रेखाऐं एवं कोण

6
CHAPTER

CONTENTS (सूची)

- रेखाखण्ड, किरण, रेखीय बिन्दु, कोण
- कोण की माप, कोणों के प्रकार
- कोण का समद्विभाजक
- संपूरक, पूरक, आसन्न कोण
- कोणों का रेखीय युग्म
- शीर्षाभिमुख कोण

➤ कुछ मूल पद

◈ **रेखाखण्ड (Line segment) :**

रेखा का वह भाग या खण्ड जिसके दो अन्त बिन्दु होते हैं।

◈ **किरण (Ray) :**

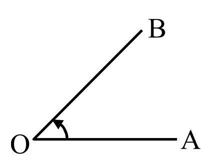
एक अन्त बिन्दु वाली किसी रेखा का भाग होती है।

◈ **संरेखीय बिन्दु (Collinear points) :**

यदि तीन या अधिक बिन्दु एक ही रेखा पर स्थित हों तो वे संरेखीय बिन्दु कहलाते हैं, अन्यथा असंरेखीय बिन्दु कहलाते हैं।

◈ **कोण (Angle) :**

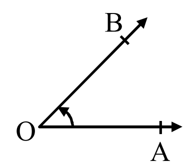
दो किरणें जिनका एक उभनिष्ठ अन्त बिन्दु हो, मिलकर एक कोण बनाते है।



OA, OB किरणें हैं तथा O सिरा बिन्दु है।

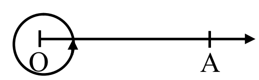
◈ **कोण की माप (Measure of an angle) :**

OA से OB की तरफ का घुमाव कोण $\angle AOB$ की माप होता है, जिसे $m\angle AOB$ लिखते हैं। किसी कोण को डिग्री में मापा जाता है, जिसे '°' से दर्शाते हैं।



◈ **360° का कोण (An angle of 360°) :**

यदि एक किरण OA इसकी मूल स्थिति OA से प्रारम्भ होकर बिन्दु O के सापेक्ष वामावर्त दिशा में घूमकर एक पूर्ण चक्र लेकर वापस अपनी स्थिति में आती है तो हम कह सकते हैं कि इसका घुमाव कोण 360 डिग्री है, जिसे हम 360° लिखते है।



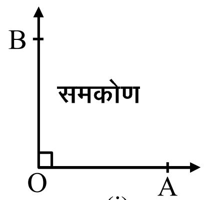
यह पूर्ण घुमाव 360 बराबर भागों में विभाजित किया जाता है, तो प्रत्येक भाग का माप 1° कहलाता है।

1° = 60 मिनट, जिसे 60' लिखते हैं।

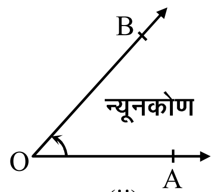
1' = 60 सैकण्ड, जिसे 60" लिखते हैं।

कोण की माप हेतु हम प्रोट्रेक्टर (चाँदा) का प्रयोग करते हैं।

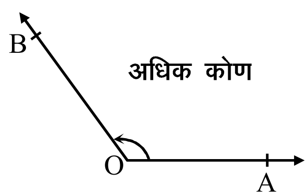
◈ **कोणों के प्रकार (Types of angles) :**



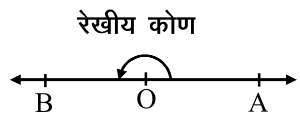
(i)



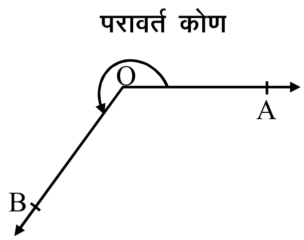
(ii)



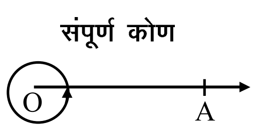
(iii)



(iv)



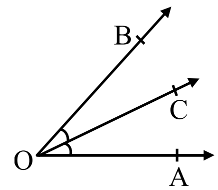
(v)



(vi)

◈ **कोण का समद्विभाजक (Bisector of an angle) :**

एक रेखा OC कोण $\angle AOB$ का समद्विभाजक कहलाती है, यदि $m\angle AOC = m\angle BOC$.



इस स्थिति में, $\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOB$.

◈ **पूरक कोण (Complementary angles) :**

दो कोण पूरक कोण कहलाते हैं, यदि उनका योग 90° हो।

दो पूरक कोण एक दूसरे के पूरक कहलाते हैं।

उदा. : 20° व 70° के कोण पूरक कोण कहलाते हैं।

◈ **संपूरक कोण (Supplementary angles) :**

दो कोण संपूरक कोण कहलाते हैं, यदि उनका योग 180° हो।

दो संपूरक कोण एक दूसरे के संपूरक कहलाते हैं।

उदा. : 60° व 120° के कोण संपूरक कोण कहलाते हैं।

❖ उदाहरण ❖

उदा.1 उस कोण की माप ज्ञात करो जो अपने पूरक कोण से 20° अधिक है।

हल. मानाकि अभीष्ट कोण x° है, तब इसका पूरक कोण $= (90 - x)°$.

$\therefore x - (90 - x) = 20 \Leftrightarrow 2x = 110 \Leftrightarrow x = 55$

अतः अभीष्ट कोण 55° है।

उदा.2 उस कोण की माप ज्ञात करो जो अपने संपूरक कोण से 40° कम है।

हल. मानाकि अभीष्ट कोण x° है।

तब इसका संपूरक कोण $= (180 - x)°$.

$\therefore (180 - x) - x = 40 \Leftrightarrow 2x = 140 \Leftrightarrow x = 70$

अतः अभीष्ट कोण की माप 70° है।

उदा.3 उस कोण की माप ज्ञात करो यदि उसके पूरक कोण का छः गुना, उसके संपूरक कोण के दुगुने से 12° कम हैं।

उदा. मानाकि अभीष्ट कोण की माप $x°$ है,

तब इसके पूरक कोण की माप $= (90 - x)°$.

तथा संपूरक कोण की माप $= (180 - x)°$.

$\therefore 6(90 - x) = 2(180 - x) - 12$

$\Leftrightarrow 540 - 6x = 360 - 2x - 12$

$\Leftrightarrow 4x = 192 \Leftrightarrow x = 48.$

अतः अभीष्ट कोण की माप 48° है

उदा.4 80° को डिग्री, मिनट व सैकण्ड में परिवर्तित कीजिएः

हल. $180° = 179° 59' 60''$.

उदा.5 कोण 87°28'43" का संपूरक कोण ज्ञात कीजिए

हल. चूँकि $180° = 179°59'60''$.

$\therefore$ (87°28'43") का संपूरक कोण

= [180° – (87°28'43")] कोण

= [179°59'60" – 87°28'43"] कोण

= (92°31'17") कोण

अतः अभीष्ट कोण = (92°31'17").

उदा.6 यदि $\angle A = 36°27'46''$ एवं $\angle B = 28°43'39''$, तो $\angle A + \angle B$ ज्ञात कीजिए।

हल. $\angle A + \angle B = 36°27'46'' + 28°43'39''$

$= 64°70'85'' = 64°71'25'' = 65°11'25''$

उदा.7 निम्न में से प्रत्येक कोण का पूरक कोण ज्ञात कीजिए :

(i) 58° (ii) 16°

(iii) समकोण का $\frac{2}{3}$ (iv) 46° 30'

हल. (i) $90° - 58° = 32°$

(ii) $90° - 16° = 74°$

(iii) $90° - \frac{2}{3}(90°) = 90° - 60° = 30°$

(iv) $90° - 46° 30'$

$= 89° 60' - 46° 30'$

$= 43° 30'$

उदा.8 उस कोण को ज्ञात कीजिए जो स्वयं का पूरक है

हल. मानाकि कोण की माप x^o है,

तब इसके पूरक कोण की माप x^o है,

चूँकि किसी कोण व उसका पूरक कोण दोनों का योग 90^o होना चाहिये

$\therefore x^o + x^o = 90^o \Rightarrow 2x^o = 90^o \Rightarrow x^o = 45^o$

उदा.9 उस कोण की माप ज्ञात कीजिए, जो स्वयं के साथ संपूरक कोणों का एक युग्म बनाती है

हल. मानाकि कोण की माप x^o है, तब

$x^o + x^o = 180^o \Rightarrow 2x^o = 180^o \Rightarrow x^o = 90^o$

उदा.10 एक कोण अपने पूरक कोण का पाँच गुना है, तो वह कोण ज्ञात कीजिए।

हल. मानाकि दिया गया कोण x डिग्री का है। तो इसका पूरक कोण $(90 - x)^o$ होगा,

यह दिया गया है कि :

कोण = 5 × इसका पूरक कोण

$\Rightarrow x = 5(90 - x) \quad \Rightarrow x = 450 - 5x$

$\Rightarrow 6x = 450 \quad \Rightarrow x = 75$

इस प्रकार दिये गये कोण की माप 75^o है।

उदा.11 एक कोण अपने संपूरक कोण के एक तिहाई के तुल्य हो, तो वह कोण ज्ञात कीजिए।

हल. मानाकि अभीष्ट कोण x डिग्री में है, तब इसका संपूरक कोण $= 180° - x$.

