 15 हैं।

समूह A के लिए बारम्बारता बहुभुज बनाने के लिए बिन्दुओं (14.5, 0), (24.5, 5), (34.5, 10), (44.5, 15), (54.5, 10), (64.5, 20), (74.5, 5), (84.5, 0).....को अंकित करके मिलाएँगे।

समूह B के लिए बारम्बारता बहुभुज बनाने के लिए बिन्दुओं (14.5, 0), (24.5, 10), (34.5, 15), (44.5, 10), (54.5, 5), (64.5, 10), (74.5, 15), (84.5, 0), को अंकित करके मिलाएँगे।



हम तुलना से पाते हैं कि समूह B में A की तुलना में अधिक युवा हैं।

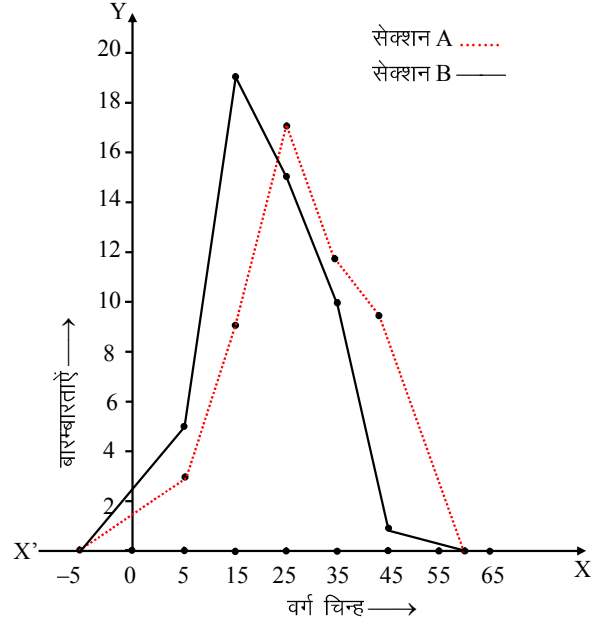
Ex.30 निम्न तालिका, एक ही कक्षा के दो सेक्शन के विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का वर्गीकरण प्रदर्शित करती है।

Section A		Section B	
अंक	बारम्बारता	अंक	बारम्बारता
0-10	3	0-10	5
10-20	9	10-20	19
20-30	17	20-30	15
30-40	12	30-40	10
40-50	9	40-50	1

दोनों सेक्शन के विद्यार्थियों के प्राप्तांकों को एक ही आलेख पर बारम्बारता बहुभुज द्वारा दर्शाया। इन बहुभुजों से प्रदर्शन की तुलना कीजिए।

Sol. सेक्शन A के लिए वर्ग चिन्ह : 5, 15, 25, 35, 45 हैं तथा बारम्बारताएँ क्रमशः 3, 9, 17, 12, 9 हैं।

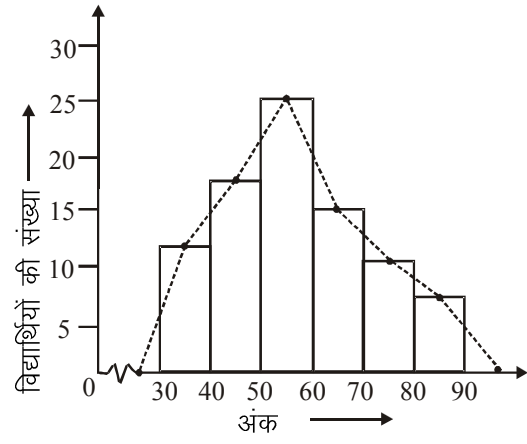
बिन्दुओं (-5, 0), (5, 3), (15, 9), (25, 17), (35, 12), (45, 9) तथा (60, 0) को रेखाखण्डों द्वारा मिलाने पर बारम्बारता बहुभुज प्राप्त होता है। इसी प्रकार सेक्शन B के लिए बारम्बारता बहुभुज बिन्दुओं (-5, 0), (5, 5), (15, 19), (25, 15), (35, 10), (45, 1) तथा (60, 0) को मिलाने से प्राप्त होता है।



Ex.31 निम्न आंकड़ों के लिए बारम्बारता बहुभुज तथा आयत चित्र बनाइए।

अंकों	विद्यार्थियों की संख्या
30-40	12
40-50	18
50-60	26
60-70	16
70-80	10
80-90	6

