त्रिभुज

7
CHAPTER

CONTENTS (सूची)

- परिचय
- त्रिभुज के लिए कोणों के योग के गुणधर्म
- सर्वांगसम त्रिभुज
- सर्वांगसम त्रिभुज के नियम
- समद्विबाहु त्रिभुज

➤ एक त्रिभुज में (परिचय)

(i) शीर्षलम्बों का प्रतिच्छेदन बिन्दु "लम्बकेन्द्र" (Orthocentre) कहलाता है।

(ii) भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिन्दु "परिकेन्द्र" (Circumcentre) कहलाता है।

(iii) कोणों के समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिन्दु "अन्तःकेन्द्र" (Incentre) कहलाता है।

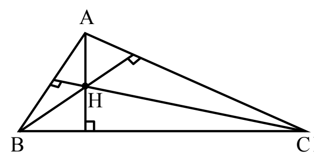
(iv) माध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन बिन्दु "केन्द्रक" (Centroid) कहलाता है।

(v) शीर्षों से समान दूरी पर स्थित बिन्दु "परिकेन्द्र" होता है।

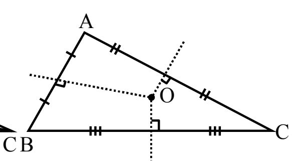
(vi) भुजाओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दु "अन्तःकेन्द्र" होता है।

(vii) केन्द्रक, माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

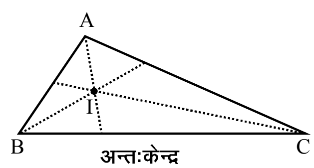
(viii) समकोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र, समकोण बनाने वाला शीर्ष होता है।



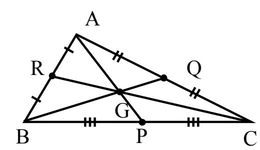
लम्बकेन्द्र
(i)



परिकेन्द्र OA = OB = OC
(ii)



अन्तःकेन्द्र
(iii)



केन्द्रक AG : GP = 2 : 1
(iv)

Note :

(1) समबाहु त्रिभुज में सभी चारों बिन्दु संपाती होते हैं।

(2) लम्बकेन्द्र (H), केन्द्रक (G), परिकेन्द्र (O) सदैव एक रेखीय बिन्दु होते हैं, तथा G ; OH को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

➤ त्रिभुज के लिए कोणों के योग के गुणधर्म

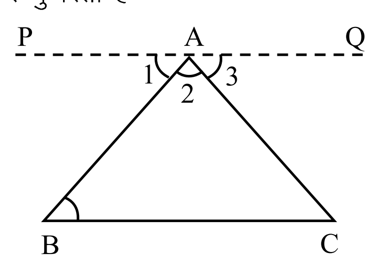
प्रमेय (Theorem) :

सिद्ध करो कि एक त्रिभुज के सभी तीनों कोणों का योग 180° या 2 समकोण होता है।

दिया है (Given) : ΔABC

सिद्ध करना है (To prove) : $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

रचना (Construction) : PQ || BC खींचें जो बिन्दु A से होकर गुजरती है



उपपत्ति (Proof): $\left.\begin{array}{r}\angle 1 = \angle B \\ \text{एवं } \angle 3 = \angle C\end{array}\right\}$ एकान्तरकोण $\because PQ \parallel BC$ ....*(i)*

$\because$ PAQ एक रेखा है

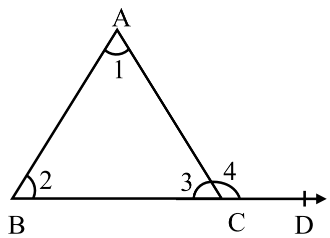
$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (रेखीय युग्म अनुप्रयोग से)

$\angle B + \angle 2 + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle CAB + \angle C = 180°$

= 2 समकोण इतिसिद्धम्

प्रमेय (Theorem) : एक त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाला बाह्य कोण दो सम्मुख अन्तःकोणों के योग के तुल्य होता है।



अर्थात् $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

उपपत्ति (Proof) : $\angle 3 = 180° - (\angle 1 + \angle 2)$ ….(1)

(कोणों के योग गुणधर्म से)

एवं BCD एक रेखा है।

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 180°$ (रेखीय युग्म)

या $\angle 3 = 180° - \angle 4$ …..(2)

(1) तथा (2) से,

$180° - (\angle 1 + \angle 2) = 180° - \angle 4$

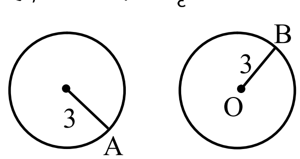
$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ इतिसिद्धम्

➤ सर्वांगसम चित्र

दो ज्यामितीय चित्र जिनकी ठीक एक जैसी आकृति व आकार हो, सर्वांगसम चित्र कहलाते हैं। रेखाएें, बहुभुज, वृत्त आदि सर्वांगसम हो सकते हैं।

Note :

(1) यदि एक वृत्त की त्रिज्या, दूसरे वृत्त की त्रिज्या के समान हो, तो ये दोनों वृत्त सर्वांगसम कहलाते हैं।



(2) दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी लम्बाई समान हो।

➤ सर्वांगसम त्रिभुज

दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि और केवल यदि उनमें से कोई एक त्रिभुज दूसरे को पूर्णतया ढक लेता हैं।

इस प्रकार, सर्वांगसम त्रिभुज ठीक एक समान होते हैं।

उदाहरण 1 : यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ हो तो हम जानते हैं कि :

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$; एवं

AB = DE, BC = EF तथा AC = DE.

उदाहरण 2 : यदि $\Delta ABC \cong \Delta EDF$ तो हम जानते हैं कि:

$\angle A = \angle E, \angle B = \angle D, \angle C = \angle F$; एवं

AB = ED, BC = DF तथा AC = EF.

Note :

(1) प्रत्येक त्रिभुज स्वयं का सर्वांगसम होता है अर्थात् $\Delta ABC \cong \Delta ABC$.

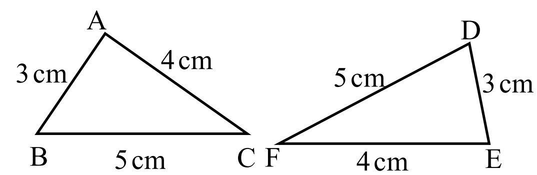
(2) यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ तब $\Delta DEF \cong \Delta ABC$.

(3) यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ एवं $\Delta DEF \cong \Delta PQR$ तब $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

(4) 'c.p.c.t.' से तत्पर्य सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग से है।

➤ सर्वांगसम त्रिभुजों के नियम

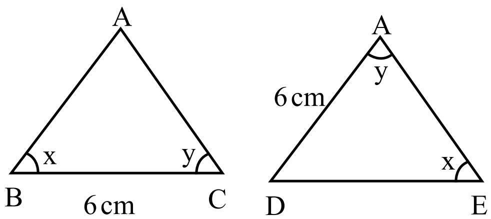
(1) SSS (भुजा भुजा भुजा)



$\therefore$ SSS नियम से $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

$\therefore \angle A = \angle E, \angle B = \angle D, \angle C = \angle F$ (c.p.c.t.)

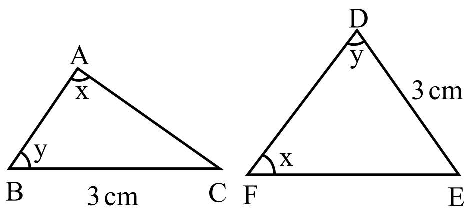
(2) ASA (कोण भुजा कोण)



∴ ASA नियम से $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

∴ $\angle A = \angle D$, $AB = DE$, $AC = DF$ (c.p.c.t.)

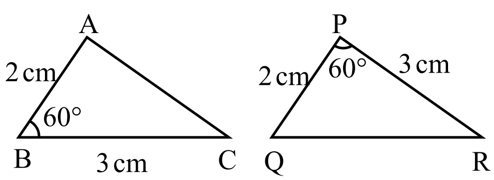
(3) AAS (कोण कोण भुजा)



∴ AAS नियम से $\Delta ABC \cong \Delta FDE$

∴ $\angle C = \angle E$, $AB = FD$, $AC = FE$ (c.p.c.t.)