यह दिया गया है कि कोण = $\frac{1}{3}$ (संपूरक कोण)

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(180^o - x) \quad \Rightarrow 3x = 180^o - x$

$\Rightarrow 4x = 180^o \quad \Rightarrow x = 45^o$

इस प्रकार दिये गये कोण की माप 45^o है।

उदा.12 दो संपूरक कोणों में 2 : 3 का अनुपात हो, तो संपूरक कोण ज्ञात कीजिए।

हल. मानाकि दो संपूरक कोण 2x व 3x डिग्री में है, तब

$2x + 3x = 180^\circ$

$\Rightarrow\ 5x = 180^\circ \qquad \Rightarrow\ x = 36^\circ$

इस प्रकार दो कोण $2x = 2 \times 36^\circ = 72^\circ$ व

$3x = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$

उदा.13 निम्न कोण का पूरक कोण ज्ञात कीजिए: $30^\circ\ 20'$

हल. $30^\circ 20'$ का पूरक कोण

$= 90^\circ - 30^\circ\ 20'$

$= 90^\circ - (30^\circ + 20')$

$= (89^\circ - 30^\circ) + (1^\circ - 20')$

$= 59^\circ + (60' - 20') \qquad [\because 1^\circ = 60']$

$= 59^\circ + 40' = 59^\circ\ 40'$

उदा.14 निम्न कोण का संपूरक कोण ज्ञात कीजिए : $134^\circ\ 30'\ 26''$

हल. कोण $134^\circ\ 30'\ 26''$ का संपूरक कोण

$= 180^\circ - (134^\circ\ 30'\ 26'')$

$= (179^\circ - 134^\circ) + (1^\circ - 30'\ 26'')$

$= 45^\circ + (60' - (30' + 26'')) \qquad [\because 1^\circ = 60']$

$= 45^\circ + (59' - 30') + (1' - 26'')$

$= 45^\circ + 29' + 34'' \quad = 45^\circ 29' 34''$

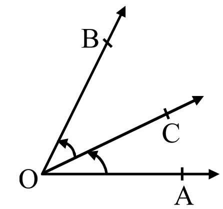
◈ **आसन्न कोण (Adjacent angles) :**

दो कोण आसन्न कोण कहलाते हैं, यदि

(i) उनका एक समान शीर्ष हो

(ii) उनकी उभयनिष्ठ भुजा हो एवं

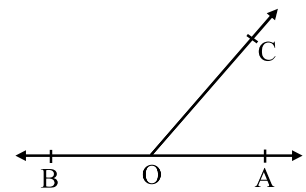
(iii) उनकी वे भुजाऐं जो उभयनिष्ठ नहीं है वे उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर होनी चाहिये।



इस दिये गये चित्र में, ∠AOC व ∠BOC संलग्न कोण हैं, जिनका एक समान शीर्ष O है तथा उभयनिष्ठ भुजा OC है तथा उनकी अन-उभयनिष्ठ भुजाऐं OA व OB हैं जो OC के विपरीत ओर हैं।

◈ **कोणों का रेखीय युग्म (Linear pair of angles) :**

दो आसन्न कोण, कोणों का एक रेखीय युग्म बनाते हैं यदि उनकी अन-उभयनिष्ठ भुजा, दो विपरीत रेखाऐं हों।



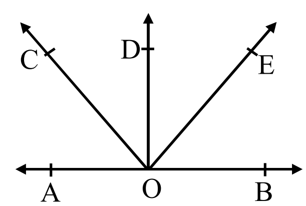
संलग्न चित्र में, ∠AOC व ∠BOC दो संलग्न कोण हैं, जिनकी अन-उभयनिष्ठ भुजा OA व OB हैं, जो दो विपरीत रेखाऐं हैं, अर्थात् BOA एक रेखा है।

∴ ∠AOC व ∠BOC कोणों का रेखीय युग्म है।

प्रमेय (Theorem) 1 :

सिद्ध करो कि एक रेखा के एक ही तरफ एक दी गई रेखा के किसी बिन्दु पर बनाये गये कोणों का योग 180° होता है।

दिया है (Given) : AOB एक सरल रेखा है एवं OC, OD व OE रेखायें इससे कोण ∠AOC, ∠COD, ∠DOE व ∠EOB बनाती है।



सिद्ध करना है कि (To prove) :

$\angle AOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOB = 180^\circ.$

उपपत्ति (Proof) : रेखा OC, रेखा AB पर है।

$\therefore\ \angle AOC + \angle COB = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle AOC + (\angle COD + \angle DOE + \angle EOB) = 180°$

$[\because \angle COB = \angle COD + \angle DOE + \angle EOB]$

$\Rightarrow \angle AOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOB = 180°$.

अतः रेखा AB के बिन्दु O के एक ही तरफ बने कोणों का योग 180° होता हैं।

प्रमेय (Theorem) 2 :

सिद्ध करो कि एक बिन्दु के चारों ओर बने कोणों का योग 360° है।

दिया है (Given) : एक बिन्दु O तथा रेखाऐं OA, OB, OC, OD व OE बिन्दु O के चारों तरफ कोण बना रही हैं

सिद्ध करना है (To prove) :

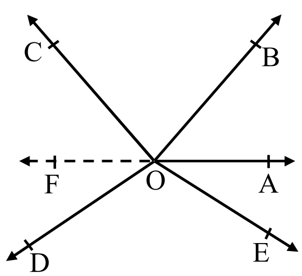
$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 360°$

रचना (Construction) : एक रेखा OF रेखा OA के विपरीत खींचो।

उपपत्ति (Proof) : चूँकि रेखा OB रेखा FA पर खड़ी है, हम जानते है कि : $\angle AOB + \angle BOF = 180°$ [रेखीय युग्म]

$\therefore \angle AOB + \angle BOC + \angle COF = 180°$ ….(i)

$[\because \angle BOF = \angle BOC + \angle COF]$



पुनः रेखा OD रेखा FA पर खड़ी है।

$\therefore \angle FOD + \angle DOA = 180°$ [रेखीय युग्म]

या $\angle FOD + \angle DOE + \angle EOA = 180°$ …(ii)

$[\because \angle DOA = \angle DOE + \angle EOA]$

(i) व (ii) को जोड़ने पर, हम पाते है कि :

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COF + \angle FOD + \angle DOE + \angle EOA = 360°$

$\therefore \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 360°$

$[\because \angle COF + \angle FOD = \angle COD]$

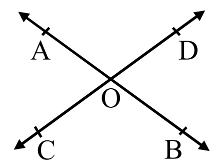
अतः बिन्दु O के चारों तरफ बनने वाले सभी कोणों का योग 360° होता है।

◈ **शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite angles) :**

दो कोण शीर्षाभिमुख कोणों का युग्म कहलाता है, यदि उनकी भुजाऐं दो सम्मुख रेखाओं के युग्म बनाती हैं।

मानाकि दो रेखाऐं AB व CD बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करती हैं, तब ऊर्ध्वाधर सम्मुख कोणों के दो युग्म निम्न प्रकार बनते हैं :

(i) $\angle AOC$ व $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ व $\angle BOC$



प्रमेय (Theorem) 3 :

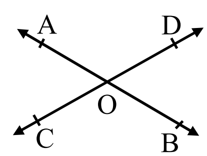
यदि दो रेखाऐं प्रतिच्छेदन करती हों, तो बनने वाले शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

दिया है (Given) : दो रेखाऐं AB व CD बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करती हैं

सिद्ध करना है (To prove) : (i) $\angle AOC = \angle BOD$,

(ii) $\angle AOD = \angle BOC$

उपपत्ति (Proof) : चूँकि रेखा OA रेखा CD से मिलती है, तब:



$\angle AOC + \angle AOD = 180°$ [रेखीय युग्म].

पुनः रेखा OD रेखा AB से मिलती है

$\therefore \angle AOD + \angle BOD = 180°$ [रेखीय युग्म]

$\therefore \angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$

[प्रत्येक 180° के तुल्य]

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$

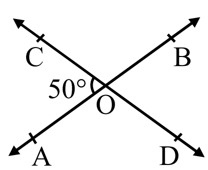
इसी प्रकार $\angle AOD = \angle BOC$

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

- दो कोण आसन्न कोण कहलाते हैं, यदि –
  - (i) उनका शीर्ष एक ही बिन्दु हो
  - (ii) उनकी उभयनिष्ठ भुजा एक ही हो तथा
  - (iii) अन-उभयनिष्ठ भुजाऐं, उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर हों
- दो आसन्न कोण, कोणों का एक रेखीय युग्म बनाते हैं, यदि अन-उभयनिष्ठ भुजाऐं दो सम्मुख भुजाऐं हों।
- यदि कोई रेखा, अन्य रेखा से मिले, तब इस प्रकार निर्मित आसन्न कोणों का योग 180º होता है।
- यदि दो आसन्न कोणों का योग 180º हो, तब उनकी अन-उभयनिष्ठ भुजाऐं दो विपरीत रेखाऐं होती हैं।
- एक बिन्दु के चारों ओर बनने वाले कोणों का योग 360º होता है।
- दो कोण, शीर्षाभिमुख कोणों का युग्म कहलाते हैं, यदि उनकी भुजाऐं दो विपरीत रेखाओं के युग्म बनाते हों।
- यदि दो सीधी रेखाऐं प्रतिच्छेदन करती हों, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

❖ उदाहरण ❖

उदा.15 दो रेखाऐं AB व CD बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करती हैं। यदि $\angle AOC = 50°$ हो तो कोण $\angle AOD$, $\angle BOD$ व $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।



हल. $\angle AOD + \angle AOC = 180°$ (रेखीय युग्म)

