5
CHAPTER

वृत्त

CONTENTS (सूची)

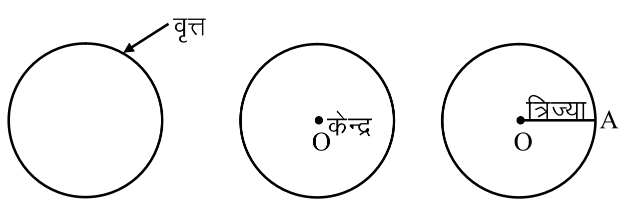
- पद एवं परिभाषा
- महत्त्वपूर्ण बिन्दु
- वृत्तों का प्रतिच्छेदन
- उभयनिष्ठ जीवा
- चक्रीय चतुर्भुज

➤ पद एवं परिभाषा

1. वृत्त : एक वृत्त उन सभी बिन्दुओं का एक संग्रह है जो समतल में इस प्रकार से है कि उनकी समतल में एक दिये गये निश्चित बिन्दु से दूरी अचर है।

2. केन्द्र : निश्चित बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है, चित्र में O केन्द्र है।

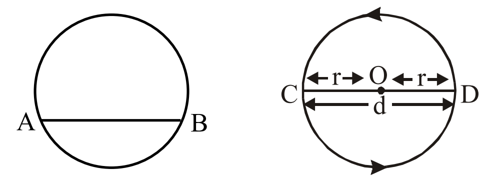
3. त्रिज्या : केन्द्र से वृत्त की अचर दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। चित्र में, OA त्रिज्या है।



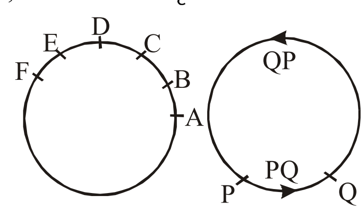
4. जीवा : एक वृत्त के दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड उस वृत्त की जीवा कहलाती है। चित्र में AB वृत्त की जीवा है। यदि जीवा केन्द्र से होकर गुजरती है तो वह सबसे लम्बी जीवा होती है।

5. व्यास : वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरने वाली जीवा उस वृत्त का व्यास होती है। एक वृत्त के अनन्त व्यास होते है। चित्र में CD वृत्त का व्यास है। यदि d वृत्त का व्यास हो तब d = 2r जहाँ r त्रिज्या है या सबसे बड़ी जीवा व्यास होती है।

चित्र में, AB व्यास है तथा चाप $\overset{\frown}{CD}$ व $\overset{\frown}{DC}$ अर्धवृत्त है।



6. चाप : वृत्त का एक सतत् टुकड़ा चाप कहलाता है। मानाकि A,B,C,D,E,F वृत्त पर बिन्दु है। वृत्त को विभिन्न टुकड़ों में विभाजित किया गया है, तब टुकड़े AB, BC, CD, DE, EF आदि सभी वृत्त के चाप है।



माना कि P,Q वृत्त पर दो बिन्दु हैं। ये बिन्दु P, Q वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है। प्रत्येक भाग चाप कहलाता है। ये चाप वामावर्त दिशा में P से Q यानि $\overset{\frown}{PQ}$ तथा Q से P को $\overset{\frown}{QP}$ दर्शाते है। यह वामावर्त दिशा से दो चापों $\overset{\frown}{PQ}$ व $\overset{\frown}{QP}$ में अन्तर स्पष्ट होता है।

चाप $\overset{\frown}{PQ}$ की लम्बाई, चाप $\overset{\frown}{QP}$ की लम्बाई से कम, बराबर या अधिक हो सकती है।

अर्थात (i) $\ell(\overset{\frown}{PQ}) < \ell(\overset{\frown}{QP})$ (ii) $\ell(\overset{\frown}{PQ}) = \ell(\overset{\frown}{QP})$

(iii) $\ell(\overset{\frown}{PQ}) > \ell(\overset{\frown}{QP})$

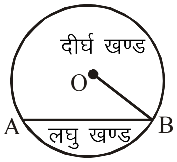
जब $\ell(\overset{\frown}{PQ}) < \ell(\overset{\frown}{QP})$ तब चाप $(\overset{\frown}{PQ})$ लघु चाप कहलाता है।