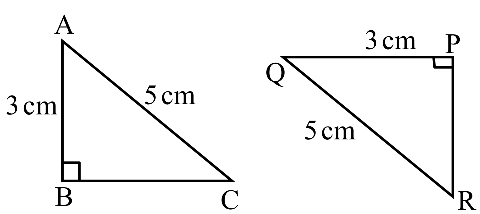
(4) SAS (भुजा कोण भुजा)



SAS नियम से $\Delta ABC \cong \Delta QPR$

∴ $\angle A = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, $AC = QR$ (c.p.c.t.)

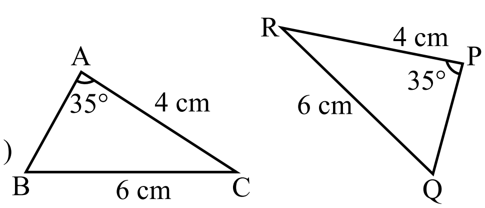
(5) RHS (समकोण कर्ण भुजा)



∴ RHS नियम से $\Delta ABC \cong \Delta QPR$

∴ $\angle A = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, $BC = PR$ (c.p.c.t.)

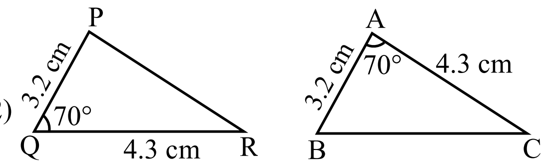
उदा.:(1)



सर्वांगसम नहीं

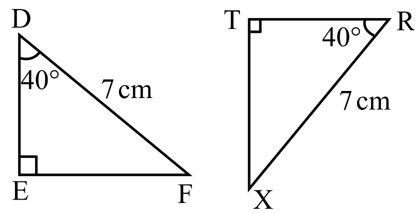
(∵ SSA एक नियम नहीं है)

(2)



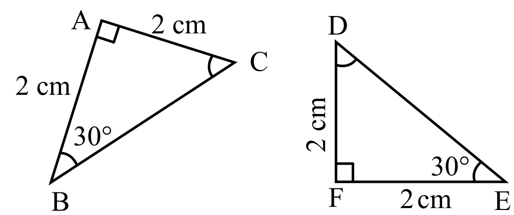
SAS

(3)



AAS (not RHS)

(4)

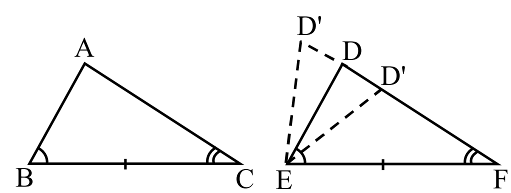


SAS (not RHS)

प्रमेय (Theorem) 1 : एक त्रिभुज के दो कोण तथा सम्मिलित भुजा, दूसरे त्रिभुज के दो कोण तथा सम्मिलित भुजा के तुल्य हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

दिया है (Given) : ΔABC तथा ΔDEF में,

$\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$ तथा $BC = EF$.



सिद्ध करना है (To prove) : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

उपपत्ति (Proof) :

स्थिति-I

मानाकि $AC = DF$.

इस स्थिति में, $AC = DF$, $BC = EF$ व $\angle C = \angle F$.

∴ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS-नियम)

स्थिति-II

यदि संभव हो, मानाकि $AC \neq DF$.

तब रचना कीजिए $D'F = AC$, $D'E$ को मिलाइये।

अब, ΔABC व $\Delta D'EF$ में, हम जानते हैं कि $AC = D'F$, $BC = EF$ व $\angle C = \angle F$.

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta D'EF$ (SAS-नियम से)

$\therefore$ $\angle ABC = \angle D'EF$ (c.p.c.t)

परन्तु $\angle ABC = \angle DEF$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle D'EF = \angle DEF$.

यह केवल तभी संभव है, जबकि D व D' संपाती हों।

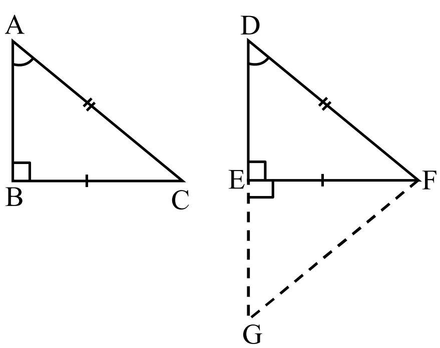
$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

प्रमेय (Theorem) 2 : दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की एक भुजा तथा एक कर्ण दूसरे त्रिभुज की क्रमशः संगत भुजा व कर्ण के तुल्य हों (अर्थात् RHS)

दिया है (Given) : दो समकोण त्रिभुज ΔABC व ΔDEF जिसमें $\angle B = \angle E = 90°$, $BC = EF$ तथा $AC = DF$.

सिद्ध करना है (To prove) : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

रचना (Construction) : DE को G तक बढ़ाइये ताकि $GE = AB$ एवं GF को मिलाइये।



उपपत्ति (Proof) : ΔABC तथा ΔGEF में, :

$AB = GE$ (रचना से),

$BC = EF$ (दिया है), $\angle B = \angle FEG = 90°$

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta GEF$ (SAS-नियम से)

$\therefore$ $\angle A = \angle G$ तथा $AC = GF$ (c.p.c.t.)

अब, $AC = GF$ एवं $AC = DF \Rightarrow GF = DF$

$\Rightarrow \angle G = \angle D \Rightarrow \angle A = \angle D$ $[\because \angle G = \angle A]$

अब, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E \Rightarrow 3^{rd} \angle C = 3^{rd} \angle F$.

इस प्रकार, ΔABC व ΔDEF हम जानते है

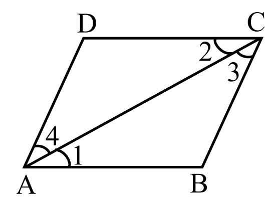
$BC = EF$, $AC = DF$ एवं $\angle C = \angle F$.

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS- नियम से)

❖ **उदाहरण** ❖

उदा.1 सिद्ध करो कि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण इसको दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभक्त करते हैं।

हल. मानाकि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है तथा AC एक विकर्ण है।



(SSS नियम से) : ΔABC तथा ΔADC में,

$AB = CD$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं)

$BC = AD$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ SSS नियम से $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ सिद्ध हुआ

{अन्य परिणाम : $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle B = \angle D$ (c.p.c.t.)}

(ASA नियम से) : ΔABC तथा ΔADC में

$\angle 1 = \angle 2$ (एकान्तर)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

$\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर)

$\therefore$ ASA नियम से $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

{अन्य परिणाम : $\angle B = \angle D$, $AB = CD$, $BC = AD$ (c.p.c.t.)}

(AAS नियम से) : ΔABC तथा ΔADC में

$\angle 1 = \angle 2$ (एकान्तर)

$\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर)

$BC = AD$ (सम्मुख भुजा)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

{अन्य परिणाम : AB = CD, ∠B = ∠D, AC = AC (c.p.c.t.)}

(SAS नियम से) : ΔABC तथा ΔADC में

AB = CD (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं)

∠1 = ∠2 (एकान्तर)

AC = AC (उभयनिष्ठ)

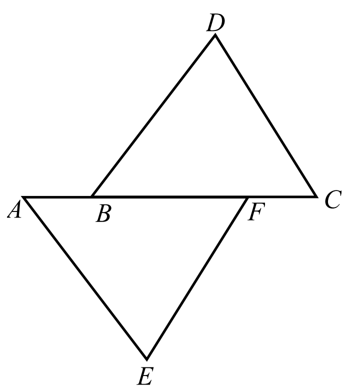
∴ ΔABC ≅ ΔCDA

{अन्य परिणाम: ∠3 = ∠4, BC = AD, ∠B = ∠D (c.p.c.t.}

हम 'RHS' को इस नियम के सत्यापन में प्रयुक्त नहीं करेंगे

Note : ASS या SSA नियम, सर्वांगसमता में लागू नहीं है।

उदा.2 चित्र में, यदि AB = CF, EF = BD एवं ∠AFE = ∠DBC हो तो सिद्ध करो कि ΔAFE ≅ ΔCBD.