$\angle AOD + 50° = 180°$

$\angle AOD = 130°$

$\angle BOD = \angle AOC$

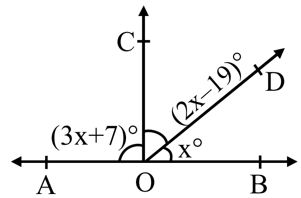
(शीर्षाभिमुख कोण)

तथा $\angle BOC = \angle AOD = 130°$

(शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore 130°, 50°, 130°.$

उदा.16 संलग्न चित्र में, AOB एक सरल रेखा है, तो x का मान ज्ञात कीजिए तदुपरान्त $\angle AOC$, $\angle COD$ व $\angle BOD$ ज्ञात कीजिए।



हल. $(3x + 7)° + (2x – 19)° + x° = 180'$ (रेखीय युग्म)

$\Rightarrow (6x – 12) = 180°$

$\Rightarrow 6x = 192°$

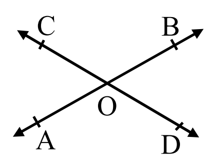
$\Rightarrow x = 32°$

$\therefore \angle AOC = 3x + 7 = 3(32) + 7 = 96 + 7 = 103°$

$\angle COD = 2x – 19 = 2(32) – 19 = 64 – 19 = 45°$

$\angle BOD = x° = 32°.$

उदा.17 दो रेखाऐं AB व CD बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन इस प्रकार करती हैं कि $\angle BOC + \angle AOD = 280°$ जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है, तो सभी चारों कोण ज्ञात करो?



हल. $\because \angle AOC = \angle BOD = x$(Let)

(शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \angle AOC + (\angle AOD + \angle BOC) + \angle BOD = 360°$

$\Rightarrow x + 280° + x = 360°$

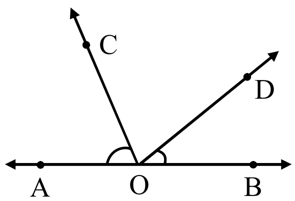
$\Rightarrow 2x = 80°$

$\Rightarrow x = 40°$

$\therefore \angle AOC = \angle BOD = x° = 40°.$

व $\angle BOC = \angle AOD = \dfrac{280}{2} = 140°.$

उदा.18 चित्र में, OA, OB विपरीत रेखाऐं हैं तथा $\angle AOC + \angle BOD = 90°$ तो $\angle COD$ ज्ञात करो?



हल. चूँकि OA व OB विपरीत रेखाऐं हैं, अतः AB एक रेखा है, चूँकि रेखा OC रेखा AB पर मिलती है।

$\therefore \angle AOC + \angle COB = 180°$

$\Rightarrow \angle AOC + \angle COD + \angle BOD = 180°$

$[\because \angle COB = \angle COD + \angle BOD]$

$\Rightarrow (\angle AOC + \angle BOD) + \angle COD = 180°$

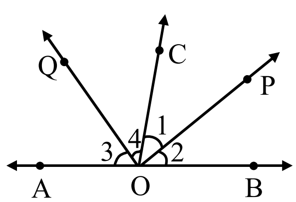
$\Rightarrow 90° + \angle COD = 180°$

$[\because \angle AOC + \angle BOD = 90°$ (दिया है)$]$

$\Rightarrow \angle COD = 180° - 90° = 90°$

उदा.19 चित्रानुसार, OP कोण $\angle BOC$ को तथा OQ, $\angle AOC$ को समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध करो कि $\angle POQ = 90°$

हल.



प्रश्नानुसार, OP कोण $\angle BOC$ को समद्विभाजित करता है।

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

या $\angle 1 = \dfrac{\angle BOC}{2}$

तथा OQ कोण $\angle AOC$ का समद्विभाजक है।

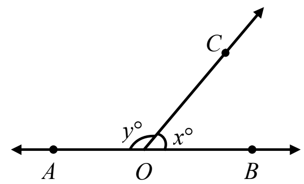
$\therefore \angle 3 = \angle 4$

या $\angle 4 = \dfrac{\angle AOC}{2}$

$\therefore \angle 1 + \angle 4 = \dfrac{\angle BOC}{2} + \dfrac{\angle AOC}{2}$

$= \dfrac{\angle BOC + \angle AOC}{2} = \dfrac{180}{2} = 90°$

उदा.20 चित्रानुसार OA व OB विपरीत रेखाऐं हैं :



(i) यदि x = 75 तो y का मान है ?

(ii) यदि y = 110 तो x का मान है ?

हल. चूँकि $\angle AOC$ तथा $\angle BOC$ एक रेखीय युग्म बनाते हैं, अतः

$\angle AOC + \angle BOC = 180°$

$\Rightarrow x + y = 180°$ ...(1)

(i) यदि x = 75 तब (i) से

$75 + y = 180°$

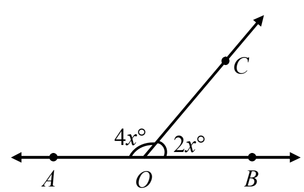
$y = 105°$.

(ii) यदि y = 110 तब (i) से

$x + 110 = 180$

$\Rightarrow x = 180 - 110 = 70$.

उदा.21 चित्रानुसार $\angle AOC$ व $\angle BOC$ एक रेखीय युग्म बनाते हैं, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हल. चूँकि $\angle AOC$ व $\angle BOC$ एक रेखीय युग्म बनते हैं।

$\therefore \angle AOC + \angle BOC = 180°$

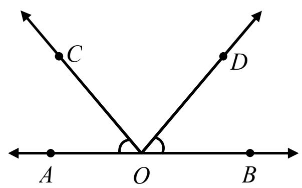
$\Rightarrow 4x + 2x = 180°$

$\Rightarrow 6x = 180°$

$\Rightarrow \quad x = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$

इस प्रकार $x = 30^\circ$

उदा.22 चित्रानुसार OA, OB विपरीत रेखाऐं हैं तथा $\angle AOC + \angle BOD = 90^\circ$ हो तो $\angle COD$ ज्ञात कीजिए



हल. चूँकि OA व OB विपरीत रेखाऐं हैं, अतः AB एक रेखा है, चूँकि रेखा OC रेखा AB से मिलती है, अतः

$\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$ [रेखीय युग्म]

$\Rightarrow \angle AOC + \angle COD + \angle BOD = 180^\circ$

$[\because \angle COB = \angle COD + \angle BOD]$

$\Rightarrow (\angle AOC + \angle BOD) + \angle COD = 180^\circ$

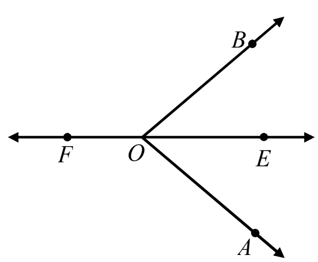
$\Rightarrow 90^\circ + \angle COD = 180^\circ$

$[\because \angle AOC + \angle BOD = 90^\circ$ (दिया है)]

$\Rightarrow \angle COD = 180^\circ - 90^\circ$

$\Rightarrow \angle COD = 90^\circ$

उदा.23 चित्रानुसार रेखा OE कोण $\angle AOB$ को समद्विभाजित करती है तथा OF रेखा OE के विपरीत किरण है, तो प्रदर्शित करो कि $\angle FOB = \angle FOA$.



हल. चूँकि रेखा OE कोण AOB को समद्विभाजित करती है, अतः

$\angle EOB = \angle EOA$ ....(i)

अब, रेखा OB रेखा EF से मिलती है।

$\therefore \angle EOB + \angle FOB = 180^\circ$ ...(ii) [रेखीय युग्म]

पुनः, रेखा OA रेखा EF से मिलती है

$\therefore \angle EOA + \angle FOA = 180^\circ$ ....(iii)

(ii) व (iii) से हम पाते है कि

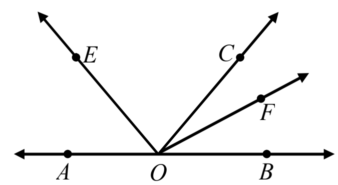
$\angle EOB + \angle FOB = \angle EOA + \angle FOA$

$\Rightarrow \angle EOA + \angle FOB = \angle EOA + \angle FOA$

$[\because \angle EOB = \angle EOA$ ((i) से]

$\Rightarrow \angle FOB = \angle FOA.$

उदा.24 चित्रानुसार OE, कोण $\angle AOC$ का समद्विभाजन करती है तथा OF, कोण $\angle COB$ का समद्विभाजन करती है एवं $OE \perp OF$, तो सिद्ध करो कि A, O, B संरेखीय हैं।



हल. चूँकि OE व OF क्रमशः कोण AOC व कोण COB का समद्विभाजन करते हैं, अतः

$\angle AOC = 2\angle EOC$ ....(i)

व $\angle COB = 2\angle COF$ ....(ii)

(i) व (ii) का जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

$\angle AOC + \angle COB = 2\angle EOC + 2\angle COF$

$\Rightarrow \angle AOC + \angle COB = 2(\angle EOC + \angle COF)$

$\Rightarrow \angle AOC + \angle COB = 2(\angle EOF)$

$\Rightarrow \angle AOC + \angle COB = 2 \times 90^\circ$

$[\because OE \perp OF \therefore \angle EOF = 90^\circ]$

$\Rightarrow \angle AOC + \angle COB = 180^\circ$

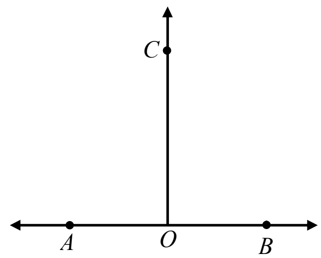
परन्तु $\angle AOC$ व $\angle COB$ आसन्न कोण हैं

इस प्रकार $\angle AOC$ व $\angle COB$ आसन्न पूरक कोण हैं। अतः $\angle AOC$ व $\angle COB$ एक रेखीय युग्म बनाते हैं। चूँकि OA व OB दो विपरीत रेखाऐं हैं, अतः A, O, B संरेखीय हैं।

उदा.25 यदि किरण OC रेखा AB से इस प्रकार मिलती है कि $\angle AOC = \angle COB$ तो प्रदर्शित करो कि $\angle AOC = 90^o$.