यदि $\ell(\overset{\frown}{PQ}) = \ell(\overset{\frown}{QP})$ तब चाप $\overset{\frown}{PQ}$ व $\overset{\frown}{QP}$ अर्धवृत्त कहलाता है। इस समय चाप के बिन्दु व्यास के सिरे होते है। एवं जब $\ell(\overset{\frown}{PQ}) > \ell(\overset{\frown}{QP})$ हो तब चाप $\overset{\frown}{PQ}$ दीर्घ चाप कहलाता है।

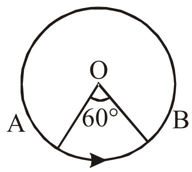
7. एक वृत्त की परिधि : वृत्त की परिमिति उसकी परिधि कहलाती है। एक वृत्त जिसकी त्रिज्या r है, की परिधि $2\pi r$ होती है।

8. रेखाखण्ड : मानाकि AB वृत्त की जीवा है, तब AB वृत्त को दो भागों में बांटती है (अर्थात् वृत्तीय डिस्क में) एवं इसका

प्रत्येक भाग वृत्त खण्ड कहलाता है, छोटी चाप को लघु खण्ड तथा बड़े चाप को दीर्घ खण्ड कहते है।



9. केन्द्रीय कोण : एक वृत्त जो नीचे दिया गया है, पर विचार कीजिए। इस वृत्त की किसी चाप द्वारा इसके केन्द्र O पर अन्तरित कोण "केन्द्रीय कोण" कहलाता है। केन्द्रीय कोण का शीर्ष सदैव केन्द्र O होता है।



चाप का डिग्री (अंश) में मापन : एक लघु चाप का अंश में मापन, केन्द्रीय कोण जो उस चाप द्वारा बनाया गया है, के मापन के समान होता है।

चित्र में, चाप $\widehat{PQ}$ का मापन 60° है अर्थात् $m\widehat{PQ} = 60°$ दीर्घ चाप का मापन $360° - m\widehat{PQ}$ संगत लघु चाप का अंश में मापन

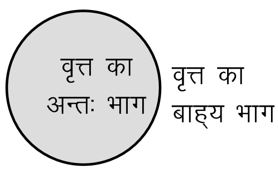
दीर्घ चाप का अंश में मापन $360° - 60° = 300°$

$\therefore m\widehat{QP} = 300°$.

वृत्त की परिधि का अंश में मापन 360° होता है।

10. वृत्त का अन्तः व बाह्य भाग :

एक वृत्त उस समतल को जिस पर स्थित है, तीन भागों में बाँटता है :



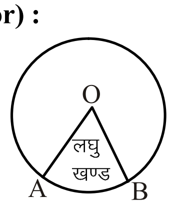
(i) वृत्त का अन्दर का भाग, वृत्त का अन्तः भाग कहलाता है।

(ii) वृत्त पर

(iii) वृत्त के बाहर का भाग, वृत्त का बाह्य भाग कहलाता है।

वृत्त तथा इसका आन्तरिक भाग वृत्तीय क्षेत्र कहलाता है।

11. वृत्त खण्ड (Sector) :

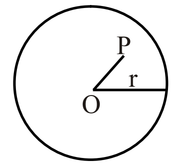


वृत्त खण्ड (sector), वृत्तीय डिस्क का वह क्षेत्र है जिसमें कि वह चाप व दो त्रिज्याओं जो चाप के सिरों तथा केन्द्र को मिलाने पर बनती हैं, OAB के मध्य का भाग होता है।

चतुर्थांश : वृत्तीय डिस्क का चौथाई भाग "चतुर्थांश" कहलाता है।

12. एक बिन्दु की स्थिति :

जब बिन्दु वृत्त के अन्दर है : एक बिन्दु P जो इस प्रकार से है कि $OP < r$ तक बिन्दु वृत्त के अन्दर स्थित होता है।