Sol. बिन्दु रेखा द्वारा बारम्बारता बहुभुज दर्शाया गया है



माध्य

यदि चर X के n मान $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ हैं, तो इन का समान्तर माध्य या माध्य \bar{X} निम्न प्रकार परिभाषित होता है

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

यहाँ चिन्ह $\sum_{i=1}^n x_i$ योग $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ को दर्शाता है।

◆ यदि n प्रेक्षणों x_1, x_2, \dots, x_n का माध्य \bar{X} तब प्रेक्षणों $x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a$ का माध्य $\bar{X} + a$ होता है अर्थात् प्रत्येक प्रेक्षण a से बढ़ने पर माध्य भी a से बढ़ जाता है।

◆ यदि n प्रेक्षणों x_1, x_2, \dots, x_n का माध्य \bar{X} तब प्रेक्षणों ax_1, ax_2, \dots, ax_n का माध्य $a\bar{X}$ होता है जहाँ $a \neq 0$ अर्थात् प्रत्येक प्रेक्षण a गुना हो जाए तो इनका माध्य भी पुराने माध्य का n गुना होता है।

◆ यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ का माध्य \bar{X} तब प्रेक्षणों $\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \frac{x_3}{a}, \dots, \frac{x_n}{a}$ का माध्य $\frac{\bar{X}}{a}$ होता है। जहाँ $a \neq 0$

◆ यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ का माध्य \bar{X} तब प्रेक्षणों $x_1 - a, x_2 - a, \dots, x_n - a$ का माध्य $\bar{X} - a$ होता है। a वास्तविक संख्या है।

समान्तर माध्य के उपयोग

(i) यह समझने में आसान है तथा इसकी गणना आसान है

(ii) यह स्थूल है।

(iii) यह आगे की गणनाओं के लिए उचित है।

(iv) वर्ग बनाने से इस पर अति अल्प प्रभाव पड़ता है

(v) इसकी गणना में सभी प्रेक्षण सारणीबद्ध हो जाती है

कठिनाइयाँ :

(i) इसका मान अतिउच्च या अति अल्प मानों की उपस्थिति से बदलता है।

(ii) एक वस्तु के ना होने पर इसका मान सही नहीं होता।

(iii)

उदाहरण

Ex.32 यदि n प्रेक्षणों $ax_1, ax_2, ax_3, \dots, ax_n$ का माध्य $a\bar{X}$ है, तो प्रदर्शित कीजिए

$$(ax_1 - a\bar{X}) + (ax_2 - a\bar{X}) + \dots + (ax_n - a\bar{X}) = 0$$

Sol. हम जानते हैं

$$a\bar{X} = \frac{ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n}{n}$$

$$\Rightarrow ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n = n(a\bar{X}) \quad \dots(i)$$

$$\begin{aligned} \text{अतः, } & (ax_1 - a\bar{X}) + (ax_2 - a\bar{X}) + \dots + (ax_n - a\bar{X}) \\ & = (ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n) - (a\bar{X} + a\bar{X} + \dots + a\bar{X}) \\ & \qquad \qquad \qquad n - \text{पद} \end{aligned}$$

$$= n(a\bar{X}) - n(a\bar{X}) = 0.$$

Ex.33 यदि 160 प्रेक्षणों का माध्य 40 है। पुनः देखने से पता चला कि 165 की जगह गलती से 125 लिखा गया है। त्रुटि रहित माध्य ज्ञात कीजिए।

Sol. \therefore यहाँ, $n = 40, \bar{X} = 160$

$$\text{अतः, } \bar{X} = \frac{1}{n} \left(\sum x_i \right) \Rightarrow 160 = \frac{1}{40} \left(\sum x_i \right)$$

$$\Rightarrow \sum x_i = 160 \times 40 = 6400$$

$$\Rightarrow \text{त्रुटियुक्त मान } \sum x_i = 6400$$

अतः

$$\text{त्रुटिरहित मान } \sum x_i$$

$$= \text{त्रुटियुक्त मान} - \text{त्रुटियुक्त प्रेक्षण}$$

$$+ \text{त्रुटिरहित प्रेक्षण}$$

$$\Rightarrow \text{त्रुटिरहित मान}$$

$$\sum x_i = 6400 - 125 + 165 = 6440$$

\therefore त्रुटियुक्त मान का माध्य है

$$= \frac{\sum x_i \text{ का त्रुटिरहित मान}}{n} = \frac{6440}{40} = 161$$

Ex.34 10 संख्याओं का माध्य 20 है। यदि प्रत्येक संख्या में से 5 कम कर दिए जाएँ तो नया माध्य ज्ञात कीजिए ?