हल. चूँकि किरण OC रेखा AB से मिलती है, अतः

$\angle AOC + \angle COB = 180^o$ [रेखीय युग्म] ...(i)

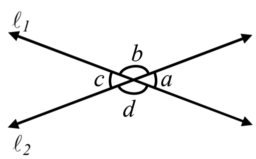


परन्तु $\angle AOC = \angle COB$ (दिया है)

$\therefore \angle AOC + \angle AOC = 180^o$

$\Rightarrow 2\angle AOC = 180^o \Rightarrow \angle AOC = 90^o$

उदा.26 चित्रानुसार, रेखाऐं ℓ_1 व ℓ_2 बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करती हैं, जिससे कोण निर्मित होते हैं (चित्र देखें) यदि $a = 35^o$ हो तो b, c, व d का मान ज्ञात कीजिए।



हल. चूँकि रेखाऐं ℓ_1 व ℓ_2 बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करती हैं, अतः

$\angle a = \angle c$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\Rightarrow \angle c = 35^o$ [$\therefore \angle a = 35^o$]

स्पष्टतः $\angle a + \angle b = 180^o$

[चूँकि $\angle a$ व $\angle b$ एक रेखीय युग्म के कोण हैं]

$\Rightarrow 35^o + \angle b = 180^o$

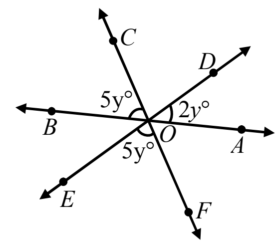
$\Rightarrow \angle b = 180^o - 35^o$

$\Rightarrow \angle b = 145^o$

चूँकि $\angle b$ व $\angle d$ शीर्षाभिमुख कोण है, अतः

$\angle d = \angle b \Rightarrow \angle d = 145^o$ [$\therefore \angle b = 145^o$]

उदा.27 चित्रानुसार, y का मान ज्ञात कीजिए।



हल. चूँकि $\angle COD$ व $\angle EOF$ शीर्षाभिमुख कोण हैं, अतः

$\angle COD = \angle EOF \Rightarrow \angle COD = 5y^o$

[$\therefore \angle EOF = 5y^o$ (दिया है)]

अब, OA व OB सम्मुख रेखाऐं है।

$\therefore \angle AOD + \angle DOC + \angle COB = 180^o$

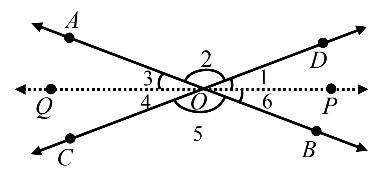
$\Rightarrow 2y^o + 5y^o + 5y^o = 180^o$

$\Rightarrow 12y^o = 180^o$

$\Rightarrow y^o = \frac{180^o}{12} = 15.$

इस प्रकार $y^o = 15.$

उदा.28 चित्र में, AB व CD सरल रेखाऐं हैं तथा OP व OQ क्रमशः कोण BOD व AOC के समद्विभाजक हैं, तो प्रदर्शित करो कि OP व OQ एक ही रेखा पर हैं।



हल. OP व OQ को एक समान रेखा पर होने हेतु यह पर्याप्त है कि हम $\angle POQ = 180^o$ सिद्ध करें

अब OP कोण $\angle AOC$ का समद्विभाजक है

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 6$ ...(i)

तथा OQ, कोण $\angle AOC$ का समद्विभाजक है

$\Rightarrow \angle 3 = \angle 4$ ....(ii)

स्पष्टतः $\angle 2$ व $\angle 5$ शीर्षाभिमुख कोण हैं।

$\therefore \angle 2 = \angle 5$ ....(iii)

हम जानते हैं कि एक बिन्दु पर बनने वाले कोणों का योग 360^o होता है। अतः

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360^o$

$\Rightarrow (\angle 1 + \angle 6) + (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 2 + \angle 5) = 360^\circ$

$\Rightarrow \ 2\angle 1 + 2\angle 3 + 2\angle 2 = 360^\circ$

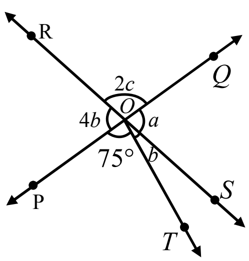
[(i), (ii) व (iii) का प्रयोग करने पर]

$\Rightarrow \ 2(\angle 1 + \angle 3 + \angle 2) = 360^\circ$

$\Rightarrow \ \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \quad \Rightarrow \angle POQ = 180^\circ$

इस प्रकार, OP व OQ एक सरल रेखा पर हैं।

उदा.29 चित्र में, दो सरल रेखाऐं PQ व RS एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle POT = 75^\circ$ तो a, b व c का मान ज्ञात कीजिए?



हल. चूँकि OR व OS एक ही रेखा पर हैं, अतः

$\angle ROP + \angle POT + \angle TOS = 180^\circ$

$\Rightarrow \ 4b^\circ + 75^\circ + b^\circ = 180^\circ \Rightarrow 5b^\circ + 75^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \ 5b^\circ = 105^\circ \Rightarrow \ b^\circ = 21$

चूँकि PQ व RS बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करती हैं, अतः

$\angle QOS = \angle POR$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\Rightarrow \ a = 4b$

$\Rightarrow \ a = 4 \times 21 = 84$ [$\therefore$ b = 21]

अब, OR व OS एक ही रेखा पर हैं, अतः

$\angle ROQ + \angle QOS = 180^\circ$ [रेखीय युग्म]

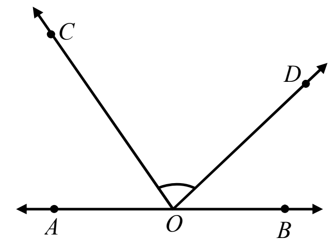
$\Rightarrow \ 2c + a = 180$

$\Rightarrow \ 2c + 84 = 180$ [$\therefore$ b = 84]

$\Rightarrow \ 2c = 96 \Rightarrow \ c = 48$

अतः a = 84, b = 21 व c = 48

उदा.30 चित्र में, यदि $\angle AOC + \angle BOD = 70^\circ$ तो $\angle COD$ ज्ञात कीजिए



हल. $\angle AOC + \angle COD + \angle BOD = 180^\circ$

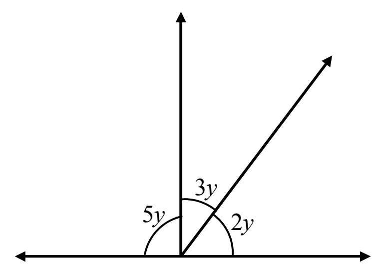
या $(\angle AOC + \angle BOD) + \angle COD = 180^\circ$

या $70^\circ + \angle COD = 180^\circ$

या $\angle COD = 180^\circ - 70^\circ$

या $\angle COD = 110^\circ$

उदा.31 चित्र में, y का मान ज्ञात कीजिए

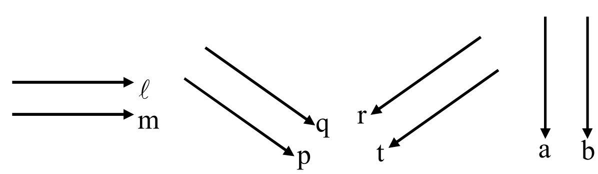


हल. $2y + 3y + 5y = 180^\circ$

$\Rightarrow 10y = 180^\circ \Rightarrow y = \dfrac{180^\circ}{10^\circ} = 18^\circ$

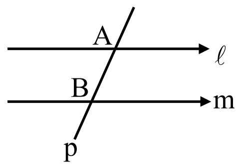
◈ **समान्तर रेखाऐं (Parallel lines) :**

वे रेखाऐं जो कि एक ही तल में हों तथा एक दूसरे को नहीं काटती हों अर्थात् उनके मध्य की दूरी हर जगह एक समान रहती हो, समान्तर रेखाऐं कहलाती है।



◈ **तिर्यक रेखा (Transversal line) :**

वह रेखा जो दो या अधिक रेखाओं को विभिन्न बिन्दुओं पर काटती है, तिर्यक रेखा कहलाती है।



यहाँ $\ell \parallel m$ व p तिर्यक रेखा है।

* तिर्यक रेखा का वह भाग जो दो रेखाओं के मध्य आता है, अन्तःखण्ड (AB) कहलाता है।

➤ महत्त्वपूर्ण बिन्दु

- एक तिर्यक रेखा के एक ही तरफ वाले दो कोण, संगत कोण कहलाते हैं, यदि दोनों दो रेखाओं के ऊपर या दो रेखाओं के नीचे स्थित हों।