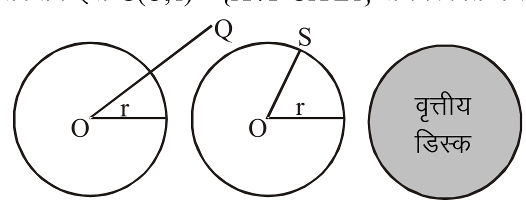


वृत्त के अन्दर स्थित बिन्दु को अन्तः बिन्दु कहलाते हैं। (उदाहरण : वृत्त का केन्द्र)

जब बिन्दु वृत्त के बाहर हो : एक बिन्दु Q ऐसा हो कि $OQ > r$ तब बिन्दु वृत्त $C(O, r) = \{X, OX = r\}$ के बाहर स्थित होता है। जिसे बाह्य बिन्दु कहते है।

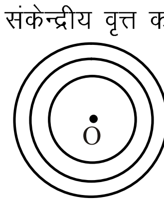
जब बिन्दु वृत्त पर हो : एक बिन्दु S जो ऐसे है कि $OS = r$ तब यह बिन्दु, वृत्त $C(O, r) = \{X, OX = r\}$ पर स्थित होता है।

वृत्तीय डिस्क : वृत्त के अन्तर्गत बिन्दुओं व वृत्त पर स्थित बिन्दुओं का समुच्चय वृत्तीय डिस्क कहलाता है। समुच्चय संकेतन इसे $C(O, r) = \{X : P\ OX \le r\}$ से निरूपित करते है।



13. संकेन्द्रीय वृत्त :

वृत्त जिनके केन्द्र एक ही बिन्दु हो तथा त्रिज्याऐं भिन्न – भिन्न हों संकेन्द्रीय वृत्त कहलाते है।



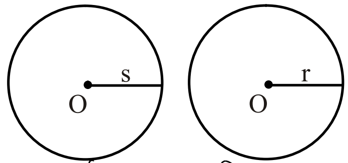
संकेन्द्रीय वृत्त

टिप्पणी : शब्द 'त्रिज्या' उस रेखाखण्ड के लिये प्रयोग में लिया गया है, जो वृत्त के केन्द्र वृत्त पर किसी भी बिन्दु को मिलाने वाली रेखा की लम्बाई होती है।

14. वृत्तों की सर्वांगसमता :

वृत्तों की सर्वांगसमता : दो वृत्त सर्वांगसम कहलाते हैं, यदि और केवल यदि उनमें से एक, दूसरे को पूर्णतया ढ़क लेता है। इसका तात्पर्य यह है कि दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि और केवल यदि उनकी त्रिज्याऐं समान हों।

अर्थात् C (O, r) व C (O′ , r) सर्वांगसम कहलाते हैं, यदि ओर केवल यदि r = s



सर्वांगसम वृत्त यदि r = s

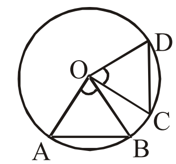
सर्वांगसम चाप : एक वृत्त की दो चाप सर्वांगसम होते हैं, यदि उनमें से कोई एक दूसरे को पूर्णतया ढ़क ले और यह तब ही सम्भव है जबकि दोनों चापों का अंश में मापन समान हो।

➤ महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. एक वृत्त की समान जीवाऐं, केन्द्र पर समान कोण बनाती है।

दिया है : वृत्त की जीवा AB = जीवा CD तथा केन्द्र O है।

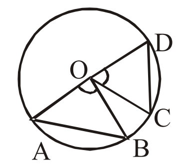
सिद्ध करना है : $\angle AOB = \angle COD$



2. विलोमत : यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण समान हों, तो वे जीवाऐं भी समान होती है।

दिया है : दो जीवाऐं AB व CD जो एक समान कोण $\angle AOB$ व $\angle COD$ केन्द्र O पर बनाती हैं।

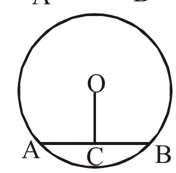
सिद्ध करना है : AC = CD



3. एक वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उस जीवा को समद्विभाजित करता है।

दिया है : एक वृत्त के केन्द्र O से जीवा AB पर लम्ब OC डाला गया है।

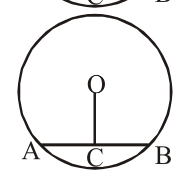
सिद्ध करना है : AC = CB



4. विलोमतः एक वृत्त की जीवा को समद्विभाजित करने वाली वह रेखा जो वृत्त के केन्द्र से होकर खींची गई है, उस जीवा पर लम्ब होती है।