Sol. माना 10 संख्याएँ x_1, x_2, \dots, x_{10} हैं जिनका माध्य 20 है।

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (\sum x_i)$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 200 \quad \dots(i)$$

नई संख्याएँ $x_1 - 5, x_2 - 5, \dots, x_{10} - 5$.

माना नया माध्य \bar{X}' है

तब,

$$\bar{X}' = \frac{(x_1 - 5) + (x_2 - 5) + \dots + (x_{10} - 5)}{10}$$

$$\bar{X}' = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) - 5 \times 10}{10} = \frac{200 - 50}{10}$$

[समीकरण (i) से]

$$\bar{X}' = 15.$$

❖ उदाहरण ❖

Ex.35 नीता तथा उसकी चार मित्रों के गणित की परीक्षा के प्राप्तांक 65, 78, 82, 94 हैं। इनके प्राप्ताकों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

Sol. समान्तर माध्य या औसत

$$= \frac{65 + 78 + 82 + 94 + 71}{5}$$

$$= \frac{390}{5} = 78$$

अतः समान्तर माध्य = 78

Ex.36 यदि 5, 7, p, 11, 15, 17, तथा 20 का माध्य 12 है, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. माध्य = $\frac{5 + 7 + p + 11 + 15 + 17 + 20}{7}$

$$\Rightarrow 12 = \frac{75 + p}{7}$$

$$\Rightarrow p + 75 = 12 \times 7 \Rightarrow p = 9$$

Ex.37 यदि 5 प्रेक्षणों का माध्य 15 तथा अन्य 10 प्रेक्षणों का माध्य 20 है। सभी 15 प्रेक्षणों का माध्य ज्ञात कीजिए।

Sol. माना पहले पांच प्रेक्षण x_1, \dots, x_5 है।

$$\Rightarrow \text{अतः माध्य} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_5}{5}$$

$$\Rightarrow 15 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_5}{5}$$

$$\Rightarrow x_1 + \dots + x_5 = 75 \quad \dots\dots(i)$$

अन्य 10 प्रेक्षण $y_1 + \dots + y_{10}$ हैं।

$$\Rightarrow \text{माध्य} = \frac{y_1 + \dots + y_{10}}{10}$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{y_1 + \dots + y_{10}}{10}$$

$$y_1 + \dots + y_{10} = 200 \quad \dots\dots(ii)$$

अतः सभी 15 प्रेक्षणों का माध्य

$$\frac{(x_1 + \dots + x_5) + (y_1 + \dots + y_{10})}{15}$$

$$= \frac{75 + 200}{15} \quad \text{((i) व (ii) से)}$$

$$= 18.33$$

यदि चर X के विभिन्न मानों x_1, x_2, \dots, x_n की संगत बारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ हैं, तो समान्तर माध्य

$$\bar{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

या $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N}$, जहाँ $N = \sum_{i=1}^n f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_n$

Ex.38 निम्न बंटन के लिए माध्य ज्ञात कीजिए :

x : 4 6 9 10 15

f : 5 10 10 7 8

Sol. समान्तर माध्य की गणना

x_i	f_i	$f_i x_i$
4	5	20
6	10	60
9	10	90
10	7	70
15	8	120
	$N = \sum f_i = 40$	$\sum f_i x_i = 360$

$$\therefore \text{माध्य} = \bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{360}{40} = 9.$$

Ex.39 निम्न बंटन के लिए माध्य ज्ञात कीजिए :

x	10	30	50	70	89
f	7	8	10	15	10

Sol. समान्तर माध्य की गणना

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	7	70
30	8	240
50	10	500
70	15	1050
89	10	890
	$\Sigma f_i = N = 50$	$\Sigma f_i x_i = 2750$

$$\therefore \text{माध्य} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{2750}{50} = 55.$$

Ex.40 यदि निम्न बंटन का माध्य 7.5 है, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

x :	3	5	7	9	11	13
y :	6	8	15	P	8	4

Sol.

x_i	f_i	$f_i x_i$
3	6	18
5	8	40
7	15	105
9	p	9p
11	8	88
13	4	52
	$N = \Sigma f_i = 41 + p$	$\Sigma f_i x_i = 303 + 9p$

$$\Sigma f_i = 41 + p, \Sigma f_i x_i = 303 + 9p$$

$$\therefore \text{माध्य} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} \Rightarrow 7.5 = \frac{303 + 9p}{41 + p}$$

$$\Rightarrow 7.5 \times (41 + p) = 303 + 9p$$

$$\Rightarrow 307.5 + 7.5p = 303 + 9p$$

$$\Rightarrow 9p - 7.5p = 307.5 - 303$$

$$\Rightarrow 1.5p = 4.5 \Rightarrow p = 3$$

Ex.41 अज्ञात राशियाँ ज्ञात करो यदि निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य 1.46 है।