- अन्तःकोणों का युग्म जो तिर्यक रेखा के एक ही तरफ हों, क्रमागत अन्तःकोण होते हैं

- यदि एक तिर्यक रेखा, दो समान्तर रेखाओं का प्रतिच्छेदन करती हो तो संगत कोणों के प्रत्येक युग्म बराबर होते हैं।

- यदि एक तिर्यक रेखा, दो समान्तर रेखाओं का प्रतिच्छेदन करती हो तो एकान्तर अन्तःकोणों का प्रत्येक युग्म समान होता है।

- यदि एक तिर्यक रेखा, दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेदन करती है कि एकान्तर अन्तःकोणों का एक युग्म समान हो, तो दोनों रेखाऐं समान्तर होती हैं।

- यदि एक तिर्यक रेखा, दो समान्तर रेखाओं का प्रतिच्छेदन करती हो, तो क्रमागत अन्तःकोण संपूरक कोण होते हैं।

- यदि एक तिर्यक रेखा, दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेदन करती है कि क्रमागत अन्तःकोणों का एक युग्म पूरक हो, तो ये दोनों रेखाऐं समान्तर होती हैं।

- यदि दो समान्तर रेखाऐं, एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित होती हों, तो एकान्तर अन्तःकोणों का कोई युग्म समान्तर होता है।

- यदि दो समान्तर रेखाऐं, एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित होती हो तो किन्हीं दो संगत कोणों के समद्विभाजक समान्तर होते हैं।

- दो दी गई रेखाओं को तिर्यक रेखा द्वारा काटने पर बनने वाले संगत कोणों के युग्म का समद्विभाजक समान्तर हों, तो सिद्ध करो कि दी गई रेखाऐं समान्तर हैं

- यदि कोई रेखा, दो दी गई समान्तर रेखाओं के लम्बवत् हो, तो यह दूसरी रेखा के भी लम्बवत् होता है।

- यदि एक त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाला बाह्य कोण का मान दो अन्तः सम्मुख कोणों के योग के तुल्य होता है।

- यदि एक बहुभुज की सभी भुजाऐं एक समान हों, तो इसे समबहुभुज कहते हैं।

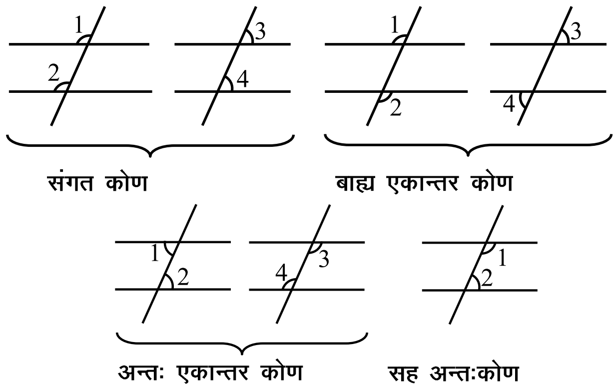
- **n-भुजाओं वाले बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योग $= (n - 2) \times 180^o \ (n \geq 3)$**

- **n-भुजाओं वाले एक समबहुभुज का प्रत्येक अन्तःकोण** $= \frac{(n-2)\times 180^o}{n}$

- **एक बहुभुज की भुजाओं को बढ़ाने पर बनने वाले बाह्य कोणों का योग $= 360^o$.**

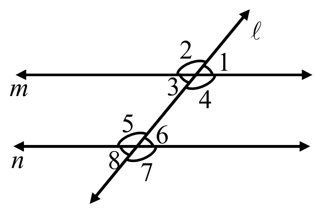
- **समबहुभुज में भुजाओं की संख्या**

$$= \frac{360^o}{180^o - \text{प्रत्येक अन्तःकोण}}$$



❖ उदाहरण ❖

उदा.32 चित्रानुसार $m \parallel n$ तथा $\angle 1 = 65^o$ तो $\angle 5$ व $\angle 8$ ज्ञात कीजिए?



हल. हम जानते हैं कि

$\angle 1 = \angle 3$ [शीर्षाभिमुख कोण]

एवं $\angle 3 = \angle 8$ [संगत कोण]

$\therefore \angle 1 = \angle 8$

$\Rightarrow \angle 8 = 65^o$ [$\because \angle 1 = 65^o$ (दिया है)]

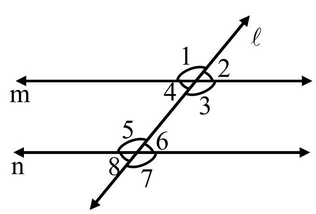
अब $\angle 5 + \angle 8 = 180^o$

$\Rightarrow \angle 5 + 65^o = 180^o$

$\Rightarrow \angle 5 = 180^o - 65^o = 115^o$

इस प्रकार $\angle 5 = 115^o$ व $\angle 8 = 65^o$.

उदा.33 चित्र में, $m \parallel n$ तथा कोण 1 व 2 में अनुपात 3 : 2 हो, तो कोण 1 से 8 तक के सभी कोण ज्ञात कीजिए।



हल. यह दिया गया है कि $\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2$

$\angle 1 = 3x^o$ तथा $\angle 2 = 2x^o$

परन्तु $\angle 1$ व $\angle 2$ एक रेखीय युग्म बनाते हैं।

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^o$

$\Rightarrow 3x^o + 2x^o = 180^o \quad \Rightarrow 5x^o = 180^o$

$\Rightarrow x = \frac{180^o}{5} = 36^o$

$\therefore \angle 1 = 3x^o = (3 \times 36)^o = 108^o$

एवं $\angle 2 = 2x^o = (2 \times 36)^o = 72^o$

अब, $\angle 1 = \angle 4$ व $\angle 2 = \angle 3$

[शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore \angle 4 = 72^o$ व $\angle 3 = 108^o$

अब, $\angle 6 = \angle 2^o$ एवं $\angle 3 = \angle 7$

[संगत कोण]

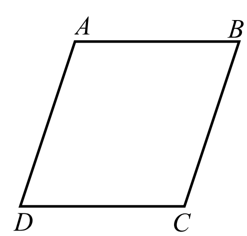
$\Rightarrow \angle 6 = 72^o$ व $\angle 7 = 108^o$ [$\because \angle 2 = 72^o$]

पुनः $\angle 5 = \angle 7$ व $\angle 8 = \angle 6$

$\therefore \angle 5 = 108^o$ व $\angle 8 = 72^o$

अतः $\angle 1 = 108^o$, $\angle 2 = 72^o$, $\angle 3 = 108^o$, $\angle 4 = 72^o$, $\angle 5 = 108^o$ $\angle 6 = 72^o$, $\angle 7 = 108^o$ एवं $\angle 8 = 72^o$.

उदा.34 चित्र में, $AB \parallel DC$ एवं $AD \parallel BC$ सिद्ध करो कि $\angle DAB = \angle DCB$.



हल. चूँकि $AD \parallel BC$ तथा AB एक तिर्यक रेखा है, जो क्रमशः A व B पर काटती है, अतः

$\angle DAB + \angle ABC = 180^o$

[क्रमागत अन्तःकोण] ...(i)

पुनः $AB \parallel CD$ तथा BC एक तिर्यक रेखा है, जो क्रमशः B व C पर प्रतिच्छेदन करती है, अतः

$\angle ABC + \angle DCB = 180^o$

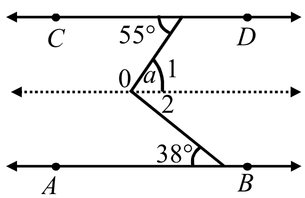
[क्रमागत अन्तःकोण] ....(ii)

(i) व (ii) से, हम पाते हैं कि

$\angle DAB + \angle ABC = \angle ABC + \angle DCB$

$\Rightarrow \angle DAB = \angle DCB$

उदा.35 चित्र में, AB || CD तो $\angle a$ का निर्धारण कीजिए ?



हल. बिन्दु O से, एक रेखा ℓ खींचिये जो AB व CD दोनों के समान्तर हो।

स्पष्टतः $\angle a = \angle 1 + \angle 2$ ....(ii)

अब, $\angle 1 = 55^o$ [एकान्तर $\angle s$]

एवं $\angle 2 = 38^o$ [एकान्तर $\angle s$]

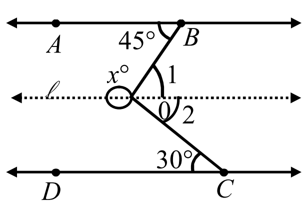
$\therefore \angle a = 55^o + 38^o$ [(i) का प्रयोग करने पर]

$\Rightarrow \angle a = 93^o$.