दिया है : AB एक जीवा है, एवं C जीवा AB का मध्य बिन्दु है। तथा वृत्त का केन्द्र O है।

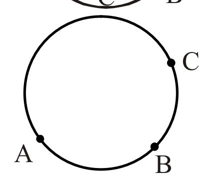
सिद्ध करना है : $OC \perp AB$



5. तीन दिये गये असंरेखीय बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।

दिया है : तीन असंरेखीय बिन्दु A, B व C है।

सिद्ध करना है : बिन्दुओं A, B व C से केवल एक वृत्त गुजरता है।

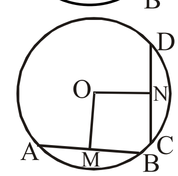


6. एक वृत्त की समान जीवाऐं, केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं।

दिया है : दो जीवाऐं AB व CD एक वृत्त की समान जीवाऐं है तथा O केन्द्र है

सिद्ध करना है :

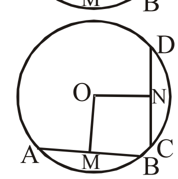
$OM \perp AB = ON \perp CD$



7. विलोमतः एक वृत्त की जीवाऐं जो उसके केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं, तो वे जीवाऐं समान होती हैं।

दिया है : एक वृत्त की दो जीवायें AB व CD है, जो केन्द्र O से समान दूरी है। अर्थात् $OM (\perp AB) = ON (\perp AB)$.

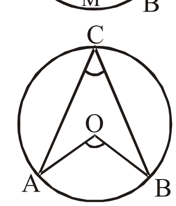
सिद्ध करना है : AB = CD



8. वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उस चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर बने कोण का दुगुना होता है।

दिया है : मानाकि $\overset{\frown}{AB}$ एक वृत्त की चाप है, जिसका केन्द्र O है एवं एक बिन्दु C शेष भाग पर स्थित है।

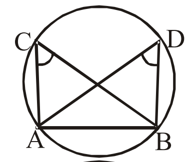
सिद्ध करना है : $\angle AOB = 2\angle ACB$



9. एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण समान होते हैं।

दिया है : दो कोण $\angle ACB$ व $\angle ADB$ एक ही वृत्तखण्ड AB मे बने कोण हैं।

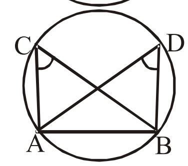
सिद्ध करना है : $\angle ACB = \angle ADB$



10. दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड , एक ही वृत्त खण्ड में स्थित दो अन्य बिन्दुओं से समान कोण कोण बनाता हो तो ये चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं।

दिया है : दो कोण $\angle ACB$ व $\angle ADB$ रेखाखण्ड AB द्वारा अन्तरित कोण हैं जो एक समान है $\angle ACB = \angle ADB$

सिद्ध करना है : A,B,C,D एक वृत्त पर स्थित हैं।

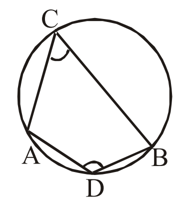


11. एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।

दिया है : $\angle ACB$ व $\angle ADB$ एक वृत्त के एकान्तर वृत्त खण्ड में बने कोण है।

सिद्ध करना है :

$$\angle ACB + \angle ADB = 180^o$$

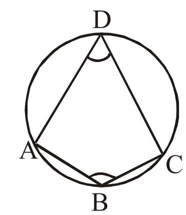


12. एक चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक हो तो वह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है

दिया है : एकान्तर वृत्त खण्ड में बने कोणों का योग 180 अर्थात्

$\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

सिद्ध करना है : A, B, C, D चक्रीय चतुर्भुज है।

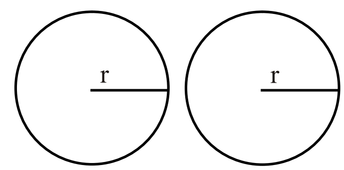


गुणधर्म :