उदा. हम जानते हैं कि AB = CF

⇒ AB + BF = CF + BF

⇒ AF = CB .... (i)

Δs AFE तथा CBD में,

AF = CB [से (i)]

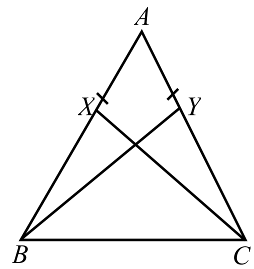
∠AFE = ∠DBC [दिया है]

तथा EF = BD [दिया है]

अतः SAS द्वारा सर्वांगसम नियम से हम जानते हैं कि

ΔAFE ≅ ΔCBD

उदा.3 चित्रानुसार X व Y एक त्रिभुज ΔABC की समान भुजाओं AB व AC पर दो बिन्दु इस प्रकार से हैं कि AX = AY तो सिद्ध करो कि XC = YB.



हल. त्रिभुज AXC व AYB में, हम जानते हैं कि

AX = AY [दिया है]

∠A = ∠A [उभयनिष्ठ कोण]

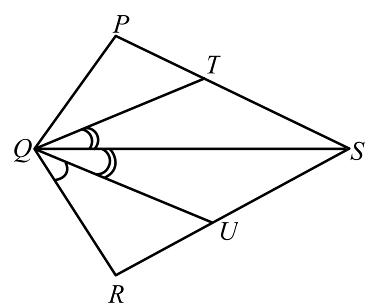
AC = AB [दिया है]

अतः सर्वांगसम के SAS नियम से

ΔAXC ≅ ΔAYB

⇒ XC = YB (c.p.c.t)

उदा.4 यदि चित्र में PQRS एक चतुर्भुज हो तथा T व U क्रमशः PS व RS पर बिन्दु इस प्रकार से हैं कि PQ = RQ, ∠PQT = ∠RQU तथा ∠TQS = ∠UQS तो सिद्ध करो कि QT = QU.



हल. हम जानते हैं कि

∠PQT = ∠RQU

एवं ∠TQS = ∠UQS

∴ ∠PQT + ∠TQS = ∠RQU + ∠UQS

⇒ ∠PQS = ∠RQS .... (i)

इस प्रकार से, त्रिभुज PQS व RQS में,

PQ = RQ [दिया है]

∠PQS = ∠RQS [(i) से]

एवं $QS = QS$ [उभयनिष्ठ भुजा]

इस प्रकार, सर्वांगसम के SAS नियम से, हम जानते हैं कि

$\Delta PQS \cong \Delta RQS$

$\Rightarrow \angle QPS = \angle QRS$

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

$\Rightarrow \angle QPT = \angle QRU$ ....(ii)

अब, त्रिभुज QPT व QRS पर विचार करें, इन दोनों त्रिभुजों में

$QP = QR$ [दिया है]

$\angle PQT = \angle RQU$ [दिया है]

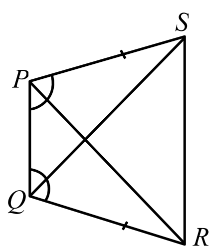
$\angle QPT = \angle QRU$ [(ii) से]

अतः सर्वांगसम नियम ASA से, हम जानते हैं कि

$\Delta QPT \cong \Delta QRU$

$\Rightarrow QT = QU.$

उदा.5 चित्र में, $PS = QR$ व $\angle SPQ = \angle RQP$ हों तो



सिद्ध करो कि $PR = QS$ व $\angle QPR = \angle PQS$.

हल. ΔSPQ व ΔRQP में, हम जानते हैं कि

$PS = QR$ [दिया है]

$\angle SPQ = \angle RQP$ [दिया है]

$PQ = PQ$ [उभयनिष्ठ]

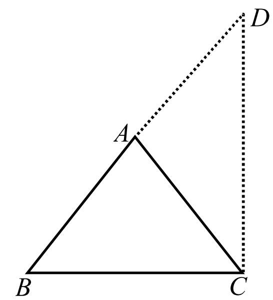
इस प्रकार, सर्वांगसम के नियम SAS से, हम जानते हैं कि

$\Delta SPQ \cong \Delta RQP \Rightarrow SQ = RP$ एवं

$\angle QPR = \angle PQS$

उदा.6 ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। भुजा BA को D तक इस प्रकार बढ़ाया गया हैं कि $AB = AD$ तो सिद्ध करो कि $\angle BCD$ एक समकोण है।

हल. **दिया है (Given) :** एक त्रिभुज ΔABC ऐसा है कि $AB = AC$ तथा भुजा BA को D तक इस प्रकार बढ़ाये कि $AB = AD$.



रचना (Construction) : CD को मिलाइये

सिद्ध करना है (To prove) : $\angle BCD = 90^\circ$

उपपत्ति (Proof) : ΔABC में, हम जानते है कि $AB = AC$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ABC$ ...(i)

[$\because$ समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते हैं]

अब $AB = AD$ [दिया है]

$\therefore AD = AC$ [$\therefore AB = AC$]

इस प्रकार ΔADC में

$AD = AC$

$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC$ …(ii)

[$\because$समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है]

(i) व (ii) को जोड़ने पर, हम पाते है कि

$\angle ACB + \angle ACD = \angle ABC + \angle ADC$

$\Rightarrow \angle BCD = \angle ABC + \angle BDC$

[$\because \angle ADC = \angle BDC, \angle ABC = \angle DBC$]

$\Rightarrow \angle BCD + \angle BCD = \angle DBC + \angle BCD + \angle BDC$

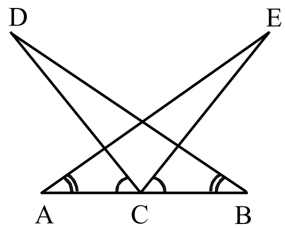
[दोनों तरफ $\angle BCD$ को जोड़ने पर]

$\Rightarrow 2\angle BCD = 180^\circ$

[$\because$एक त्रिभुज Δ के कोणों का योग 180° होता है]

अतः $\angle BCD$ समकोण है।

उदा.7 चित्र में, AC = BC, $\angle DCA = \angle ECB$ व $\angle DBC = \angle EAC$.



सिद्ध करो कि त्रिभुज DBC व EAC सर्वांगसम हैं तथा DC = EC.

हल. हम जानते हैं कि

$\angle DCA = \angle ECB$

$\Rightarrow \angle DCA + \angle ECD = \angle ECB + \angle ECD$

$\Rightarrow \angle ECA = \angle DCB$ .... (i)

अब त्रिभुज DBC व EAC में, हम जानते हैं कि

$\angle DCB = \angle ECA$ [(i) से]

BC = AC [दिया है]

एवं $\angle DBC = \angle EAC$ [दिया है]

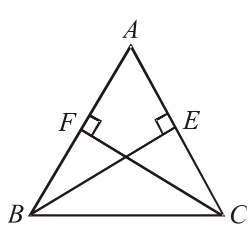
इस प्रकार सर्वांगसम नियम ASA से,

$\Delta DBC \cong \angle EAS$

$\Rightarrow$ DC = EC [∵सर्वांगसम त्रिभुजो के संगत भाग बराबर होते है]

उदा.8 यदि एक त्रिभुज के दो शीर्षो से उनके सम्मुख भुजाओं पर डाले गये शीर्षलम्ब समान हों तो सिद्ध करो कि त्रिभुज समद्विबाहु है।

हल. **दिया है (Given) :** त्रिभुज ΔABC के शीर्षलम्ब BE व CF हैं, जो क्रमशः B व C से भुजाओं AC व AB पर डाले गये हैं, जो एक समान हैं



सिद्ध करना है (To prove) : ΔABC समद्विबाहु है अर्थात् AB = AC

उपपत्ति (Proof) : त्रिभुज Δs ABC व ACF में, हम जानते हैं कि

$\angle AEB = \angle AFC$ [प्रत्येक 90º के बराबर है]

$\angle BAE = \angle CAF$ [उभयनिष्ठ कोण]

तथा BE = CF [दिया गया है]

