प्रायिकता

7
अभ्यास

CONTENTS (सूची)

- परिभाषा
- पद
- प्रायिकता दृष्टिकोण
- प्रायोगिक प्रायिकता के प्रकार

➤ परिभाषा

संयोग, सम्भवतः या सम्पूर्ण सम्भव आदि शब्द हमारे कथनों में अनिश्चितता प्रकट करते हैं

सम्भवतः आदि की अनिश्चितता को प्रायिकता के अर्थ में संख्यात्मक रूप से ज्ञात कर सकते है।

➤ पद

परिभाषाएँ :

❖ **प्रेक्षण तथा घटना :**

एक प्रयोग से प्रेक्षण कहलाता है यदि यह परिणाम में सम्भव परिणामों में से एक हो तथा सभी सम्भव परिणाम घटना कहलाती है।

उदाहरण के लिए

(i) खिलाड़ियों का एक खेल जीतने के लिए खेल में भाग लेना एक प्रेक्षण है परन्तु जीतना या हारना घटना है।

(ii) एक न्यायसंगत सिक्के को उछालना एक प्रेक्षण है तथा चित्त या पट्ट आना घटनाएँ है।

(iii) एक पासे को फेंकना प्रेक्षण है तथा संख्या 1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6 आना घटनाएं हैं।

(iv) ताश की गड्डी से एक पत्ता खींचना प्रेक्षण है तथा एक इक्का या एक रानी प्राप्त होना एक घटना है।

❖ **अनुकूल घटनाएँ :**

प्रेक्षण के वे परिणाम जिनमें एक दी गई घटना घटित हो सकती है उस घटना के लिए अनुकूल घटनाएँ कहलाती है।

उदाहरण के लिए

(i) यदि एक सिक्का उछालें तब चित्त (H) प्राप्त करने का अनुकूल परिणाम 1 है।

(ii) यदि एक पासा फैंका जाए तो 1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6 प्राप्त होने की अनुकूल घटना 1 है।

(iii) यदि दो पासे फेंके जाएँ तब संख्याओं का योग 9 प्राप्त होने की अनुकूल घटनाएं चार अर्थात् (4,5), (5,4), (3,6), (6,3) हैं।

❖ **प्रतिदर्श समष्टि :**

एक प्रेक्षण के सभी सम्भव परिणामों का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है। इसे समान्यतः S से प्रदर्शित किया जाता है तथा प्रेक्षण के प्रत्येक परिणाम को S का बिन्दु कहा जाता है।

उदाहरण के लिए

(i) यदि एक पासा एक बार फेंका गया है तब इसकी प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) यदि दो सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं तब इसकी प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HT, TH, HH, TT\}$.

➤ प्रायिकता दृष्टिकोण

(i) प्रायोगिक या आनुभाविक या अवलोकन दृष्टिकोण

(ii) पारम्परिक दृष्टिकोण

(iii) स्वयं सिद्ध दृष्टिकोण

(i) प्रायोगिक प्रायिकता : माना एक प्रयोग के n प्रेक्षण हैं तथा A इससे सम्बन्धित एक घटना इस प्रकार है कि A, m प्रेक्षणों में घटित होता है तब घटना A के घटित होने की अनुभाविक प्राथिकता को P(A) से प्रदर्शित करते है तथा इसे निम्न प्रकार दिया जाता है

$$P(A) = \frac{m}{n}$$ अर्थात्,

$$P(A) = \frac{\text{प्रेक्षणों की संख्या जिसमें घटना घटित होती है}}{\text{कुल प्रेक्षणों की संख्या}}$$

स्पष्टतः, $0 \le m \le n$. अतः एवं,

$$0 \le \frac{m}{n} \le 1 \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1$$

अतः एक घटना की प्रायिकता सदैव 0 तथा 1 के मध्य स्थित होती है। यदि P(A) = 1, तब A को निश्चित घटना कहा जाता है तथा A असम्भव घटना होती है यदि P(A) = 0.