13. दो वृत्त सर्वांगसम कहलाते हैं, यदि और केवल यदि उनकी त्रिज्याऐं समान हों

दिया है :दो वृत्त जिनकी त्रिज्याऐं समान है।

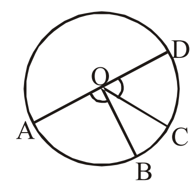
सिद्ध करना है : दिये गये वृत्त सर्वांगसम है।



14. एक वृत्त के दो चाप सर्वांगसम होते हैं यदि उनक द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण समान हों

दिया है : दो चाप $\overset{\frown}{AB}$ व $\overset{\frown}{CD}$ केन्द्र पर समान कोण $\angle AOB$ व $\angle COD$ बनाते है।

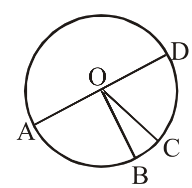
सिद्ध करना है : चाप $\overset{\frown}{AB}$ व $\overset{\frown}{CD}$ सर्वांगसम है।



15. विलोमत : वृत्त के दो चाप केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करते हों तो चाप सर्वांगसम होते हैं।

दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, के दो चाप $\overset{\frown}{AB}$ व $\overset{\frown}{CD}$ सर्वांगसम चाप हैं।

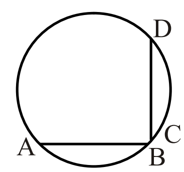
सिद्ध करना है : $\angle AOB = \angle COD$

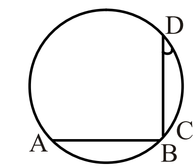
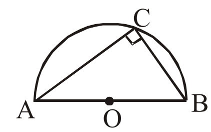
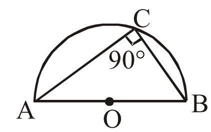


16. यदि एक वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनकी संगत जीवाऐं समान होती है।

दिया है : दो चाप $\overset{\frown}{AB}$ व $\overset{\frown}{CD}$ एक वृत्त की सर्वांगसम चाप है।

सिद्ध करना है : चाप AB = चाप CD



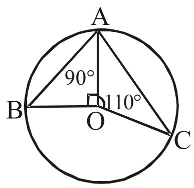
17.	विलोमत : यदि एक वृत्त की दो जीवाऐं समान हों तो उनके संगत चाप भी समान होते है।	**दिया है :** एक वृत्त की दो जीवाऐं AB व CD समान है। **सिद्ध करना है :** $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$	
18.	अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।	**दिया है :** ABC अर्धवृत्त है, जिसका केन्द्र O है। **सिद्ध करना है :** $\angle ACB = 90°$	
19.	**विलोमत :** एक वृत्त की चाप वृत्त के किसी बिन्दु पर जो एकान्तर खण्ड में है पर समकोण बनाती हो तो वह अर्धवृत्त होता है।	**दिया है :** $\angle ACB = 90°$ **सिद्ध करना है :** $\overset{\frown}{ACB}$ अर्धवृत्त है।	

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 O वृत्त का केन्द्र है, यदि $\angle BOA = 90°$ एवं $\angle COA = 110°$, तो $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।

Sol. **दिया है** : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा $\angle BOA = 90°$, $\angle AOC = 110°$.

ज्ञात करना है **:** $\angle BAC = ?$



प्रक्रिया, $\angle AOB + \angle AOC + \angle BOC = 360°$

$\Rightarrow$ $90° + 110° + \angle BOC = 360°$

$\Rightarrow$ $\angle BOC = 360° - 90° - 110°$

$\Rightarrow$ $\angle BOC = 160°$

परन्तु, चाप $\overset{\frown}{BC}$ द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $\angle BOC$ है तथा वृत्त के शेषभाग पर बना कोण $\angle BAC$ है।

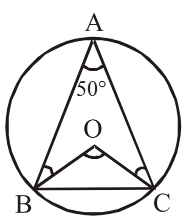
$\Rightarrow$ $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

$\therefore$ $\angle BAC = \frac{1}{2}(160°) = 80°$

Ex.2 O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle BAC = 50°$ तो, $\angle OBC$ ज्ञात कीजिए।