अतः त्रिभुजों के सर्वांगसम नियम AAS से, हम जानते हैं कि

$\Delta ABE \cong \Delta ACF$

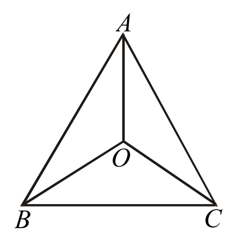
$\Rightarrow$ AB = AC [∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

अतः ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

उदा.9 ΔABC में, AB = AC एवं कोण B व C के समद्विभाजक बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करते हैं, तो सिद्ध करो कि BO = CO एवं रेखा AO कोण BAC का समद्विभाजक है।

हल. ΔABC में, हम जानते हैं कि

AB = AC



$\Rightarrow \angle B = \angle C$

[∵ समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते है]

$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle B = \angle BC\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$ .... (i)

[∵ OB व OC क्रमशः कोणों B व C समद्विभाजक हैं, ∴ $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle B$ तथा $\angle OCB = \frac{1}{2}\angle C$]

$\Rightarrow$ OB = OC ....(ii)

[∵समान कोणों की सम्मुख भुजाऐं भी समान होती है]

अब, ΔABO तथा ΔACO में,

$AB = AC$ [दिया है]

$\angle OBC = \angle OCB$ [(i) से]

$OB = OC$ [(ii) से]

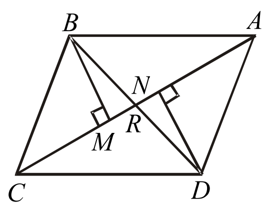
अतः सर्वांगसम के नियम SAS से

$\Delta ABO \cong \Delta ACO$

$\Rightarrow \angle BAO = \angle CAO$ [∵सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं]

$\Rightarrow$ AO कोण $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

उदा.10 चित्र में, BM व DN दोनों रेखाखण्ड AC पर लम्ब हैं तथा BM = DN तो सिद्ध करो कि विकर्ण AC विकर्ण BD का समद्विभाजन करता है।



हल. त्रिभुज BMR तथा DNR में, हम जानते है कि

$\angle BMR = \angle DNR$

[प्रत्येक 90° के तुल्य है,

$\because BM \perp AC$ तथा $DN \perp AC$]

$\angle BRM = \angle DRN$ [शीर्षाभिमुख कोण]

तथा $BM = DN$ [दिया है]

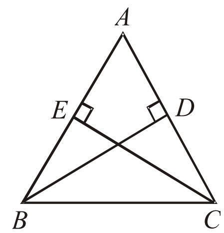
तो सर्वांगसम नियम AAS सें, $\Delta BMR \cong \Delta DNR$

$\Rightarrow BR = DR$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

$\Rightarrow$ R, BD का मध्य बिन्दु है।

अतः विकर्ण AC विकर्ण BD का समद्विभाजन करता है।

उदा.11 चित्र में, BD व CE एक त्रिभुज ΔABC के दो शीर्षलम्ब इस प्रकार से हैं कि BD = CE.



सिद्ध करो कि ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल. ΔABD व ΔACE में, हम जानते हैं कि

$\angle ADB = \angle AEC = 90^\circ$ [दिया है]

$\angle BAD = \angle CAE$ [उभयनिष्ठ है]

तथा $BD = CE$ [दिया है]

इसलिये, सर्वांगसम नियम AAS से, हम जानते है कि

$\Delta ABD \cong \Delta ACE$

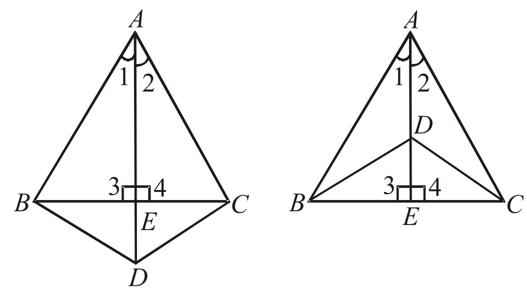
$\Rightarrow AB = AC$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

अतः ΔABC समद्विबाहु है।

उदा.12 यदि दो समद्विबाहु त्रिभुजों के आधार उभयनिष्ठ हो, तो उनके शीर्षों को मिलाने वाली रेखा उन्हें समकोण पर समद्विभाजित करती है।

हल. **दिया है (Given) :** दो समद्विबाहु त्रिभुज ABC व DBC जिनका उभयनिष्ठ आधार BC इस प्रकार से है कि AB = AC व DB = DC.

सिद्ध करना है (To prove) : AD (या AD को बढ़ाने पर) BC को समकोण पर समद्विभाजित करता है।



उपपत्ति (Proof) : त्रिभुज ABD व ACD में,

$AB = AC$ [दिया है]

$BD = CD$ [दिया है]

$AD = AD$ [उभयनिष्ठ भुजा]

अतः त्रिभुजों के सर्वांगसम नियम SSS से,

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ .... (i)

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

अब, त्रिभुज ABE व ACE से,

$AB = AC$ [दिया है]

$\angle 1 = \angle 2$ [(i) से]

एवं $AE = AE$ [उभयनिष्ठ भुजा]

अतः सर्वांगसम नियम SAS से,

$\Delta ABE \cong \Delta ACE$

$\Rightarrow BE = CE$ [$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

एवं $\angle 3 = \angle 4$

परन्तु $\angle 3 + \angle 4 = 180^o$

[$\because$ एक रेखीय युग्म के कोणों का योग 180^o होता है।]

$\Rightarrow 2\angle 3 = 180^o$ [$\because \angle 3 = \angle 4$]

$\Rightarrow \angle 3 = 90^o$

$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 90^o$

अतः AD, BC को समकोण पर समद्विभाजित करता है

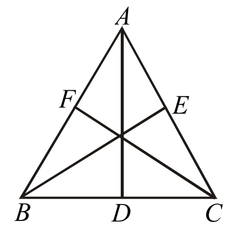
उदा.13 AD, BE त्रिभुज CF के शीर्षलम्ब समान हों, तो सिद्ध करो कि ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

हल. समकोण त्रिभुज BCE व BFC में,

कर्ण BC = कर्ण BC

$BE = CF$ [दिया है]

अतः सर्वांगसम के नियम RHS से,



$\Delta BCE \cong \Delta BFC.$

$\Rightarrow \angle B = \angle C$ [$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

$\Rightarrow AC = AB$ .... (i)

[$\because$समान कोणों की सम्मुख भुजाऐं समान होती हैं।]

इसी प्रकार से $\Delta ABD \cong \Delta ABE$

$\Rightarrow \angle B = \angle A$

[सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

$\Rightarrow AC = BC$ ....(ii)

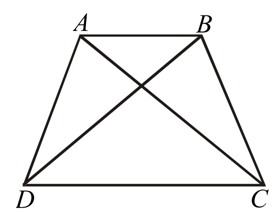
[समान कोणों की सम्मुख भुजाऐं समान होती हैं।]

(i) व (ii) से, हम पाते हैं कि

$AB = BC = AC$

अतः $\Delta\angle ABC$ समबाहु त्रिभुज है।

उदा.14 चित्र में, $AD = BC$ तथा $BD = CA$ हो तो



सिद्ध करो कि $\angle ADB = \angle BCA$ तथा

$\angle DAB = \angle CBA.$

हल. त्रिभुज ABD व ABC में,

$AD = BC$ [दिया है]

$BD = CA$ [दिया है]

तथा $AB = AB$ [उभयनिष्ठ है]

सर्वांगसम नियम SSS से,

$\Delta ABD \cong \angle CBA \Rightarrow \angle DAB = \angle ABC$

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

$\Rightarrow\ \angle DAB = \angle CBA$

उदा.15 रेखाखण्ड AB अन्य रेखाखण्ड CD के समान्तर है। यदि O रेखाखण्ड AD का मध्य बिन्दु हो (चित्रानुसार) तो प्रदर्शित करो कि

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) BC का मध्य बिन्दु भी O है।

हल. (i) ΔAOB व ΔDOC पर विचार करें

$\angle ABO = \angle DCO$

(एकान्तर कोण जब $AB \parallel CD$

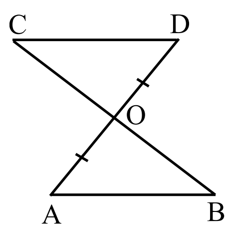
एवं BC तिर्यक रेखा है)

$\angle AOB = \angle DOC$

(शीर्षाभिमुख कोण)

$OA = OD$ (दिया है)

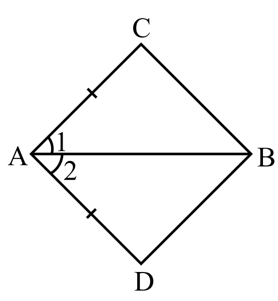
अतः $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS नियम)



(ii) $OB = OC$ (c.p.c.t.)