◈ इसके अलावा यदि $\overline{A}$ को A के नकारात्मक से प्रदर्शित करते है अर्थात् घटना जिसमें A घटित नहीं हो तब उपरोक्त m, n के लिए

$$P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$$

$$\therefore \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

ताश के पत्ते :

(i) कुछ : 52 (26 लाल, 26 काले)

(ii) चार समूह : पान (♥) , ईंट (♦),

हुकुम (♠), चिड़ी (♣) - 13 पत्ते प्रत्येक

(iii) दरबारी पत्ते : 12 (4 राजा, 4 रानी, 4 गुलाम)

(iv) ऑनर पत्ते : 16 (4 इक्के, 4 राजा, 4 रानी, 4 गुलाम)

➢ प्रायोगिक प्रायिकता के प्रकार

1. निर्धारित : निर्धारित प्रयोग वे प्रयोग है जिसमें उन्हें समान शर्त के अन्तर्गत दोहराने पर वह समान परिणाम देते हैं उदाहरण के लिए यदि हम एक सिक्के पर दोनों तरफ चित (H) लगा दे तथा इसे उछालते है तब हम सदैव समान परिणाम प्राप्त करते है मान लेते है कि यह सीधा खड़ा नहीं रहता है।

2. यादृच्छिक प्रयोग या सम्भावित प्रयोग : यदि किसी प्रयोग को निर्धारित शर्तो के अनुसार पुनरावृत्त कराने पर प्राप्त परिणाम, कुल परिणामों में से एक हो परन्तु उसके आने की जानकारी ना हो, ऐसे प्रयोग यादृच्छिक या सम्भावित प्रयोग कहते हैं। उदाहरण के लिए एक सिक्के को उछालने पर यह निश्चित नहीं है कि चित (H) या पट (T) प्राप्त होगा अतः यह यादृच्छिक प्रयोग है। इसी प्रकार एक पासे को फेंकना यादृच्छिक प्रयोग का उदाहरण है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 एक सिक्के को 500 बार उछाला जाता है दोनों परिणाम निम्न प्रकार प्राप्त होते है :

चित : 240 बार, पट : 260 बार

इस घटना में प्रत्येक के प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

Sol. यह दिया है कि सिक्के को 500 बार उछाला जाता है।

$\therefore$ कुल प्रेक्षणों की संख्या = 500

माना हम एक चित प्राप्त होने की तथा एक पट प्राप्त होने की घटना को क्रमशः A तथा B से प्रदर्शित करते है तब,

प्रेक्षणों की संख्या जिनमें A घटित होता है = 240.

जिनमें B घटित होता है = 260

$$\therefore P(A) = \frac{\text{प्रेक्षणों की संख्या जिनमें घटना A घटित होती है}}{\text{कुल प्रेक्षणों की संख्या}}$$

$$= \frac{240}{500} = 0.48$$

$$\therefore P(B) = \frac{\text{प्रेक्षणों की संख्या जिनमें घटना B घटित होती है}}{\text{कुल प्रेक्षणों की संख्या}}$$

$$= \frac{260}{500} = 0.52$$

नोट : हम देखते हैं कि P(A) + P(B) = 0.48 + 0.52 अतः प्रेक्षण के A तथा B केवल दो सम्भव परिणाम हैं।

Ex.2 एक पाँसे को 1000 बार फेंका जाता है 1, 2, 3, 4, 5 तथा 6 के प्राप्त होने की बारम्बारता निम्न प्रकार दी गई है :

परिणाम :	1	2	3	4	5	6
बारम्बारता :	179	150	157	149	175	190

प्रत्येक परिणाम के घटने की प्रायिकता ज्ञात करो। **[NCERT]**

Sol. माना A_i घटना के i वे परिणाम को प्रदर्शित करता है, जहाँ, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 तब,

$P(E_1)$ = 1 प्राप्त होने की प्रायिकता

$= \dfrac{1 \text{ की बारम्बारता}}{\text{पाँसे को फेंकने की कुल बार की संख्या}}$

$= \dfrac{179}{1000} = 0.179$

$P(E_2)$ = 2 प्राप्त होने की प्रायिकता

$= \dfrac{2 \text{ की बारम्बारता}}{\text{पाँसे को फेंकने की कुल बार की संख्या}}$

$= \dfrac{150}{1000} = 0.15$

इसी प्रकार हम प्राप्त करते है,

$P(E_3) = \dfrac{157}{1000} = 0.157, P(E_4) = \dfrac{149}{1000}$

$= 0.149, P(E_5) = \dfrac{175}{1000} = 0.175$

तथा, $P(E_6) = \dfrac{190}{1000} = 0.19$

Ex.3 एक छात्र द्वारा मासिक इकाई परीक्षा में अंकों का प्रतिशत नीचे दिया गया है :