दुर्घटनाओं की संख्या	0	1	2	3	4	5	कुल
बारम्बारता (f) :	46	?	?	25	10	5	200

Sol. माना अज्ञात बारम्बारताएँ f_1 व f_2 हैं।

x_i	f_i	$f_i x_i$
0	46	0
1	f_1	f_1
2	f_2	75
3	25	$2f_2$
4	10	40
5	5	25
	$N = 86 + f_1 + f_2$	$\Sigma f_i x_i = 140 + f_1 + 2f_2$

यहाँ : $N = 200$

$$\therefore 200 = 86 + f_1 + f_2 \Rightarrow f_1 + f_2 = 114 \dots(i)$$

तथा,

$$\text{माध्य} = 1.46$$

$$\Rightarrow 1.46 = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} \Rightarrow 1.46 = \frac{140 + f_1 + 2f_2}{200}$$

$$\Rightarrow 292 = 140 + f_1 + 2f_2$$

$$\Rightarrow f_1 + 2f_2 = 152 \dots(ii)$$

(i) व (ii) को हल करने पर $f_1 = 76$ तथा $f_2 = 38$.

Ex.42 यदि निम्न आँकड़ों का माध्य 9.2 है, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

x	4	6	7	p+4	12	12
f	5	6	4	10	8	7

Sol.

x	f	f.x
4	5	20
6	6	36
7	4	28
p+4	10	10p + 40
12	8	96
14	7	98
कुल	40	318 + 10p

अतः,

$$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{\Sigma f.x}{\Sigma f} = \frac{318 + 10.p}{40}$$

$$\therefore 9.2 = \frac{318 + 10.p}{40}$$

$$\Rightarrow 318 + 10.p = 368$$

$$\Rightarrow 10p = 50 \Rightarrow p = 5$$

Ex.43 30 विद्यार्थियों के अंक निम्न प्रकार हैं। इनका माध्य ज्ञात करो।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10	4
11	3
12	8
13	6
14	7
15	2

Sol.

x	f	fx
10	4	40
11	3	33
12	8	96
13	6	78
14	7	98
15	2	30
	$\Sigma f = 30$	$\Sigma fx = 375$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{375}{30} = 12.5$$

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन

माध्य ज्ञात करने की तीन विधियाँ हैं :

1. साधारण विधि
2. कल्पित माध्य विचलन विधि
3. पद विचलन विधि

◇ माध्य की साधारण विधि

मध्यमान	बारम्बारता	$f_i x_i$
x_1	f_1	$f_1 x_1$
x_2	f_2	$f_2 x_2$
\vdots	\vdots	\vdots
x_k	f_k	$f_k x_k$
कुल	N	$\sum_{i=1}^k f_i x_i$

इस विधि के अनुसार

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i x_i$$

$$[N = f_1 + f_2 + \dots + f_k]$$

◇ उदाहरण ◇

Ex.44

मध्यमान	2	3	4	5	6
बारम्बारता	49	43	57	38	13

साधारण विधि द्वारा माध्य ज्ञात कीजिए।

Sol.

मध्यमान	बारम्बारता (f_i)	$f_i x_i$
2	49	98
3	43	129
4	57	228
5	38	190
6	13	78
कुल	$N = \Sigma f_i = 200$	$\Sigma f_i x_i = 723$

$$\begin{aligned} \text{माध्य} &= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{723}{200} \\ &= 3.615 \end{aligned}$$

Ex.45 निम्नलिखित बारम्बारता बंटन से माध्य ज्ञात कीजिए :

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
10 – 30	90
30 – 50	20
50 – 70	30
70 – 90	20
90 – 110	40

Sol.

वर्ग अन्तराल	f	मध्यमान (x)	fx
10 – 30	90	20	1800
30 – 50	20	40	800
50 – 70	30	60	1800
70 – 90	20	80	1600
90 – 110	40	100	4000
	$\Sigma f = 200$		$\Sigma fx = 10000$

$$\begin{aligned} \text{माध्य } (\bar{x}) &= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \\ &= \frac{10000}{200} = 50 \end{aligned}$$

Ex.46 विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा वातावरण जागरण अभियान के अन्तर्गत एक सर्वे करवाया गया जिसमें 20 घरों में पौधों की संख्याओं को एकत्रित किया। प्रति घर पौधों का माध्य ज्ञात कीजिए।

पौधों की संख्या	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

Sol.