अतः O रेखाखण्ड BC का मध्य बिन्दु है।

उदा.16 चतुर्भुज ABCD में, AC = AD एवं AB कोण $\angle A$ का समद्विभाजन करता है तो प्रदर्शित करो कि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ तथा BC व BD के बारे में आप क्या कहेंगे? **[NCERT]**



हल. ΔABC तथा ΔABD में,

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ)

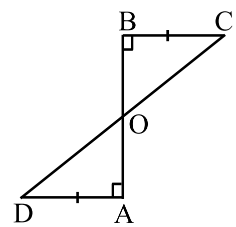
$\angle 1 = \angle 2$ $\{\because$ AB कोण $\angle A$ का समद्विभाजक है $\}$

$AC = AD$ (दिया है)

$\therefore$ SAS से, $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ सिद्ध हुआ

एवं $BC = BD$ (c.p.c.t.)

उदा.17 AD तथा BC एक रेखाखण्ड AB के एक समान लम्ब हैं, तो प्रदर्शित करो कि CD ; AB का समद्विभाजन करती है। **[NCERT]**



हल. CD, AB का समद्विभाजन करता है,

अर्थात् $AO = OB$

$\therefore$ ΔOAD व ΔOBC में,

$\angle O = \angle O$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle A = \angle B = 90°$ (दिया है)

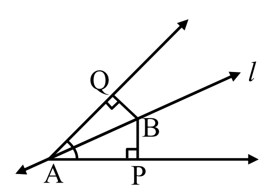
$AD = BC$ (दिया है)

$\therefore$ AAS से, $\Delta OAD \cong \Delta OBC$

$\therefore$ $OA = OB$ (c.p.c.t.)

$\therefore$ CD, AB का समद्विभाजन करता है। इतिसिद्धम

उदा.18 रेखा l कोण $\angle A$ का समद्विभाजक है तथा B रेखा l पर कोई बिन्दु है। BP तथा BQ बिन्दु B से कोण $\angle A$ की भुजा पर डाले गये लम्ब हैं (चित्रानुसार) तो प्रदर्शित करो कि : **[NCERT]**



(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) BP = BQ या B कोण $\angle A$ की भुजाओं से एक समान दूरी पर हैं

हल. (i) ΔAPB तथा ΔAQB में,

$\angle P = \angle Q = 90°$ (दिया है)

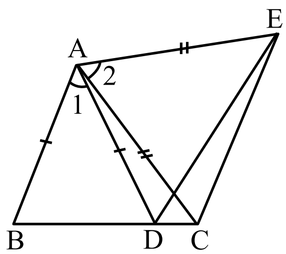
$\angle PAB = \angle QAB$ (दिया है 'l' कोण $\angle A$ समद्विभाजक है)

AB = AB (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ AAS से, $\Delta APB \cong \Delta AQB$ इतिसिद्धम

(ii) BP = BQ (c.p.c.t.) इतिसिद्धम

उदा.19 दिये गये चित्र में, AC = AE, AB = AD एवं $\angle BAD = \angle EAC$ तो प्रदर्शित करो कि BC = DE. **[NCERT]**



हल. ΔABC व ΔADE में,

AB = AD (दिया है)

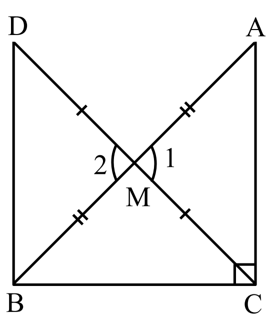
$$\angle BAC = \angle DAE \begin{Bmatrix} \because \angle 1 = \angle 2 & \text{दिया है} \\ \angle 1 + \angle DAC = \angle 2 + \angle DAC \end{Bmatrix}$$

AC = AE (दिया है)

$\therefore$ By SAS, $\Delta ABC \cong \Delta ADE$

$\therefore$ BC = DE (c.p.c.t.) इतिसिद्धम

उदा.20 समकोण त्रिभुज ABC जो C पर समकोण है, तथा कर्ण AB का मध्य बिन्दु M है। बिन्दु C को M से मिलाकर बिन्दु D तक खींचा जाता है ताकि DM = CM हो, बिन्दु D को बिन्दु B से मिलाया गया है (चित्र देखें) तो प्रदर्शित करो कि : **[NCERT]**



(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ समकोण है

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

हल. (i) ΔAMC तथा ΔBMD में,

AM = MB (M, AB का मध्यबिन्दु है)

$\angle 1 = \angle 2$ (शीर्षाभिमुख कोण)

CM = MD (दिया है)

$\therefore$ SAS से, $\Delta AMC \cong \Delta MBD$ इतिसिद्धम

(ii) $\angle ACM = \angle MDB$ (भाग (i) का c.p.c.t.)

ये एकान्तर कोण हैं।

$\therefore$ DB || AC

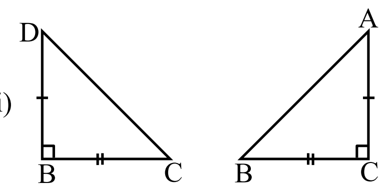
So $\angle DBC + \angle ACB = 180°$

(अन्तःकोण)

$\Rightarrow \angle DBC + 90° = 180°$

$\Rightarrow \angle DBC = 90°$ इतिसिद्धम

(iii)



ΔDBC व ΔACB में

BC = BC (उभयनिष्ठ)

$\angle DBC = \angle ACB = 90°$

DB = AC (भाग (i) का c.p.c.t.)

$\therefore$ SAS द्वारा $\Delta DBC \cong \Delta ACB$ इतिसिद्धम

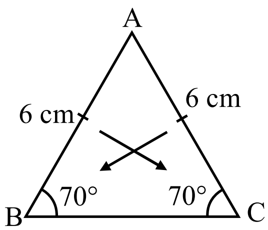
(iv) DC = AB (भाग (iii) का c.p.c.t.)

परन्तु $CM = \frac{1}{2} DC$ (दिया है)

$\therefore$ $CM = \frac{1}{2} AB$ इतिसिद्धम

➢ समद्विबाहु त्रिभुज

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाऐं समान हों तथा इन रेखाओं के सम्मुख कोण भी समान हों, समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।



AB = AC = 6 cm, $\angle B = \angle C = 70°$

उदा.21 एक समद्विबाहु त्रिभुज का कोण $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए जिसमें AB = AC एवं $\angle B = \frac{1}{3}$ (समकोण)

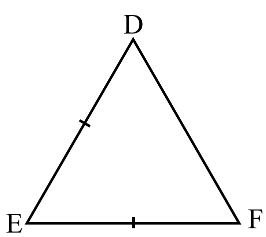
हल. $\angle B = \angle C = \frac{1}{3}(90) = 30°$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (ℓ.p.)

$\angle A + 30° + 30° = 180° \Rightarrow \angle A = 120°$.

उदा.22 समद्विबाहु त्रिभुज DEF में, DE = EF एवं $\angle E = 70°$ हो तो अन्य दो कोण ज्ञात कीजिए।

हल.



मानाकि $\angle D = \angle F = x$

$\therefore \angle D + \angle E + \angle F = 180°$

(कोणों के योग के गुणधर्म से)

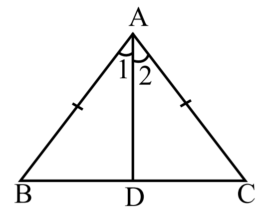
$\Rightarrow x + 70° + x = 180°$

$\Rightarrow 2x = 110°$

$\Rightarrow x = 55°$

$\Rightarrow \angle D = \angle F = 55°$.