अतः $\angle a = 93^o$

उदा.36 चित्र में, AB || CD हो तो X का मान ज्ञात करो।

हल. बिन्दु O से होती हुई एक रेखा ℓ खींचो जो AB तथा CD दोनों के समान्तर हो, तब



$\angle 1 = 45^o$ [एकान्तर $\angle s$]

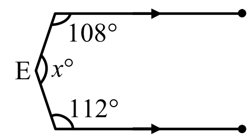
एवं $\angle 2 = 30^o$ [एकान्तर $\angle s$]

$\therefore \angle BOC = \angle 1 + \angle 2 = 45^o + 30^o = 75^o$

So, $x = 360 - \angle BOC = 360 - 75 = 285^o$

अतः $x = 285^o$

उदा.37 चित्र में, AB || CD हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हल. EF खींचिये जो दोनों AB व CD के समान्तर हैं।

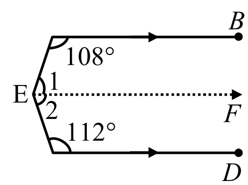
अब AB || EF तथा तिर्यक AE उन्हें क्रमशः A व E पर काटती है।

$\angle BAE + \angle FEA = 180^o$

$\Rightarrow 108^o + \angle 1 = 180^o \Rightarrow \angle 1 = 180^o - 108^o = 72^o$

पुनः EF || CD तथा तिर्यक CE उन्हें क्रमशः E व F पर काटती है

$\therefore \angle FEC + \angle ECD = 180^o$



$\Rightarrow \angle 2 + 112^o = 180^o$

$\Rightarrow \angle 2 = 180^o - 112^o$

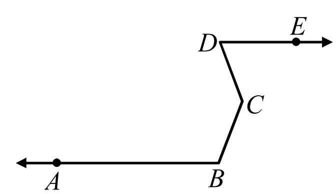
$\Rightarrow \angle 2 = 68^o$

अब, $x = \angle 1 + \angle 2$

$\Rightarrow x = 72^o + 68^o = 140^o$

उदा.38 चित्र में, AB || DE तो सिद्ध करो कि

$\angle ABC + \angle BCD = 180^o + \angle CDE$.



हल. C से होकर, CF खींचिये जो AB व DE दोनों के समान्तर हो चूँकि AB || CF एवं तिर्यक BC उन्हे क्रमशः B व C पर काटती हैं, अतः

$\angle ABC + \angle 1 = 180^o$ ....(i)

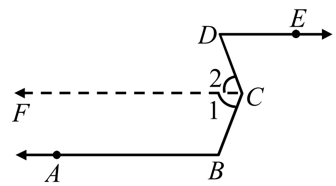
[$\because$ क्रमागत अन्तःकोण संपूरक कोण होते हैं]

इसी प्रकार, DE || CF तथा तिर्यक CD उन्हें क्रमशः C व D पर काटती है

$\angle CDE = \angle 2$ [एकान्तर कोण] ....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

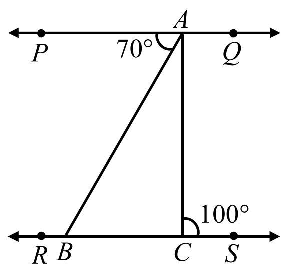
$\angle ABC + \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ + \angle CDE$



$\Rightarrow$ $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ + \angle CDE$

[$\because \angle 1 + \angle 2 = \angle BCD$]

उदा.39 चित्र में, यदि PQ $\parallel$ RS, $\angle PAB = 70^\circ$ एवं $\angle ACS = 100^\circ$ तो $\angle ABC$, $\angle BAC$ व $\angle CAQ$ ज्ञात करो।



हल. चूँकि PQ $\parallel$ RS तथा तिर्यक रेखा AB उन्हें क्रमशः A व B काटती है।

$\therefore \angle ABC = \angle PAB$ [एकान्तर कोण]

$\Rightarrow \angle ABC = 70^\circ$ [$\because \angle PAB = 70^\circ$ (दिया है)]

अब PQ $\parallel$ RS तथा तिर्यक AC उन्हें क्रमशः A व C पर काटती हैं।

$\therefore \angle PAC = \angle ACS$ [एकान्तर कोण]

$\Rightarrow \angle PAC = 100^\circ$ [$\because \angle ACS = 100^\circ$]

$\Rightarrow \angle PAB + \angle BAC = 100^\circ$

[$\because \angle PAC = \angle PAB + \angle BAC$]

$\Rightarrow 70^\circ + \angle BAC = 100^\circ$

$\Rightarrow \angle BAC = 30^\circ$

अब, किरण AB, PQ को A पर मिलती है

$\therefore \angle PAC + \angle CAQ = 180^\circ$

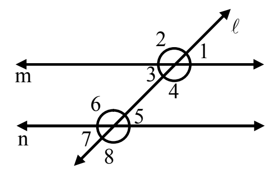
$\Rightarrow 100^\circ + \angle CAQ = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle CAQ = 80^\circ$

अतः $\angle ABC = 70^\circ$,

$\angle BAC = 30^\circ$ व $\angle CAQ = 80^\circ$.

उदा.40 चित्र में, यदि $\angle 2 = 120^\circ$ एवं $\angle 5 = 60^\circ$ हो तो प्रदर्शित करो कि m $\parallel$ n.



हल. हम जानते हैं कि

$\angle 2 = 120^\circ$ व $\angle 5 = 60^\circ$

परन्तु $\angle 2 = \angle 4$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore$ $\angle 4 = 120^\circ$, $\angle 5 = 60^\circ$

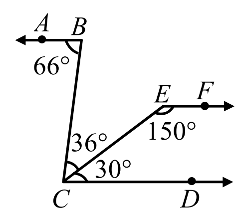
$\Rightarrow$ $\angle 4 + \angle 5 = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle 4$ व $\angle 5$ संपूरक कोण हैं।

$\Rightarrow$ क्रमागत अन्तःकोण संपूरक कोण होते हैं

$\Rightarrow$ m $\parallel$ n.

उदा.41 चित्र में, प्रदर्शित करो कि AB $\parallel$ EF.



हल. हम जानते हैं कि

$\angle BCD = \angle BCE + \angle ECD$

$= 36^\circ + 30^\circ = 66^\circ$

$\therefore$ $\angle ABC = \angle BCD$

इस प्रकार, रेखाऐं AB व CD रेखा BC द्वारा प्रतिच्छेदित इस प्रकार होती हैं कि $\angle ABC = \angle BCD$ अर्थात् एकान्तर कोण समान होते है, अतः

AB $\parallel$ CD ....(i)

अब $\angle ECD + \angle CEF = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$

इस प्रकार प्रदर्शित होता हैं कि तिर्यक रेखा CE के एक ही तरफ वाले अन्तःकोणों का योग 180^o होता है अर्थात् वे संपूरक होते हैं।

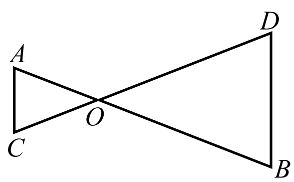
$\therefore$ EF || CD ....(ii)

(i) व (ii) से,

AB || CD व CD || EF $\Rightarrow$ AB || EF.

अतः AB || EF

उदा.42 चित्र में, यदि $\angle AOC = \angle ACO$ एवं $\angle BOD = \angle BDO$ हो तो सिद्ध करो कि AC || DB.



हल. हम जानते हैं कि

$\angle AOC = \angle ACO$ एवं $\angle BOD = \angle BDO$

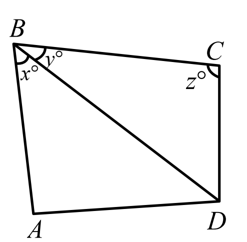
परन्तु $\angle AOC = \angle BOD$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore$ $\angle ACO = \angle BOD$ एवं $\angle BOD = \angle BDO$

$\Rightarrow$ $\angle ACO = \angle BDO$

इस प्रकार AC व BD दो रेखाऐं हैं, जिन्हें एक तिर्यक CD इस प्रकार से काटती है कि $\angle ACO = \angle BDO$ अर्थात् एकान्तर कोण समान हैं, अतः AC || DB.

उदा.43 चित्र में, AB || DC यदि $x = \frac{4}{3}y$ एवं $y = \frac{3}{8}z$ हो तो x, y व z का मान ज्ञात कीजिए।



हल. चूँकि AB || DC एवं तिर्यक रेखा BD उन्हें क्रमशः B व D पर काटती है अतः

$\angle ABD = \angle CDB \quad \Rightarrow \angle CDB = x^o$

ΔBCD में, हम जानते हैं कि

$y^o + z^o + x^o = 180^o$

$\Rightarrow \frac{3}{8}z^o + z^o + \frac{4}{3} \times \frac{3}{8}z^o = 180$

$\Rightarrow \frac{3}{8}z^o + z^o + \frac{1}{2}z^o = 180$

$\Rightarrow \frac{15}{8}z^o = 180^o$

[$\because x = \frac{4}{3}y$ व $y = \frac{3}{8}z$

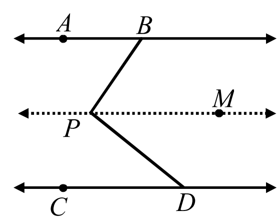
$\therefore x = \frac{4}{3} \times \frac{3}{8}z = \frac{z}{2}$]

$\Rightarrow z^o = 180^o \times \frac{8}{15} = 96^o$

अब $y = \frac{3}{8}z \Rightarrow y = \frac{3}{8} \times 96^o = 36^o$

व $x = \frac{4}{3}y \Rightarrow x = \frac{4}{3} \times 36^o = 48$

उदा.44 चित्रानुसार, रेखाऐं AB व CD समान्तर हैं एवं P कोई बिन्दु दो रेखाओं के मध्य स्थित हो तो सिद्ध करो कि $\angle ABP + \angle CDP = \angle DPB$.