Sol. **दिया है :** एक वृत्त जिसका केन्द्र O हैं, में $\angle BAC = 50°$

ज्ञात करना है: $\angle OBC = ?$



प्रक्रिया : $\angle BAC = 50°$

$\angle BOC = 2\angle BAC = 2(50°) = 100°$

[चाप BC द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $\angle BOC$ है तथा वृत्त के शेषभाग पर अन्तरित कोण $\angle BAC$ है]

ΔOBC में, OB = OC = त्रिज्या

$\Rightarrow$ $\angle OBC = \angle OCB$

(त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, $\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180°$

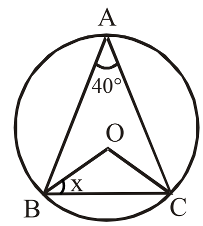
[एक त्रिभुज के कोणों का योग]

$\Rightarrow$ $\angle OBC + \angle OCB + 100° = 180°$

$\Rightarrow$ $\angle OBC + \angle OBC = 180° - 100°$

$2\angle OBC = 80°$ $\therefore$ $\angle OBC = 40°$.

Ex.3 दिये गये चित्र में x का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ O वृत्त का केद्र है।



Sol. **दिया है.** $\angle BAC$ in a circle with centre O is 40°.

ज्ञात करना है $\angle OBC$ = (माना x है)

प्रक्रिया, $\angle BOC = 2\angle BAC$

$= 2 \times 40° = 80°$

ΔBOC में,

BO = OC (एक ही वृत्त की त्रिज्याऐं)

$\Rightarrow$ $\angle B = \angle C = x$

$\therefore$ $x + \angle BOC + x = 180°$ [एक त्रिभुज के कोणों योग]

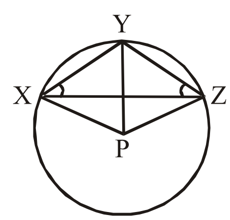
$\Rightarrow$ $2x = 180° - \angle BOC$

$\Rightarrow$ $2x = 180° - 80°$

$\Rightarrow$ $2x = 100°$

$\Rightarrow$ $x = 50°$.

Ex.4 P वृत्त का केन्द्र है, (चित्र देखें) तो सिद्ध करो कि $\angle XPZ = 2(\angle XZY + \angle YXZ)$.



Sol. **दिया है :** एक वृत्त का केन्द्र P है, तथा XY व YZ दो जीवाऐं हैं

सिद्ध करना है : $\angle XPZ = 2(\angle XZY + \angle YXZ)$

उपपत्ति : केन्द्र P वाले वत्त में, चाप XY केन्द्र पर $\angle XPY$ बनाता है तथा शेष वृत्त खण्ड में $\angle XZY$ बनाता है।

$\Rightarrow \quad \angle XPY = 2\angle XZY \qquad ....(1)$

इसी प्रकार, चाप YZ केन्द्र पर $\angle YPZ$ बनाता है तथा शेष वृत्त खण्ड पर $\angle YXZ$ बनाता है।

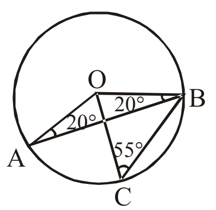
$\therefore \quad \angle YPZ = 2\angle YXZ \qquad ....(2)$

(1), व (2) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

$\angle XPY + \angle YPZ = 2\angle XZY + 2\angle YXZ$

$\Rightarrow \quad \angle XPZ = 2(\angle XZY + \angle YXZ)$.

Ex.5 एक वृत्त का केन्द्र O हैं, जिसमें $\angle OAB = 20°$, $\angle OCB = 55°$ तो, $\angle BOC$ व $\angle AOC$ ज्ञात कीजिए।



Sol. **दिया है :** $\angle OAB = 20°$, $\quad \angle OCB = \angle 55°$

ज्ञात करना है : $\angle BOC = ?$ एवं $\angle AOC = ?$

प्रक्रिया : मानाकि $\angle AOC = y°$ एवं $\angle BOC = x°$

$\angle OBA = \angle OAB$ [जैसा कि OA = OB = त्रिज्या]

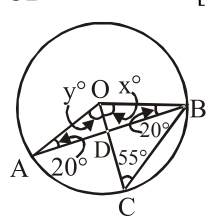
$\therefore \quad \angle OBA = 20°$

ΔOAD व ΔOBD में,

OA = OB [वृत्त की त्रिज्या]