इकाई परीक्षा :	I	II	III	IV	V
प्राप्त अंकों का प्रतिशत	58	64	76	62	85

प्रायिकता ज्ञात करो कि छात्र प्राप्त करता है :

(i) प्रथम श्रेणी अर्थात् कम से कम 60 % अंक

(ii) 70 % तथा 80 % के मध्य अंक

(iii) विशेष योग्यता अर्थात् 75 % और अधिक

(iv) 65 % अंक से कम

Sol. इकाई परीक्षा की कुल संख्या = 5

(i) इकाई परीक्षा की संख्या जिसमें छात्र प्रथम श्रेणी प्राप्त करता है अर्थात् कम से कम 60 % अंक = 4.

$\therefore$ छात्र के प्रथम श्रेणी प्राप्त करने की प्रायिकता

$= \dfrac{4}{5} = 0.8$

(ii) परीक्षा की संख्या जिसमें छात्र 70 % तथा 80 % के मध्य अंक प्राप्त करें = 1.

$\therefore$ छात्र के 70 % तथा 80 % के मध्य अंक प्राप्त करने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{5} = 0.2.$

(iii) परीक्षा की संख्या जिसमें छात्र विशेष योग्यता प्राप्त करे $= \dfrac{2}{5} = 0.4$

(iv) परीक्षा की संख्या जिसमें छात्र 65 % से कम अंक प्राप्त करे = 3

$\therefore$ छात्र के 65 % से कम अंक प्राप्त करके की प्रायिकता $= \dfrac{3}{5} = 0.6$

Ex.4 टेलीफोन पुस्तक के एक पन्ने पर 200 टेलीफोन नम्बर थे, उनके इकाई स्थान के अंक (उदाहरण के लिए संख्या 25828573, में इकाई स्थान का अंक 3 है) का बारम्बारता बंटन निम्न तालिका में दिया गया है :

अंक :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
बारम्बारता :	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

एक संख्या यादृच्छया चुनी जाती है प्रायिकता ज्ञात करो कि इसका इकाई स्थान का अंक है :

(i) 6

(ii) एक अशून्य 3 का गुणज

(iii) एक अशून्य सम संख्या

(iv) एक विषय संख्या

Sol. दिया है,

चुने गए टेलीफोन नम्बरों की कुल संख्या = 200

(i) यह दिया गया है कि अंक 6 इकाई स्थान पर 14 बार आता है।

$\therefore$ इकाई के स्थान पर 6 आने की प्रायिकता

$= \dfrac{14}{200} = 0.07$

(ii) एक अशून्य 3 का गुणज अर्थात् 3, 6 तथा 9.

टेलीफोन नम्बर की संख्या जिनमें इकाई अंक या तो 3 या 6 या 9 = 22 + 14 + 20 = 56 है।

$\therefore$ एक टेलीफोन नम्बर के इकाई स्थान पर 3 का गुणज होने की प्रायिकता $= \dfrac{56}{200} = 0.28$

(iii) टेलीफोन नम्बर जिनका इकाई अंक सम संख्या (2 या 4 या 6 या 8) है, की संख्या

= 22 + 20 + 14 + 16 = 72

$\therefore$ एक टेलीफोन नम्बर का इकाई अंक सम संख्या होने की प्रायिकता $= \dfrac{72}{200} = 0.36$

(iv) टेलीफोन नम्बर का इकाई स्थान पर विषम अंक (1 या 3 या 5 या 7 या 9) है, की संख्या

$= 26 + 22 + 10 + 28 + 20 = 106$

∴ टेलीफोन नम्बर इकाई स्थान पर विषय अंक होने की प्रायिकता $= \frac{106}{200} = 0.53$

Ex.5 एक टायर बनाने वाली कम्पनी एक टायर को बदलने के पहले चली गई दूरी को दर्ज करती है। निम्न तालिका 1000 मामलों का परिणाम प्रदर्शित करती है।

किमी. में. दूरी	400 से कम	400 से 900	900 से 1400	1400 से अधिक
टायर की संख्या :	210	325	385	80

यदि आपने इस कम्पनी से एक टायर खरीदा तब क्या प्रायिकता है कि :

(i) इसे 400 km दूरी तय करने के पहले बदलने की आवश्यकता होगी ?