पौधों की संख्या	घरों की संख्या (f)	मध्यमान x	fx
0-2	1	1	1
2-4	2	3	6
4-6	1	5	5
6-8	5	7	35
8-10	6	9	54
10-12	2	11	22
12-14	3	13	39
	$\Sigma f = 20$		$\Sigma fx = 162$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{162}{20} = 8.1$$

माधिका

चर का वह मान जो दिए गए बंटन को दो समान भागों में इस प्रकार विभाजित करता है कि इसके पहले के प्रेक्षणों की संख्या, बाद के प्रेक्षणों की संख्या के समान हों।

◆ यदि चर x_i के यथा प्राप्त आंकड़े बढ़ते या घटते क्रम में हों, तो x के मानों का मध्य मान ही माधिका होता है

विधि :

पद I : चर के दिए गए मानों को बढ़ते या घटते क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

पद II : प्रेक्षणों की कुल संख्या n ज्ञात कीजिए।

पद III : यदि n विषम है तब

$$\text{माधिका} = \left(\frac{n+1}{2} \right) \text{वाँ पद}$$

यदि n सम है, तब
माधिका

$$= \frac{\text{माधिका} \left(\frac{n}{2} \right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{वाँ पद}}{2}$$

◆ माधिका को आलेख विधि से भी प्राप्त कर सकते हैं।

◆ माधिका, चरम मानों से प्रभावित नहीं होती।

❖ उदाहरण ❖

Ex.47 निम्न आंकड़ों की माधिका ज्ञात कीजिए :

25, 34, 31, 23, 22, 26, 35, 28, 20, 32

Sol. आंकड़ों को बढ़ते क्रम में लिखने पर 20, 22, 23,

25, 26, 28, 31, 32, 34, 35

यहाँ आंकड़ों की संख्या $n = 10$ (सम)

∴ माधिका

$$= \frac{\text{माधिका} \left(\frac{10}{2} \right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2} + 1 \right) \text{वाँ पद}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{माधिका} = \frac{5 \text{वाँ पद} + 6 \text{ठा पद}}{2}$$

$$\therefore \text{माधिका} = \frac{26 + 28}{2} = 27$$

अतः माध्यिका 27 है।

Ex.48 निम्न मानों के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिए :

37, 31, 42, 43, 46, 25, 39, 45, 32

Sol. आंकड़ों को आरोही क्रम में जमाने पर 25, 31, 32, 37, 39, 42, 43, 45, 46
यहाँ आंकड़ों की संख्या $n = 9$ (विषम)

$$\therefore \text{माध्यिका} = \left(\frac{9+1}{2}\right)\text{प्रेक्षण}$$

$$= 5 \text{ वाँ प्रेक्षण} = 39.$$

Ex.49 यदि 11, 12, 14, 18, $x + 2$, $x + 4$, 30, 32, 35, 41 आरोही क्रम में हैं तथा माध्यिका 24 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. प्रेक्षणों की संख्या $n = 10$ (सम)

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{प्रेक्षण} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\text{प्रेक्षण}}{2}$$

$$\Rightarrow 24 = \frac{5^{\text{th}}\text{प्रेक्षण} + 6^{\text{th}}\text{प्रेक्षण}}{2}$$

$$\Rightarrow 24 = \frac{(x+2) + (x+4)}{2}$$

$$\Rightarrow 24 = \frac{2x+6}{2}$$

$$\Rightarrow 24 = x + 3$$

$$\Rightarrow x = 21.$$

अतः, $x = 21$.

Ex.50 निम्न आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए: 19, 25, 59, 48, 35, 31, 30, 32, 51. यदि 25 को 52 से बदल दिया जाए, तो नई माध्यिका भी ज्ञात कीजिए।

Sol. आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर 19, 25, 30, 31, 32, 35, 48, 51, 59
यहाँ $n = 9$ (विषम)

$$\text{अतः माध्यिका} = \left(\frac{9+1}{2}\right) \text{वाँ प्रेक्षण}$$

$$\Rightarrow \text{माध्यिका} = 5 \text{ वाँ प्रेक्षण}$$

$$= 32.$$

अतः माध्यिका

$$= 32$$

यदि 25 को 52 से बदल दें तो संख्याओं का नया क्रम :

19, 30, 31, 32, 35, 48, 51, 52, 59

\therefore नई माध्यिका = 5 वाँ प्रेक्षण = 35.