$\angle OAD = \angle OBD = 20°$ [सिद्ध हुआ]

OD = OD [उभयनिष्ठ]



$\therefore \Delta OAD \cong \Delta OBD$

(सर्वांगसम की SAS प्रमेय से)

$\Rightarrow \quad x° = y° \qquad$ ...(C.P.C.T)

एवं, $\angle ODA = \angle ODB$ ...(C.P.C.T)

$\angle ODA + \angle ODB = 180°$ ...[रेखीय युग्म]

$2\angle ODA = 180° \Rightarrow \angle ODA = 90°$

$\therefore \quad \angle ODB = 90° \qquad ...[\because \angle ODA = 90°]$

ΔODA में,

$\angle AOD + \angle OAD + \angle ODA = 180°$

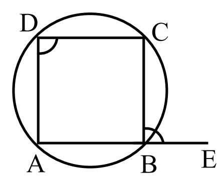
$y° + 20° + 90° = 180°$

$y° = 180° - 110° = 70°$

$\therefore \quad x° = y° = 70°$.

Ex.6 यदि एक चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा को बढ़ाया जाये, तो सिद्ध करो कि बाह्य कोण, सम्मुख अन्तः कोण के तुल्य होता है।

Sol. **दिया है :** एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD की भुजा AB को E तक बढ़ाया गया है।



सिद्ध करना है : $\angle CBE = \angle ADC$

उपपत्ति : $\angle ABC + \angle ADC = 180° \qquad ....(1)$

[चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग]

परन्तु, $\angle ABC + \angle CBE = 180° \qquad ....(2)$

[$\because \angle ABC$ व $\angle CBE$ रेखीय युग्म हैं]

(1) व (2) से

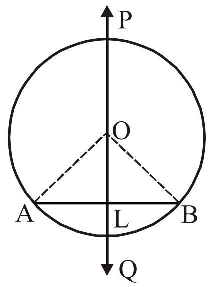
$\angle ABC + \angle ADC = \angle ABC + \angle CBE$

$\Rightarrow \quad \angle ADC = \angle CBE$

या $\quad \angle CBE = \angle ADC$.

Ex.7 सिद्ध करो कि एक वृत्त की जीवा का लम्ब समद्विभाजक, उस वृत्त की संगत चाप का समद्विभाजन करता है।

Sol. मानाकि AB उस वृत्त की जीवा है, जिसका केन्द्र O है। यदि PQ जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक है, जो AB को L पर तथा वृत्त को Q पर प्रतिच्छेद करता है। चूंकि जीवा का लम्ब समद्विभाजक सदैव केन्द्र से होकर गुजरता है, अतः PQ अवश्य O से होकर गुजरता है, अब OA व OB को मिलाइये। त्रिभुज OAL व OBL में, हम पाते हैं कि



$OA = OB$ [प्रत्येक त्रिज्या के बराबर]

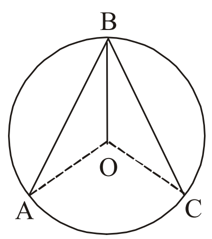
$\angle ALO = \angle BLO$ [प्रत्येक 90^o के बराबर]

$OL = OL$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore$ $\Delta OAL \cong \Delta OBL$

$\Rightarrow$ $\angle AOL = \angle BOL$ $\Rightarrow$ $AQ = BQ$

Ex.8 चित्र में, AB = CB तथा O वृत्त का केन्द्र है, तो सिद्ध करो कि BO कोण $\angle ABC$ का समद्विभाजन करता है



Sol. त्रिभुज AOB व COB में, हम जानते हैं कि

$AB = CB$ [दिया है]

$OB = OB$ [उभयनिष्ठ]

एवं, $OA = OC$ [प्रत्येक त्रिज्या के बराबर]