(ii) यह 900 km से अधिक पर खत्म होगा ?

(iii) इसे बदलने की आवश्यकता होगी यदि यह 400 km तथा 1400 km के मध्य दूरी तय करे ?

(iv) इसे बदलने की आवश्यकता नहीं हो?

(v) इसे बदलने की आवश्यकता हो ?

Sol. दिया है,

(i) प्रेक्षणों की संख्या = 1000

∴ टायर को 400 km दूरी तय करने के पहले बदलने की प्रायिकता $= \frac{210}{1000} = 0.21$

(ii) 900 km से अधिक पर खत्म होने वाले टायरों की संख्या $= 385 + 80 = 465$

∴ 900 km से अधिक पर टायर के खत्म होने की प्रायिकता $= \frac{465}{1000} = 0.465$

(iii) उन टायरों की संख्या जिन्हें 400 km तथा 1400 km के मध्य दूरी तय करने में बदलने की आवश्यकता हो $= 325 + 385 = 710$.

∴ टायर को 400 km तथा 1400 km के मध्य बदलने की प्रायिकता $= \frac{710}{1000} = 0.71$

(iv) टायरों की संख्या जिसे बदलने की आवश्यकता नहीं हो = 0

∴ टायर को नहीं बदलने की प्रायिकता $= \frac{0}{1000} = 0$

(v) चूंकि हमने लिए हुए सभी टायर बदले गए है अतः टायर को बदलने की प्रायिकता

$= \frac{1000}{1000} = 1$

Ex.6 5 बीज के थैलों में से प्रत्येक से पचास बीज चुने गए और उन्हें अंकुरित होने में लाभदायक आदर्श परिस्थितियों में रखा गया, 20 दिनों के बाद प्रत्येक चुनाव में अंकुरित हुए बीजों की संख्या निम्न तालिका में प्रदर्शित है :

थैला	1	2	3	4	5
अंकुरित बीजों की संख्या	40	48	42	39	41

अंकुरण की प्रायिकता क्या है :

(i) एक थैले में 40 से अधिक बीज ?

(ii) एक थैले में 49 बीज?

(iii) एक थैले में 35 से अधिक बीज ?

(iv) एक थैले में कम से कम 40 बीज ?

(v) एक थैले में अधिकतम 40 बीज ?

Sol. कुल थैलों की संख्या = 5

(i) थैलों की संख्या जिनमें 50 बीजों में से 40 से अधिक अंकुरित हुए = 3.

∴ एक थैले में 40 से अधिक बीज अंकुरित होने की प्रायिकता $= \frac{3}{5}$

(ii) थैलों की संख्या जिनमें 49 बीज अंकुरित हुए = 0

∴ 49 बीजों के अंकुरित होने की प्रायिकता $= \frac{0}{5} = 0$

(iii) थैलों की संख्या जिनमें 35 से अधिक बीज अंकुरित हुए = 5.

∴ 35 से अधिक बीज अंकुरित होने की प्रायिकता

$= \frac{5}{5} = 1.$

(iv) थैलों की संख्या जिनमें कम से कम 40 बीज अंकुरित हुए = 4

∴ कम से कम 40 बीजों के अंकुरित होने की प्रायिकता $= \frac{4}{5}$

(v) थैलों की संख्या जिनमें अधिकतम 40 बीज अंकुरित हुए = 2.

∴ अधिकतम 40 बीजों के अंकुरित होने की प्रायिकता $= \frac{2}{5}$

Ex.7 40 महिला इंजीनियरों की उनके घर से कार्यस्थल की दूरी (km में) निम्न प्रकार पाई गई –

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	2

प्रायिकता ज्ञात करों कि एक इंजीनियर रहती है :

(i) उसके कार्य स्थल से 7 km से कम ?

(ii) उसके कार्य स्थल से कम से कम 7 km ?

(iii) उसके कार्य स्थल से $\frac{1}{2}$ km में ?

(iv) उसके कार्य स्थल से अधिकतम 15 km ?