हल. बिन्दु P से होकर एक रेखा PM खींची जाती है, जो AB या CD के समान्तर है।

अब

PM || AB [रचना से]

$\Rightarrow \angle ABP = \angle MPB$ [रचना] ....(i)

यह दिया गया है कि CD || AB एवं PM || AB अतः

PM || CD

[$\because$ वे रेखाऐं जो एक ही रेखा के समान्तर हैं, तो वे परस्पर समान्तर भी हो]

$\Rightarrow \angle CDP = \angle MPD$ [एकान्तर कोण] ....(ii)

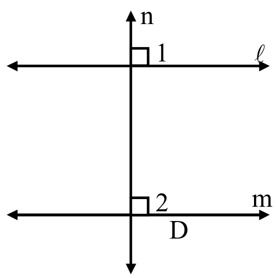
(i) व (ii) को जोड़ने पर, हम पाते है कि

$\angle ABP + \angle CDP = \angle MPB + \angle MPD = \angle DPB$

उदा.45 सिद्ध करो कि दो रेखाऐं जो एक ही रेखा के लम्बवत हों, तो वे परस्पर समान्तर होती हैं।

हल. मानाकि रेखाऐं ℓ, m, n इस प्रकार से है कि $\ell \perp n$ एवं $m \perp n$ (चित्रानुसार)

हमे सिद्ध करना है कि $\ell \parallel m$



अब, $\ell \perp n$ व $m \perp n$

$\Rightarrow \angle 1 = 90^\circ$ व $\angle 2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

इस प्रकार, तिर्यक रेखा n द्वारा रेखाओं ℓ व m पर बनाये गये संगत कोण बराबर हैं। अतः $\ell \parallel m$.

उदा.46 सिद्ध करो कि दो कोण जिनकी भुजाऐं समान्तर हैं तो या तो वो समान होते हैं या संपूरक होते हैं।

हल. **दिया है (Given) :** दो कोण $\angle ABC$ व $\angle DEF$ इस प्रकार से हैं कि $BA \parallel ED$ व $BC \parallel EF$.

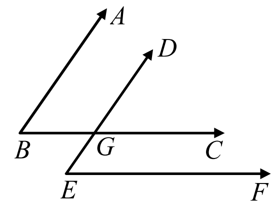
सिद्ध करना है (To prove) : $\angle ABC = \angle DEF$

या $\angle ABC + \angle DEF = 180^\circ$

उपपत्ति (Proof) : निम्न तीन स्थितियों का अवलोकन करें:

स्थिति I : चित्रानुसार जब भुजाओं के दोनों युग्म एक समान रूप से समान्तर हों, जैसे

AB $\parallel$ DE तथा तिर्यक BC उन्हें क्रमशः B व G पर काटती है



$\therefore \angle ABC = \angle DGC$ ...(i)

[संगत कोण]

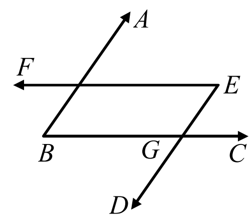
पुनः BC $\parallel$ EF एवं तिर्यक DE उन्हें क्रमशः G व E पर काटती है

$\therefore \angle DGC = \angle DEF$ ...(ii)

(i) व (ii) से हम पाते है कि

$\angle ABC = \angle DEF$

स्थिति II : जब भुजाओं के दोनों युग्म विपरीत रूप से समान्तर हों, चित्रानुसार



AB $\parallel$ DE एवं तिर्यक रेखा BC उन्हें क्रमशः B व G पर काटती हैं।

$\therefore \angle ABC = \angle EGC$ ....(iii)

[संगत कोण]

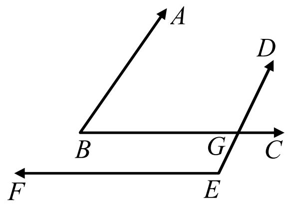
पुनः BC $\parallel$ EF एवं तिर्यक रेखा DE उन्हें क्रमशः G व E पर काटती है।

$\therefore \angle DEF = \angle EGC$ [एकान्तर कोण] ....(iv)

(iii) व (iv) से हम पाते हैं कि

$\angle ABC = \angle DEF$.

स्थिति III : जब भुजाओं का एक युग्म एक दिशीय रूप से समान्तर हो तथा दूसरा युग्म विपरीत दिशीय रूप से समान्तर हो, (चित्र देखें)



AB || DE एवं तिर्यक रेखा BC उन्हें काटती है

$\therefore$ $\angle ABC = \angle BGE$ [एकान्तर कोण] ....(v)

पुनः BC || FE एवं तिर्यक रेखा DE उन्हें काटती है

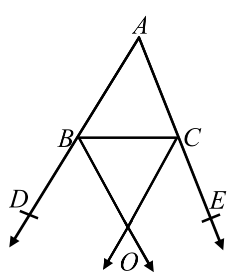
$\therefore$ $\angle DEF + \angle BGE = 180^o$ ....(vi)

[$\because$ क्रमागत अन्तःकोण संपूरक कोण होते हैं]

(v) व (vi) से, हम पाते हैं कि

$\angle ABC + \angle DEF = 180^o$

उदा.47 ΔABC की भुजाओं AB तथा AC को बढ़ाने पर बनने वाले बाह्य कोण B तथा C के समद्विभाजक एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करते हों, तो सिद्ध करो कि $\angle BOC = 90^o - \frac{1}{2}\angle A$.



हल. $\angle DBC = 180^o - \angle B$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\angle DBC = \angle OBC = 90^o - \angle B/2$

इसी प्रकार $\angle OCB = 90^o - \angle C/2$

$\angle OBC$ में, हम जानते हैं कि

$\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^o$

या $(90^o - \angle B/2) + (90^o - \angle C/2) + \angle BOC = 180^o$

$\angle BOC = 180^o - (180^o - \angle B/2 + \angle C/2)$

$= B/2 + C/2$ ...(i)

परन्तु $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$

या $\angle B + \angle C = 180^o - \angle A$

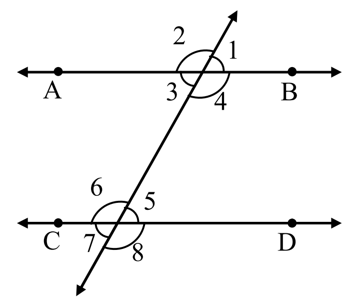
$\therefore$ $\frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(180^o - \angle A)$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90^o - \angle A/2$

अतः (i) से, हम पाते है

$\angle BOC = 90^o - \angle A/2$

उदा.48 चित्रानुसार, यदि AB || CD हो, तब



(i) यदि $\angle 1 = (120 - x)^o$ एवं $\angle 5 = 5x^o$ तो $\angle 1$ व $\angle 5$ का मान ज्ञात कीजिए

(ii) यदि $\angle 4 = (x + 20)^o$ एवं $\angle 5 = (x + 8)^o$ तो $\angle 4$ व $\angle 5$ का मान ज्ञात कीजिए

(iii) यदि $\angle 2 = (3x - 10)^o$ व $\angle 8 = (5x - 30)^o$ तो $\angle 2$ व $\angle 8$ का मान ज्ञात कीजिए

(iv) यदि $\angle 1 = (2x + y)^o$ व $\angle 6 = (3x - y)^o$ हो तो $\angle 2$ का मान y के पदो में ज्ञात कीजिए।

(v) यदि $\angle 2 = (2x + 30)^o$, $\angle 4 = (x + 2y)^o$ एवं $\angle 6 = (3y + 10)^o$ तो $\angle 5$ का मान ज्ञात करो।

(vi) यदि $\angle 2 = 2(\angle 1)$ तो $\angle 7$ का मान ज्ञात करो।

(vii) यदि $\angle 3$ व $\angle 8$ में अनुपात 4 : 5 हो तो $\angle 3$ व $\angle 8$ का मान ज्ञात करो।

(viii) यदि $\angle 5$ का पूरक $\angle 4$ के संपूरक के तुल्य हो, तो $\angle 4$ व $\angle 5$ का मान होगा।

हल. (i) चूँकि $\angle 1$ व $\angle 5$ संगत कोण है एवं संगत कोण बराबर हैं।

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 5 \Rightarrow (120 - x)^o = 5x^o$

$\Rightarrow 120^o = 6x \Rightarrow x = \frac{120}{6} = 20^o$

$\therefore \quad \angle 1 = (120 - x)^o = (120 - 20)^o = 100^o$

व $\angle 5 = 5x^o = (5 \times 20)^o = 100^o$

(ii) चूँकि $\angle 4$ व $\angle 5$ क्रमागत अन्तःकोण है, इसलिए

$\angle 4 + \angle 5 = 180^o$

[$\therefore$ क्रमागत अन्तःकोण पूरक कोण होते हैं]

$\Rightarrow \quad (x + 20)^o + (x + 8)^o = 180^o$

$\Rightarrow \quad 2x^o + 28^o = 180^o \quad \Rightarrow 2x^o = 180^o - 28^o$

$\Rightarrow 2x = 152^o \quad \Rightarrow x = 76^o$

$\therefore \quad \angle 4 = (x + 20)^o = (76 + 20)^o = 96^o$

व $\angle 5 = (x + 8)^o = (76 + 8^o) = 84^o$

(iii) हम जानते हैं कि

$\angle 2 = \angle 4$ [शीर्षाभिमुख कोण]

व $\angle 4 = \angle 8$ [संगत कोण]