प्रमेय (Theorem) (2) : एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।



दिया है (Given) : ΔABC में, AB = AC

सिद्ध करना है (To prove) : $\angle B = \angle C$

रचना (Construction) : AD खींचो जो कोण $\angle A$ का समद्विभाजक हैं

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

उपपत्ति (Proof) : ΔADB तथा ΔADC में,

AD = AD (उभयनिष्ठ)

$\angle 1 = \angle 2$ (रचना से)

AB = AC

SAS से, $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

$\therefore \angle B = \angle C$ (c.p.c.t.) इतिसिद्धम

Note : अन्य परिणाम : $\angle ADB = \angle ADC$ (c.p.c.t.)

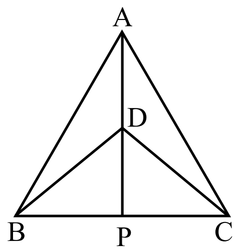
परन्तु $\angle ADB + \angle ADC = 180°$ (रेखीय युग्म)

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90° \Rightarrow AD \perp BC$

एवं BD = DC (c.p.c.t.) $\Rightarrow$ AD माध्यिका है।

$\therefore$ हम कह सकते हैं कि AD रेखा BC का लम्ब समद्विभाजक है या हम कह सकते है कि समद्विबाहु त्रिभुज में, असमान भुजा पर माध्यिका ही कोण समद्विभाजक होती है तथा आधार पर लम्ब भी होती है।

उदा.23 ΔABC व ΔDBC एक ही आधार BC वाले दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं तथा शीर्ष A व D भुजा BC के एक ही तरफ हैं (चित्र देखें) यदि AD को बढ़ाने पर यह BC को बिन्दु P पर काटती हो (चित्रानुसार) तो प्रदर्शित करो कि **[NCERT]**



(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

(iii) AP कोण $\angle A$ का तथा कोण $\angle D$ का समद्विभाजक है

(iv) AP रेखा BC का लम्ब समद्विभाजक है।

हल. (i) ΔABD व ΔACD में,

$AB = AC$ ($\because \Delta ABC$ समद्विबाहु Δ है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ)

$BD = DC$ (ΔDBC समद्विबाहु Δ है)

$\therefore$ SSS से, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ इतिसिद्धम

(ii) ΔABP व ΔACP में,

$AB = AC$ ($\because \Delta ABC$ समद्विबाहु Δ है)

$\angle ABP = \angle ACP$ {$\because \Delta ABC$ समद्विबाहु Δ है}

$AP = AP$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ SAS से, $\Delta ABP \cong \Delta ACP$ इतिसिद्धम

(iii) $\because \angle BAP = \angle CAP$ (भाग (ii) का c.p.c.t.)

$\therefore \angle A$ को AP समद्विभजित करता है

एवं $\angle ADB = \angle ADC$ (भाग (ii) का c.p.c.t.)

$\therefore$ CD का AP समद्विभाजित करता है

(iv) $\angle APB = \angle APC$ (भाग (ii) का c.p.c.t.)

परन्तु $\angle APB + \angle APC = 180°$ (रेखीय युग्म)

$\therefore \angle APB + \angle APB = 180°$

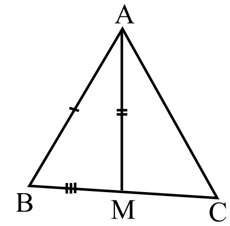
$2\angle APB = 180°$

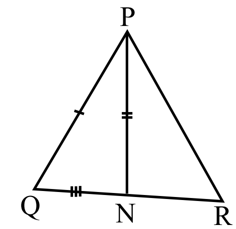
$\angle APB = 90° = \angle APC$

$PB = PC$ (भाग (ii) का c.p.c.t.)

$\therefore$ AP, BC का लम्ब समद्विभाजक है।

उदा.24 एक त्रिभुज ABC की दो भुजाऐं AB व BC तथा एक माध्यिका AM अन्य त्रिभुज ΔPQR की क्रमशः भुजाऐं PQ व QR के तुल्य है तथा माध्यिका PN के तुल्य है, (चित्र देखें) तो प्रदर्शित करो कि :





(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

हल. (i) ΔABM व ΔPQN में

$AB = PQ$ (दिया है)

$AM = PN$ (दिया है)

$BM = QN$ ($\because BC = QR$

$\therefore \frac{BC}{2} = \frac{QR}{2}$)

$\therefore$ SSS द्वारा $\Delta ABM \cong \Delta PQN$ इतिसिद्धम

(ii) ΔABC व ΔPQR में,

$AB = PQ$ (दिया है)

$\angle B = \angle Q$ (भाग (i) का c.p.c.t.)

$BC = QR$ (दिया है)

$\therefore$ SAS द्वारा $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ इतिसिद्धम

➢ सर्वांगसम त्रिभुजों के सम्बन्ध में कुछ और परिणाम

(1) यदि एक त्रिभुज की दो भुजाऐं असमान हों, तो लम्बी भुजा के सम्मुख कोण बडा होता है।

(2) एक त्रिभुज में, बड़े कोण के सामने वाली भुजा लम्बी होती है

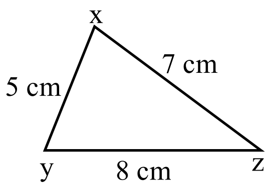
(3) एक दी गई रेखा पर, एक बिन्दु से जो इस रेखा पर स्थित नहीं है, से खीचे गये रेखाखण्डों में से, लम्ब रेखाखण्ड सबसे छोटा होता है

(4) एक त्रिभुज की दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा से अधिक होता है।

(5) एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का अन्तर, तीसरी से कम होता है।

(6) बहिष्कोण, एक अन्तराभिमुख कोण से अधिक होता है।

उदा.25 दिये गये चित्र में, कोणों के मध्य सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

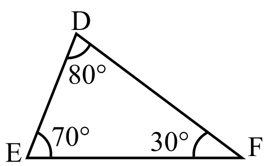


हल. $\because yz > xz > xy$

$\therefore \angle x > \angle y > \angle z.$

($\because$सबसे बड़ी भुजा के सामने का कोण भी बड़ा होता है)

उदा.26 दिये गये चित्र में, त्रिभुज की भुजाओं के मध्य सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।



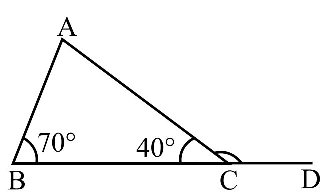
हल. $\because \angle D > \angle E > \angle F$

$\therefore EF > DF > DE$

{$\because$ सबसे बड़े कोण की सम्मुख भुजा सबसे बड़ी होती है}

उदा.27 कोण $\angle ACD$ ज्ञात करो तथा

(i) $\angle ACD, \angle ABC$ (ii) $\angle ACD, \angle A$



हल. $\angle ACD + 40° = 180°$ (रेखीय युग्म)

$\angle ACD = 140°$

एवं $\angle A + \angle B = \angle ACD$

(बहिष्कोण = अन्तराभिमुख कोणों का योग)

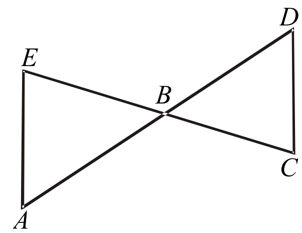
$\Rightarrow \angle A + 70° = 140° \Rightarrow \angle A = 140° - 70°$

$\Rightarrow \angle A = 70°$

अब $\angle ACD > \angle B$

$\angle ACD > \angle A$

उदा.28 चित्र में, $\angle E > \angle A$ एवं $\angle C > \angle D$.



तो सिद्ध करो कि $AD > EC$.