Sol. महिला इंजीनियरों की कुल संख्या = 40

(i) उसके कार्य स्थल से 7 km से कम दूरी पर रहने वाली महिला इंजीनियरों की संख्या = 10

∴ एक महिला इंजीनियर की उसके कार्य स्थल से 7 km से कम दूरी पर रहने की प्रायिकता $= \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25$

(ii) उनके कार्य स्थल से कम से कम 7 km दूर रहने वाली महिला इंजीनियर की संख्या = 30

∴ एक महिला इंजीनियर के उसके कार्य स्थल से कम से कम 7 km दूर रहने की प्रायिकता $= \frac{30}{40} = 0.75$

(iii) चूंकि यहाँ कोई इंजीनियर उसके कार्य स्थल से $\frac{1}{2}$ km के बीच नहीं रहती है।

∴ एक इंजीनियर की कार्य स्थल से $\frac{1}{2}$ km में रहने की प्रायिकता $= \frac{0}{40} = 0$

(iv) उसके कार्य स्थल से 15 km या कम दूरी पर रहने वाली महिला इंजीनियर की संख्या = 30

∴ एक इंजीनियर के कार्य स्थल से अधिकतम 15 km दूर रहने की प्रायिकता $= \frac{30}{40} = 0.75$

Ex.8 एक शहर में एक बीमा कम्पनी ने आयु तथा दुर्घटनाओं के मध्य सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए 2000 चालकों को चुना। प्राप्त आंकड़ों को निम्न तालिका में दिया गया है :

चालक की आयु (वर्ष में)	एक वर्ष में दुघटना				
	0	1	2	3	से ज्याद
18-29	440	160	110	61	35
30-50	505	125	60	22	18
50 से अधिक	360	45	35	15	9

शहर से एक चालक यादृच्छया चुनने पर निम्न घटनाओं के लिए प्रायिकताएँ ज्ञात करो :

(i) 18-29 वर्ष आयु का तथा एक वर्ष में ठीक 3 दुर्घटनाऐं हो।

(ii) 30-50 वर्ष आयु का तथा एक वर्ष में एक या अधिक दुर्घटनाऐं हो।

(iii) एक वर्ष में कोई दुर्घटना ना हो।

Sol. चालकों की कुल संख्या = 2000

(i) चालकों की संख्या जो 18-29 वर्ष के हैं तथा एक वर्ष में ठीक तीन दुर्घटना करते हैं, 61 है।

∴ 18-29 वर्ष आयु के एक चालक की ठीक तीन दुर्घटना होने की प्रायिकता $= \frac{61}{2000} = 0.0305$

(ii) चालकों की संख्या जो 30-50 वर्ष उम्र के है तथा एक वर्ष में एक या अधिक दुर्घटना करते हैं

$= 125 + 60 + 22 + 18 = 225.$

∴ 30-50 वर्ष उम्र के एक चालक की एक या अधिक दुर्घटना होने की प्रायिकता $= \frac{225}{2000} = 0.1125$

(iii) चालकों की संख्या जो एक वर्ष में कोई दुर्घटना नहीं करते हैं।

$= 440 + 505 + 360 = 1305$

∴ एक वर्ष में एक चालक की कोई दुर्घटना नहीं होने की प्रायिकता $= \frac{1305}{2000} = 0.653$

Ex.9 प्रायिकता ज्ञात करो कि संख्याओं 1 से 25 में से यादृच्छया चुनी गई एक संख्या अभाज्य संख्या नहीं है जबकि दी गई संख्याओं में प्रत्येक चुनाव समप्रायिक है।

Sol. यहाँ $S = \{1, 2, 3, 4, ..., 25\}$

माना E = अभाज्य संख्या प्राप्त करने की घटना

$= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

तब, $n(E) = 9$

$\therefore \; P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{9}{25}$.