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 8$

$\Rightarrow \quad (3x - 10)^o = (5x - 30)^o \Rightarrow 3x - 10 = 5x - 30$

$\Rightarrow \quad 3x - 5x = -30 + 10 \quad \Rightarrow -2x = -20$

$\Rightarrow x = 10$

$\therefore \quad \angle 2 = (3x - 10)^o = (3 \times 10 - 10)^o = 20^o$

व $\quad \angle 8 = (5x - 30)^o = (5 \times 10 - 30)^o = 20^o$

(iv) चूँकि $\angle 3$ व $\angle 6$ क्रमागत अन्तःकोण हैं, इसलिए

$\angle 3 + \angle 6 = 180^o$

परन्तु $\angle 1 = \angle 3 \qquad \therefore \angle 1 + \angle 6 = 180^o$

$\Rightarrow \quad (2x + y)^o + (3x - y)^o = 180^o$

$\Rightarrow \quad 5x = 180^o \qquad \Rightarrow \quad x = 36.$

$\therefore \quad \angle 1 = (2x + y)^o = (72 + y)^o \quad [\therefore x = 36]$

परन्तु $\angle 1 + \angle 2 = 180^o$

$\therefore (72 + y)^o + \angle 2 = 180^o$

$\Rightarrow \angle 2 = (180 - (72 + y))^o \Rightarrow \angle 2 = (108 - y)^o.$

(v) हम जानते हैं कि

$\angle 2 = \angle 4$ [शीर्षाभिमुख कोण]

एवं $\angle 4 = \angle 6$ [एकान्तर कोण]

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 4 = \angle 6$

अब $\angle 2 = \angle 4$

$\Rightarrow \quad 2x + 30 = x + 2y \Rightarrow 2x - x - 2y + 30 = 0$

$\Rightarrow \quad x - 2y + 30 = 0 \qquad$ ....(1)

तथा $\angle 4 = \angle 6 \quad \Rightarrow (x + 2y) = (3y + 10)$

$\Rightarrow \quad x - y - 10 = 0 \qquad$ ....(2)

(1) में से (2) को घटाने पर

$(x - 2y + 30) - (x - y - 10) = 0$

$\Rightarrow \quad -y + 40 = 0 \Rightarrow y = 40.$

$y = 40$ समी. (2) में रखने पर, हम पाते हैं कि $x = 50$.

$\therefore \quad \angle 4 = (x + 2y)^o = (50 + 2 \times 40)^o = 130^o$

परन्तु $\quad \angle 4 + \angle 5 = 180^o$

$\therefore \quad 130^o + \angle 5 = 180^o \Rightarrow \angle 5 = 50^o$

(vi) हम जानते हैं कि

$\angle 1 + \angle 2 = 180^o$ [रेखीय युग्म]

$\therefore \quad \angle 2 = 2 \angle 1 \quad \Rightarrow \quad \angle 1 + 2 \angle 1 = 180^o$

$\Rightarrow \quad 3 \angle 1 = 180^o \quad \Rightarrow \quad \angle 1 = 60^o$

परन्तु $\angle 1 = \angle 3$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore \quad \angle 3 = 60^o$

परन्तु $\angle 3 = \angle 5$ [एकान्तर कोण]

एवं $\angle 5 = \angle 7$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore \quad \angle 3 = \angle 7 \quad \Rightarrow \quad \angle 7 = 60^o \quad [\because \angle 3 = 60^o]$

(vii) हम जानते हैं कि $\angle 3 : \angle 8 = 4 : 5$ अतः

मानाकि

$\angle 3 = 4x$ एवं $\angle 8 = 5x.$

$\Rightarrow \quad \angle 5 = 4x$ एवं $\angle 8 = 5x$

[$\because \angle 3 = \angle 5$ (एकान्तर कोण)]

$\Rightarrow \quad \angle 5 + \angle 8 = 4x + 5x$

$\Rightarrow 180^o = 9x \Rightarrow x = 20^o$

$\therefore \quad \angle 3 = 4x = 4 \times 20^o = 80^o$

एवं $\angle 8 = 5x = 5 \times 20^o = 100^o$

(viii) हमे दिया है कि

$\angle 5$ का पूरक = $\angle 4$ के संपूरक कोण

$\Rightarrow$ $90^o - \angle 5 = 180^o - \angle 4$

$\Rightarrow$ $90^o - \angle 5 = 180^o - (180^o - \angle 5)$

$$\begin{bmatrix} \because \angle 4 + \angle 5 = 180^o \\ \because \angle 4 = 180^o - \angle 5 \end{bmatrix}$$

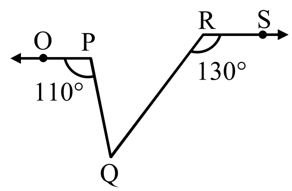
$\Rightarrow$ $90^o - \angle 5 = \angle 5$

$\Rightarrow$ $2\angle 5 = 90^o$ $\quad\Rightarrow \angle 5 = 45^o$

$\therefore$ $\angle 4 + \angle 5 = 180^o$

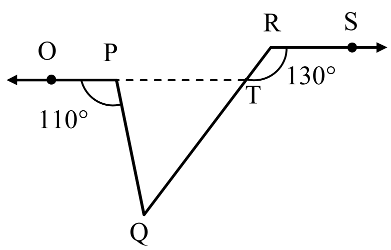
$\Rightarrow$ $\angle 4 + 45^o = 180^o$ $\quad\Rightarrow \angle 4 = 135^o$

उदा.49 चित्र में, OP || RS तो $\angle PQR$ का मान ज्ञात करो?



हल. OP को आगे तक बढ़ायें जो RQ को बिन्दु T पर काटे।

अब OT || RS एवं तिर्यक रेखा RT उन्हें क्रमशः T व R पर काटती है।



$\therefore \angle RTP = \angle SRT$ [एकान्तर कोण]

$\Rightarrow$ $\angle RTP = 130^o$

$\Rightarrow$ $\angle PTQ = 180^o - 130^o = 50^o$

$$\begin{bmatrix} \because \angle RTP + \angle PTQ = 180^o \\ \text{रेखीय युग्म} \end{bmatrix}$$

चूँकि रेखा QP, OT से P पर मिलती है

$\therefore$ $\angle OPQ + \angle QPT = 180^o$

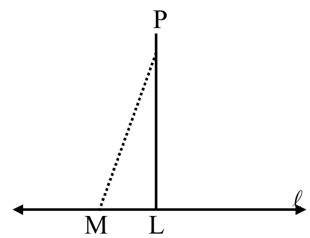
$\Rightarrow$ $110^o + \angle QPT = 180^o \Rightarrow \angle QPT = 70^o$

$\therefore$ $\angle PQR = 180^o - (70^o + 50^o) = 60^o$

[$\because$एक त्रिभुज के कोणों का योग 180^o होता है]

उदा.50 सिद्ध करो कि एक दिये गये बिन्दु से, एक दी गई रेखा पर केवल एक लम्ब खींचा जा सकता है।

हल. यदि सम्भव हो, मानाकि PL व PM दो लम्ब हैं जो बिन्दु P से एक रेखा ℓ पर चित्रानुसार खींचे गये हैं।



हम जानते हैं कि एक ही रेखा पर खींची गई दो लम्बवत रेखाऐं परस्पर समान्तर होती हैं, अतः

PL || PM

परन्तु एक समान बिन्दु से दो समान्तर रेखाऐं नहीं खींची जा सकती हैं अतः एक दिये गये बिन्दु से हम केवल एक लम्ब रेखा किसी दी गई रेखा पर खींच सकते हैं।

याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. एक कोण दो असमरेखीय किरणों से मिलकर बनता है, जिनका प्रारम्भिक बिन्दु उभयनिष्ठ हो

2. वह कोण जिसका माप 90^o होता है, समकोण कहलाता है

3. वह कोण जिसका माप 90^o से कम होता है, न्यूनकोण कहलाता है।

4. वह कोण जिसका माप 90^o से अधिक होता है, तथा 180^o से कम होता है, अधिक कोण कहलाता है।

5. वह कोण जिसका माप 180^o होता है, सरल कोण कहलाता है।

6. वह कोण जिसका माप 180^o से अधिक होता है, वृहद् कोण कहलाता है।

7. दो कोण पूरक कोण कहलाते हैं, यदि उनका योग 90^o हो।

8. दो कोण संपूरक कोण कहलाते हैं, यदि उनका योग 180^o हो।

9. दो कोण जिनका एक शीर्ष तथा एक भुजा उभयनिष्ठ हो आसन्न कोण कहलाते हैं, यदि उनकी अन-उभयनिष्ठ भुजाऐं, उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर हों।

10. दो आसन्न कोण, कोणों का एक रेखीय युग्म बनाते हैं, यदि उनकी अन-उभयनिष्ठ भुजाऐं दो विपरीत दिशीय किरण हों।

11. दो कोण शीर्षाभिमुख कोण का युग्म होते हैं, यदि उनकी भुजाऐं विपरीत किरणों का दो युग्म बनाते हैं।

12. यदि दो रेखाऐं प्रतिच्छेदन करती हों, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

13. यदि एक तिर्यक रेखा, दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती हों, तब

(i) संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

(ii) एकान्तर अन्तःकोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

(iii) तिर्यक रेखा के एक ही तरफ के अन्तःकोण संपूरक कोण होते हैं।

14. यदि एक तिर्यक रेखा, दो रेखाओं को ऐसे काटे कि -

(i) संगत कोणों का कोई युग्म बराबर हो, या

(ii) एकान्तर अन्तःकोणों का कोई युग्म बराबर हो, या

(iii) तिर्यक रेखा के एक तरफ वाले अन्तःकोणों का कोई एक युग्म संपूरक हो तो रेखाऐं समान्तर होती हैं।

15. रेखाऐं जो कि एक दी गई रेखा के समान्तर हैं, परस्पर की समान्तर भी होती हैं।