हल. ΔABE में, यह दिया गया है कि

$\angle E > \angle A$

$\Rightarrow AB > BE$ .... (i)

ΔBCD में, यह दिया गया है कि

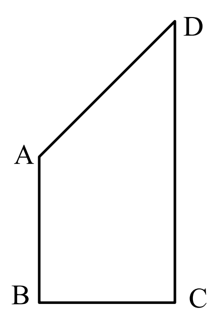
$\angle C > \angle D$

$\Rightarrow BD > BC$ ....(ii)

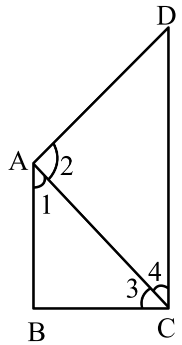
(i) व (ii) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

$AB + BD > BE + BC \Rightarrow AD > EC$

उदा.29 AB व CD एक चतुर्भुज ABCD की क्रमशः सबसे छोटी एवं सबसे बड़ी भुजाऐं हों (चित्रानुसार) तो प्रदर्शित करो कि $\angle A > \angle C$. **[NCERT]**



हल. विकर्ण AC खींचिये



ΔABC में, $AB < BC$ {$\because$ AB सबसे छोटी है}

$\Rightarrow \angle 3 < \angle 1$ ……(1)

{सबसे बड़ी भुजा का सम्मुख कोण भी सबसे बड़ा होता है}

ΔADC में,

$AD < CD$ $\because$ CD सबसे बड़ी है

$\Rightarrow \angle 4 < \angle 2$ …..(2)

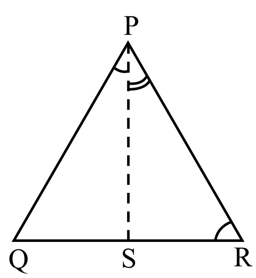
(1) व (2) को जोड़ने पर

$\angle 3 + \angle 4 < \angle 1 + \angle 2$

$\angle C < \angle A$

या $\angle A > \angle C$ सिद्ध हुआ।

उदा.30 दिये गये चित्र में, $PR > PQ$ एवं PS कोण $\angle QPR$. का समद्विभाजन करता है, तो सिद्ध करो कि $\angle PSR > \angle PSQ$. **[NCERT]**

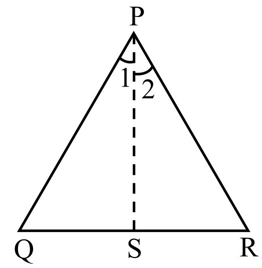


हल. ΔPQR में, $PR > PQ$

$\Rightarrow \angle Q > \angle R$ ……(1)

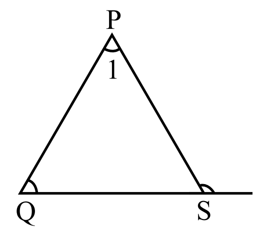
{बड़ी भुजा का सम्मुख कोण भी बड़ा होता है}

एवं $\angle 1 = \angle 2$ ($\because$ PS कोण समद्विभाजक हैं) …..(2)



अब ΔPQS के लिए, $\angle PSR = \angle Q + \angle 1$ …..(3)

(बहिष्कोण = अन्तराभिमुख कोणों का योग)



व ΔPSR के लिए, $\angle PSQ = \angle R + \angle 2$ …..(4)

समीकरण (1), (2), (3), (4) से, $\angle PSR > \angle PSQ$

इतिसिद्धम

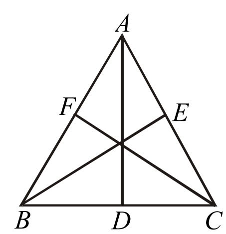
उदा.31 AD, BE व CF जो त्रिभुज ABC के शीर्षलम्ब हैं, तो सिद्ध करो कि ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

हल. समकोण त्रिभुज BCE व BFC में,

कर्ण BC = कर्ण BC

BE = CF [दिया है]

अतः सर्वांगसम नियम RHS से,



$\Delta BCE \cong \Delta BFC$.

$\Rightarrow \angle B = \angle C$ [$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

$\Rightarrow AC = AB$ …. (i)

[$\because$समान कोणों के सम्मुख वाली भुजाऐं भी समान होती हैं]

इसी प्रकार, $\Delta ABD \cong \Delta ABE$

$\Rightarrow \angle B = \angle A$

[सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग समान होते हैं]

$\Rightarrow$ AC = BC ....(ii)

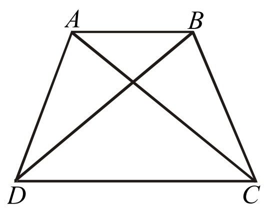
[समान कोणों की सम्मुख भुजाऐं समान होती हैं]

(i) व (ii) से, हम पाते हैं कि

AB = BC = AC

अतः ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

उदा.32 चित्र में, AD = BC व BD = CA में,



तो सिद्ध करो कि $\angle$ADB = $\angle$BCA एवं

$\angle$DAB = $\angle$CBA

हल. त्रिभुज ABD व ABC में,

AD = BC [दिया है]

BD = CA [दिया है]

एवं AB = AB [उभयनिष्ठ]

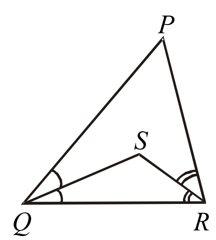
अतः सर्वांगसम नियम SSS से, हम जानते हैं कि

ΔABD $\cong$ $\angle$CBA $\Rightarrow$ $\angle$DAB = $\angle$ABC

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।]

$\Rightarrow$ $\angle$DAB = $\angle$CBA

उदा.33 चित्र में, PQ > PR हो तथा QS व RS क्रमशः कोण $\angle$Q व $\angle$R के समद्विभाजक हों,



तो सिद्ध करो कि SQ > SR.

हल. Δ PQR में,

PQ > PR [दिया है]

$\Rightarrow$ $\angle$PRQ > $\angle$PQR

[एक त्रिभुज में बड़ी भुजा के सामने का कोण भी बड़ा होता है]

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\angle PRQ > \frac{1}{2}\angle PQR$

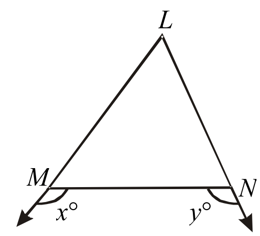
$\Rightarrow$ $\angle$SRQ > $\angle$SQR

[$\because$ RS व QS कोण $\angle$PRQ व $\angle$PQR के समद्विभाजक हैं]

$\Rightarrow$ SQ > SR

[$\because$ बड़े कोण के सामने की भुजा भी बड़ी होती है]

उदा.34 चित्र में, **[NCERT]**



यदि x > y तो प्रदर्शित करो कि $\angle$M > $\angle$N.

हल. हम जानते हैं कि

$\angle$LMN + x° = 180° .... (i)

[रेखीय युग्म के कोण]

$\Rightarrow$ $\angle$LNM + y° = 180° ....(ii)

[रेखीय युग्म के कोण]

$\therefore$ $\angle$LMN + x° = $\angle$LNM + y°

परन्तु x > y अतः

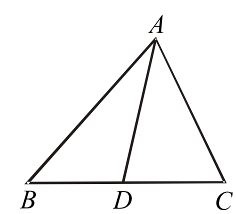
$\angle$LMN < $\angle$LNM

$\Rightarrow$ $\angle$LNM > $\angle$LMN

$\Rightarrow$ LM > LN

[$\because$ बड़े कोण के सामने की भुजा भी बड़ी होती है]

उदा.35 चित्र में, यदि AB > AC तो प्रदर्शित करो कि AB > AD.