Ex.51 निम्न वर्गीकरण के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिए

भार (kg में)	विद्यार्थियों की संख्या
46	3
47	2
48	4
49	6
50	5
51	2
52	1

Sol. संचयी बारम्बारता सारणी:

भार x_i	विद्यार्थियों की संख्या f_i	Cf
46	3	3
47	2	5
48	4	9
49	6	15
50	5	20
51	2	22
52	1	23

यहाँ, $n = 23$, (विषम)

$$\text{माध्यिका} = t_{\frac{23+1}{2}} = t_{12} = 49$$

(अर्थात् 12 वें विद्यार्थी का भार)

Ex.52 निम्न प्रेक्षणों को अवरोही क्रम में दर्शाया गया है, जो 75, 70, 68, $x + 2$, $x - 2$, 50, 45, 40 हैं।

यदि इनकी माध्यिका 60 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ प्रेक्षणों की संख्या 8 है अतः यहाँ माध्यिका 4th तथा 5th प्रेक्षण के माध्य के समान होगी

$$\Rightarrow \text{अतः माध्यिका} = \frac{(x+2) + (x-2)}{2}$$

$$\Rightarrow 60 = \frac{2x}{2} \Rightarrow x = 60$$

बहुलक

◆ चर का वह मान जिसकी बारम्बारता अधिकतम हो, बहुलक कहलाता है तथा बंटन के अन्य प्रेक्षण इस मान के आसपास होते हैं।

विधि

पद I : प्रेक्षणों को प्राप्त कीजिए।

पद II : बारम्बारता सारणी बनाइए।

पद III : अधिकतम बारम्बारता वाला प्रेक्षण (x) ज्ञात कीजिए।

पद IV : यही बहुलक है।

Ex.53 निम्न का बहुलक ज्ञात कीजिए :
110, 120, 130, 120, 110, 140, 130, 120, 140, 120.

Sol. बारम्बारता सारणी :

मान	गणना चिन्ह	बारम्बारता
110		2
120		4
130		2
140		2

∴ प्रेक्षण 120 की बारम्बारता अधिकतम (4) है।

अतः बहुलक 120 है।

Ex.54 निम्न आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 13

Sol. यहाँ 8 तथा 10 दोनों की बारम्बारता 3 (अधिकतम) है
अतः हम निम्न प्रकार से बहुलक ज्ञात करेंगे।

$$\text{माध्य} = \frac{7 \times 2 + 8 \times 3 + 9 \times 2 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 + 13 \times 2}{2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 1 + 2}$$

$$= \frac{14 + 24 + 18 + 30 + 22 + 12 + 26}{15} = \frac{146}{15} = 9.73$$

तथा = 15 (विषम)

$$\therefore \text{माध्यिका} = t_{\frac{15+1}{2}} = t_8 = 10$$

∴ बहुलक = 3 माध्यिका - 2 माध्य

$$= 3 \times 10 - 2 \times 9.73 = 30 - 19.46 = 10.54$$

Ex.55 निम्न सारणी 40 पुरुषों के भार दर्शाती है। बहुलक ज्ञात कीजिए

भार (kg में)	पुरुषों की संख्या
54	6
72	6
80	1
64	2
62	6
60	5
58	5
56	4
63	5

Sol. यहाँ 54, 72 तथा 62 की बारम्बारता 6 (अधिकतम) है। अतः हम निम्न विधि द्वारा बहुलक ज्ञात करेंगे।

भार x	पुरुषों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (c.f.)	उत्पाद (f.x)
54	6	6	324
56	4	10	224
58	5	15	290
60	5	20	300
62	6	26	372
63	5	31	315
64	2	33	128
72	6	39	432
80	1	40	80
कुल	40		2465

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma f.x}{\Sigma f} = \frac{2465}{40} = 61.625$$

कुल प्रेक्षण = 40 (सम)

$$\text{माध्यिका} = \frac{t_{20} + t_{21}}{2} = \frac{60 + 62}{2} = 61$$

$$\therefore \text{बहुलक} = 3 \text{ माध्यिका} - 2 \text{ माध्य}$$

$$= 3 \times 61 - 2 \times 61.625$$

$$= 183 - 123.25 = 59.75$$

बहुलक = 59.75 kg