अभीष्ट प्रायिकता

$$= 1 - P(E) = \left(1 - \frac{9}{25}\right) = \frac{16}{25}.$$

Ex.10 गेंहू के आटे के ग्यारह थैलों पर 5 kg अंकित है जबकि आटे का वास्तविक भार (kg में) निम्न प्रकार पाया गया है :

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

प्रायिकता ज्ञात करो कि इन थैलों में से यादृच्छया कोई थैला चुनने पर उसमें 5 kg से अधिक आटा होगा।

Sol. थैलों की कुल संख्या = 11

थैलों की संख्या जिसमें 5 kg से अधिक आटा है = 7

अतः थैले में 5 kg से अधिक आटा होने की प्रायिकता

$= \frac{\text{5kg से अधिक आटा रखने वाले थैलों की संख्या}}{\text{कुल थैलों की संख्या}}$

$= \frac{7}{11}$

Ex.11 एक मौसम कार्यालय का पिछले 250 दिन का रिकॉर्ड प्रदर्शित करता है कि इसके द्वारा दी गई मौसम की पूर्व सूचना 175 बार सही थी।

(i) एक दिए गए दिन पर इसके सही होने की प्रायिकता क्या थी ?

(ii) एक दिए गए दिन पर इसके सही नहीं होने की प्रायिकता क्या थी ?

Sol. कुल दिन की संख्या जिनका रिकॉड उपलब्ध है = 250

(i) P(सही सूचना)

$= \frac{\text{दिनों की संख्या जब सूचना सही थी}}{\text{कुल दिनों की संख्या जिसके लिए रिकॉर्ड उपलब्ध है}}$

$= \frac{175}{250} = 0.7$

(ii) दिनों की संख्या जब सूचना सही नहीं थी

$= 250 - 175 = 75$.

P(सूचना सही नहीं) $= \frac{75}{250} = 0.3$

Ex.12 यदि एक खेल को जीतने की प्रायिकता 0.3 है, तब इसके हारने की प्रायिकता क्या है ?

Sol. खेल जीतने की प्रायिकता = 0.3

इसे हारने की प्रायिकता = q (माना).

$\Rightarrow \; 0.3 + q = 1 \;\; \Rightarrow \;\; q = 1 - 0.3$

$\Rightarrow \; q = 0.7$

Ex.13 दो सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। निम्न प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

(i) दो चित्त (ii) कम से कम एक चित्त

(iii) कोई चित्त नहीं

Sol. माना H चित को प्रदर्शित करता है तथा T पट को प्रदर्शित करता है।

∴ दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर सभी संभव परिणाम हैं

(i) दो चित प्राप्त करने की प्रायिकता = P(HH)

$= \frac{\text{दो चित प्राप्त होनेकी घटना}}{\text{सम्भव परिणामों की कुल संख्या}} = \frac{1}{4}$

(ii) कम से कम एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता

$= P(HT \text{ or } TH \text{ or } HH)$

$= \dfrac{\text{कम से कम एक चित प्राप्त होने की घटना}}{\text{सम्भव परिणामों की कुल संख्या}} = \dfrac{3}{4}$

(iii) कोई चित प्राप्त नहीं होने की घटना = P(TT)

$= \dfrac{\text{चित प्राप्त नहीं होने की घटना}}{\text{सम्भव परिणामों की कुल संख्या}} = \dfrac{1}{4}$

Ex.14 एक समय तीन सिक्के उछालने पर, ज्ञात करो -

(i) सभी सम्भव परिणाम

(ii) 3 चित, 2 चित, 1 चित तथा 0 चित प्राप्त होने की घटनाएं

(iii) 3 चित, 2 चित, 1 चित तथा चित प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता

Sol. माना H चित को तथा T पट को प्रदर्शित करता है एक समय में तीन सिक्कों को उछालने पर,

(i) सभी सम्भव परिणाम = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}. ये 8 सम्भव परिणाम है।

(ii) 3 चित प्राप्त होने की घटना = (HHH) = 1

2 चित प्राप्त होने की घटना = {HHT, HTH, THH} = 3

1 चित प्राप्त होने की घटना = {HTT, THT, TTH} = 3

0 चित प्राप्त होने की घटना = {TTT} =1

(iii) 3 चित प्राप्त होने की प्रायिकता = P (HHH)

$= \dfrac{\text{3 चित प्राप्त होने की घटना}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}} = \dfrac{1}{8}$

इसी प्रकार 2 चित प्राप्त होने की प्रायिकता

$= P(HHT \text{ or } THH \text{ or } HTH)$

$= \dfrac{\text{2 चित प्राप्त होने की घटना}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}} = \dfrac{3}{8}$