हल. ΔABC में हम जानते हैं कि

AB > AC [दिया है]

$\Rightarrow$ $\angle$ACB > $\angle$ABC .... (i)

[$\because$ बड़ी भुजा के समाने वाला कोण भी बड़ा होता है]

अब, ΔACD में, CD को B तक बढ़ाने पर बहिष्कोण $\angle$ADB निर्मित होता है

$\therefore$ $\angle$ADB > $\angle$ACD

$\left[\because \Delta$ का बहिष्कोण, एक अन्तराभिमुख कोण से अधिक होता हैं$\right]$

$\Rightarrow \angle ADB > \angle ACB$ ... (ii)

$[\therefore \angle ACD = \angle ACB]$

(i) व (ii) से, हम जानते हैं कि

$\angle ADB > \angle ABC$

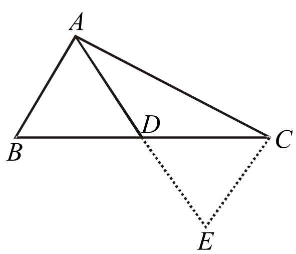
$\Rightarrow \angle ADB > \angle ABD [\because \angle ABC = \angle ABD]$

$\Rightarrow AB > AD$

[$\because$ बड़े कोण के सामने वाली भुजा भी बड़ी होती है]

उदा.36 सिद्ध करो कि एक त्रिभुज की कोई दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा पर डाली गई माध्यिका के दो गुने से अधिक होता है

हल. **दिया है (Given) :** एक ΔABC जिसकी माध्यिका AD है।



सिद्ध करना है (To prove) : $AB + AC > 2\ AD$

रचना (Construction) : AD को E तक इस प्रकार बढ़ाये कि AD = DE अब EC को मिलायें

उपपत्ति (Proof) : Δs ADB तथा EDC में, हम जानते हैं कि

$AD = DE$ [रचना से]

$BD = DC$ [$\because$ D, BC का मध्यबिन्दु है]

एवं $\angle ADB = \angle EDC$ [शीर्षाभिमुख कोण]

अतः सर्वांगसम नियम SAS से,

$\Delta ADB \cong \Delta EDC$

$\Rightarrow AB = EC$ $\left[\because\right.$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है।$\left.\right]$

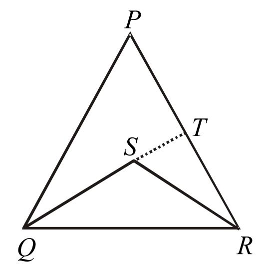
अब ΔAEC में, हम जानते हैं कि

$AC + EC > AE$ [$\because$ एक Δ की किन्हीं दो भुजाओं का योग, तीसरी से अधिक होता है]

$\Rightarrow AC + AB > 2\ AD$

$[\because AD = DE \therefore AE = AD + DE = 2AD$ व $EC = AB]$

उदा.37 चित्र में, PQR एक त्रिभुज है तथा S इसका कोई अन्तःबिन्दु है तो प्रदर्शित करो कि $SQ + SR < PQ + PR$.



हल. **दिया है (Given) :** S ऐसा बिन्दु है, जो ΔPQR का अन्तस्थ बिन्दु है।

सिद्ध करना है (To Prove) : $SQ + SR < PQ + PR$

रचना (Construction) : QS को PR तक बढ़ाने पर ये T पर मिलती हैं

उपपत्ति (Proof) : त्रिभुज PQT में, हम जानते हैं कि

$PQ + PT > QT$

$\left[\because\right.$ एक Δ की दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा से अधिक होता है$\left.\right]$

$\Rightarrow PQ + PT > QS + ST$ .... (i)

$[\because QT = QS + ST]$

ΔRST में, हम जानते हैं कि

$ST + TR > SR$ ....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

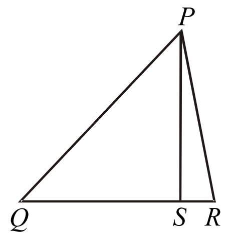
$PQ + PT + ST + TR > SQ + ST + SR$

$\Rightarrow PQ + (PT + TR) > SQ + SR$

$\Rightarrow PQ + PR > SQ + SR$

$\Rightarrow SQ + SR < PQ + PR.$

उदा.38 ΔPQR में, S कोई बिन्दु भुजा QR पर है, तो प्रदर्शित करो कि $PQ + QR + RP > 2\ PS$.



हल. ΔPQS में, हम जानते हैं कि

$PQ + QS > PS$ ... (i)

[$\because$ एक Δ की किन्हीं दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा से अधिक होता है]

इसी प्रकार, ΔPRS में,

$RP + RS > PS$ ....(ii)

(i) व (ii) को जोड़नें पर, हम पाते है कि

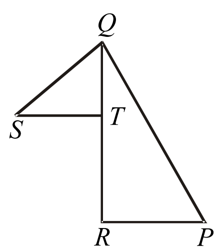
$(PQ + QS) + (RP + RS) > PS + PS$

$\Rightarrow PQ + (QS + RS) + RP > 2\ PS$

$\Rightarrow PQ + QR + RP > 2\ PS$

[$\because QS + RS = QR$]

उदा.39 चित्र में, त्रिभुज ΔPQR की भुजा QR पर T बिन्दु स्थित है तथा S ऐसा बिन्दु है कि $RT = ST$.



तो सिद्ध करो कि $PQ + PR > QS$.

हल. ΔPQR में, हम जानते हैं कि

$PQ + PR > QR$

$\Rightarrow PQ + PR > QT + RT$ [$\because QR = QT + RT$]

$\Rightarrow PQ + PR > QT + ST$ .... (i)

[$\because RT = ST$ (दिया है)]

ΔQST में हम जानते है

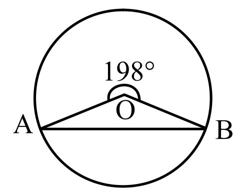
$QT + ST > QS$ ....(ii)

(i) व (ii) को देखने से

$PQ + PR > QS$.

उदा.40 दिये गये चित्र में, कोण $\angle OBA$ ज्ञात कीजिए।

हल.



$\because \angle AOB + 198° = 360°$

$\angle AOB = 360° - 198° = 162°$

एवं $OA = OB$ = वृत्त की त्रिज्या

$\angle A = \angle B = x$ (let)

$\therefore x + x + 162° = 180°$ (a.s.p.)

$2x + 18°$

$x = 9°$

$\therefore \angle OBA = 9°$.

याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. एक समतल में तीन रेखाओं से घिरी आकृति को त्रिभुज कहते हैं।

2. वह त्रिभुज जिसकी कोई भी दो भुजा समान नहीं होती है, विषमबाहु त्रिभुज कहलाता है।

3. वह त्रिभुज जिसकी दो भुजाऐं बराबर होती हैं, समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।

4. वह त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाऐं बराबर होती हैं "समबाहु त्रिभुज" कहलाता है।

5. वह त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण होता है समकोण त्रिभुज कहलाता है।

6. एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^o होता है।

7. यदि एक त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाए जाने पर निर्मित बहिष्कोण का मान दो अन्तराभिमुख कोणों के योग के तुल्य होता है।

8. यदि दो त्रिभुज ABC व DEF सर्वांगसम इस प्रकार से हैं कि $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ तथा $C \leftrightarrow F$ तो हम $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ या $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ लिखते हैं।

9. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि दो भुजाऐं एवं एक कोण एक त्रिभुज के संगत दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं व एक कोण के तुल्य हों (SAS सर्वांगसम नियम).

10. दो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते हैं यदि दो कोण एवं दोनों कोणों के मध्य वाली भुजा किसी दूसरे त्रिभुज की संगत दो कोणों व दोनों कोणों के मध्य वाली भुजा के तुल्य हों (ASA सर्वांगसम नियम).

11. यदि किसी त्रिभुज के कोई दो कोण व असम्मिलित भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों व भुजा के तुल्य हों, तब त्रिभुज सर्वांगसम होता है (AAS सर्वांगसम नियम से).

12. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाऐं, दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के तुल्य हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते है (SSS सर्वांगसम नियम से).

13. यदि दो समकोण त्रिभुजों में, त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण व एक भुजा के तुल्य हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है (RHS सर्वांगसम नियम से)

14. समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते हैं

15. एक त्रिभुज के किसी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया शीर्षलम्ब यदि सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है, तो वह त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।

16. एक समद्विबाहु त्रिभुज में, शीर्ष से डाला गया शीर्षलम्ब, आधार को समद्विभाजित करता है।

17. यदि एक त्रिभुज के शीर्षकोण का समद्विभाजक, सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता हो तो त्रिभुज समद्विबाहु होता है।

18. यदि एक त्रिभुज के शीर्षलम्ब समान हों तो वह त्रिभुज "समबाहु त्रिभुज" कहलाता है।

19. एक त्रिभुज में, सबसे बड़े कोण की सम्मुख भुजा भी सबसे बड़ी होती है।

20. एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा से अधिक होता है।