एक चित प्राप्त होने की प्रायिकता

$= P(HTT \text{ or } THT \text{ or } TTH)$

$= \dfrac{\text{1 चित प्राप्त होने की घटना}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}} = \dfrac{3}{8}$

कोई चित प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता = P (TTT)

$= \dfrac{\text{कोई चित प्राप्त नहीं होने की घटना}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}} = \dfrac{1}{8}$

Ex.15 एक थैले में 12 गेंदे है जिनमें से x सफेद है,

(i) यदि एक गेंद यादृच्छया निकाली जाए तब क्या प्रायिकता है कि यह एक सफेद गेंद होगी ?

(ii) यदि थैले में 6 सफेद गेंदे और रख दी जाए तब एक सफेद गेंद प्राप्त होने की प्रायिकता (i) से दुगुनी है, x ज्ञात करो।

Sol. गेंदो को यादृच्छिक निकालना समप्रायिक घटना है

कुल गेंदो की संख्या = 12

∴ संभव परिणामों की कुल संख्या = 12

सफेद गेंदो की संख्या = x

(i) कुल 12 परिणामों में अनुकूल परिणाम = x

$P(\text{सफेद गेंद}) = \dfrac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}} = \dfrac{x}{12}$

(ii) यदि थैले में 6 सफेद गेंदे और रख दी जाती है तब सफेद गेंदों की कुल संख्या = x + 6

थैले में कुल गेंदों की संख्या = 12 + 6 = 18

$P(\text{सफेद गेंद}) = \dfrac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}}$

$= \dfrac{x+6}{12+6}$

प्रश्न के अनुसार,

दूसरी स्थिति में सफेद गेंद निकलने की प्रायिकता = 2 × प्रथम स्थिति में सफेद गेंद निकलने की प्रायिकता

$\Rightarrow \dfrac{x+6}{18} = 2\left(\dfrac{x}{12}\right) \quad \Rightarrow \dfrac{x+6}{18} = \dfrac{x}{6}$

$\Rightarrow 6x + 36 = 18x \quad \Rightarrow 12x = 36$

$\Rightarrow x = 3$

अतः सफेद गेंदों की संख्या = 3

Ex.16 यादृच्छया चुने गए एक लीप वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता क्या होगी ?

Sol. एक लीप वर्ष में दिनों की संख्या = 366 दिन

अब, 366 दिन = 52 सप्ताह तथा 2 दिन

शेष दो दिन हो सकते हैं

(i) रविवार तथा सोमवार

(ii) सोमवार तथा मंगलवार

(iii) मंगलवार तथा बुधवार

(iv) बुधवार तथा गुरूवार

(v) गुरूवार तथा शुक्रवार

(vi) शुक्रवार तथा शनिवार

(vii) शनिवार तथा रविवार

लीप वर्ष में 53 रविवार होने के लिए आखिरी दो दिन या तो रविवार तथा सोमवार या शनिवार तथा रविवार हो।

$\therefore$ अतः अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

कुल संभव परिणामों की संख्या = 7

$\therefore$ P(लीप वर्ष में 53 रविवार होना) = $\frac{2}{7}$

Ex.17 तीन पक्षपाती सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। निम्न को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो :

(i) सभी चित, (ii) दो चित

(iii) एक चित (iv) कम से कम दो चित

Sol. तीन सिक्कों की यादृच्छया उछाल में प्राप्त प्रारम्भिक परिणाम है

HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT

$\therefore$ प्रारम्भिक परिणामों की कुल संख्या = 8.

(i) घटना "सभी चित प्राप्त करना" होगी यदि प्रारम्भिक घटना HHH हो अर्थात् HHH एक परिणाम हो अतः

$\therefore$ अनुकूल प्रारम्भिक घटनाओं की संख्या = 1

अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{1}{8}$

(ii) घटना "दो चित प्राप्त करना" होगी यदि घटनाओं HHT, THH, HTH में से एक प्राप्त हो।

$\therefore$ अनुकूल प्रारम्भिक घटनाओं की संख्या = 3

अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{3}{8}$

(iii) एक चित प्राप्त होने की घटना जब तीन सिक्के एक साथ उछाले जाए यदि प्रारम्भिक घटनाओं HTT, THT, TTH में से एक घटित हो।

$\therefore$ अनुकूल प्रारम्भिक घटनाओं की संख्या = 3

अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{3}{8}$

(iv) यदि प्रारम्भिक घटनाओं HHH, HHT, HTH तथा THH में से कोई एक परिणाम प्राप्त हो, तब हम कहते हैं कि घटना "कम से कम दो चित प्राप्त होना" होती है।

$\therefore$ अनुकूल प्रारम्भिक घटनाओं की संख्या = 4

अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Ex.18 एक गुल्लक में सौ 50 पैसे के सिक्के, पचास ₹ 1 के सिक्के, बीस ₹ 2 के सिक्के तथा दस ₹ 5 के सिक्के है। यदि एक सिक्के का गिरना समप्रायिक है जब गुल्लक को उल्टा किया जाए, क्या प्रायिकता होगी कि सिक्का

(i) एक 50 पैसे का सिक्का होगा ?

(ii) एक ₹ 5 का सिक्का नहीं होगा ?

Sol. 50 पैसे के सिक्कों की संख्या = 100

₹ 1 के सिक्कों की संख्या = 50

₹ 2 के सिक्कों की संख्या = 20

₹ 5 के सिक्कों की संख्या = 10

(i) 50 पैसे का सिक्का गिरने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 100

कुल सिक्कों की संख्या = 100 + 50 + 20 + 10 = 180

संभव परिणामों की कुल संख्या = 180

$$P = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}}$$

$$P\ (50\ p) = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$

(ii) ₹ 5 का सिक्का नहीं गिरने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 180 – 10 = 170

$$P = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}}$$

P (₹5 नहीं) = $\frac{170}{180} = \frac{17}{18}$

Ex.19 एक डिब्बें में 20 धातु के छर्रे हैं जिन पर 1, 2, 3, 4, ...20 अंकित है। डिब्बे से एक छर्रा यादृच्छिक निकाला जाता है। क्या प्रायिकता है कि छर्रे पर अंक है।

(i) एक विषम अंक (ii) 2 या 3 से विभाज्य

(iii) अभाज्य संख्या (iv) 10 से विभाज्य नहीं

Sol. संभव परिणामों की कुल संख्या = 20

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}}$$

(i) प्रथम 20 संख्याओं मे विषम संख्याओं की संख्या

$$P(\text{विषम}) = \frac{\text{विषम अंक के अनुकूल परिणाम}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

(ii) 2 या 3 से विभाज्य संख्याऐं 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20.

2 या 3 से विभाज्य संख्याओं के अनुकूल परिणाम = 13

P (2 या 3 से विभाज्य संख्याऐं)

$$= \frac{\text{2 या 3 से विभाज्य संख्याओं के अनुकूल परिणाम}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{13}{20}$$

(iii) प्रथम 20 संख्याओं में अभाज्य संख्याऐं है 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

अभाज्य संख्या के अनुकूल परिणाम = 8

$$P(\text{अभाज्य}) = \frac{\text{अभाज्य के अनुकूल परिणाम}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

(iv) 10 से विभाजित नहीं होने वाली संख्याऐं है 1, 2, .. 9, 11, ...19

10 से विभाजित नहीं होने के अनुकूल परिणाम = 18

P(10 से विभाज्य नहीं)

$$= \frac{\text{10 से विभाजित नहीं होने के अनुकूल परिणाम}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. प्रायिकता के प्रायोगिक दृष्टान्त में हम प्रायिकता ज्ञात करते है कि प्रयोग में एक घटना कितनी बार वास्तव में घटती है तथा घटना के घटित होने के आँकड़े पर्याप्त कितने हैं।

2. प्रायिकता के सैद्धान्तिक दृष्टान्त में हम वास्तविक प्रयोग के बिना क्या होगा का अनुमान की कोशिश करते हैं।

3. एक यादृच्छिक प्रयोग का एक परिणाम एक प्रारम्भिक घटना कहलाती है।

4. यादृच्छिक प्रयोग के सापेक्ष एक घटना संयुक्त घटना कहलाती है यदि यह यादृच्छिक प्रयोग की प्रारम्भिक घटनाओं के दो या अधिक के संयोजन द्वारा प्राप्त होती है।