अतः, सर्वांगसम के SSS नियम से,

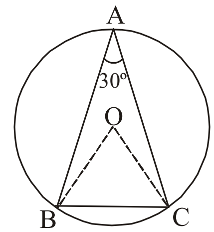
$\Delta AOB \cong \Delta COB$

$\Rightarrow$ $\angle OBA = \angle OBC$

$\Rightarrow$ OB कोण $\angle ABC$ का समद्विभाजन करता है

Ex.9 चित्र में, ABC एक त्रिभुज है, जिसमें $\angle BAC = 30^o$ तो प्रदर्शित करो कि BC त्रिभुज ΔABC के परिवृत्त की त्रिज्या है, जिसका केन्द्र O है।

Sol. OB व OC को मिलाइये। चूंकि एक वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उसी चाप द्वारा परिधि के किसी बिन्दु पर बनाये गये कोण का दुगुना होता है



$\therefore$ $\angle BOC = 2\angle BAC$

$\Rightarrow$ $\angle BOC = 2 \times 30^o = 60^o$

अब, ΔBOC में,

$OB = OC$ [प्रत्येक त्रिज्या के तुल्य है]

$\Rightarrow$ $\angle OBC = \angle OCB$

[$\because$ एक त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते हैं]

परन्तु, $\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^o$

$\Rightarrow$ $2\angle OBC + 60^o = 180^o$

$\Rightarrow$ $2\angle OBC = 120^o$

$\Rightarrow$ $\angle OBC = 60^o$

इस प्रकार हम जानते हैं कि

$\angle OBC = \angle OCB = \angle BOC = 60^o$

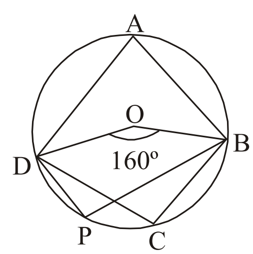
$\Rightarrow$ ΔOBC समबाहु त्रिभुज है

$\Rightarrow$ $OB = BC$

$\Rightarrow$ BC त्रिभुज ΔABC के परिवृत्त की त्रिज्या है।

Ex.10 चित्र में, ABCD चक्रीय चतुर्भुज है तथा O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle BOD = 160^o$ हो तो $\angle BPD$ का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. वृत्त के चाप BCD को लीजिए, यह चाप, कोण $\angle BOD = 160^o$ वृत्त के केन्द्र पर बनाता है एवं परिधि के बिन्दु A पर कोण $\angle BAD$ बनाता है



$\therefore$ $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD = 80^o$

अब, ABPD एक चक्रीय चतुर्भुज है

$\Rightarrow$ $\angle BAD + \angle BPD = 180^o$

$80^o + \angle BPD = 180^o$

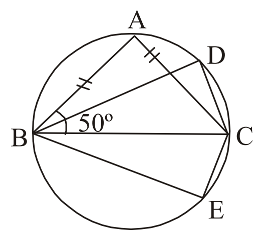
$\Rightarrow \qquad \angle BPD = 100^o$

$\Rightarrow \qquad \angle BCD = 100^o$

$\left[\begin{array}{l}\because \angle BPD \text{ व } \angle BCD \text{ एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण है} \\ \therefore \angle BCD = \angle BPD\end{array}\right]$

Ex.11 चित्र में, ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ एवं $m \angle ABC = 50^o$ तो $m \angle BDC$ व $m \angle BEC$ ज्ञात कीजिए।

Sol.



ΔABC में, हम जानते हैं कि

$AB = AC$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ABC$

$\Rightarrow \angle ACB = 50^o \qquad [\because \angle ABC = 50^o]$

$\therefore \angle BAC = 180^o - (\angle ABC + \angle ACB)$

$\Rightarrow \angle BAC = 180^o - (50^o + 50^o) = 80^o$

चूंकि $\angle BAC$ व $\angle BDC$ एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण हैं

$\therefore \angle BDC = \angle BAC \Rightarrow \angle BDC = 80^o$

अब, BDCE चक्रीय चतुर्भुज है

$\therefore \angle BDC + \angle BEC = 180^o$

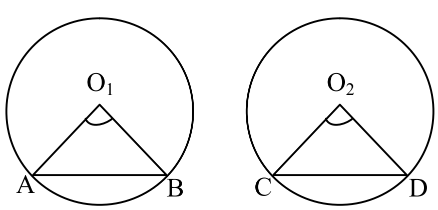
$\Rightarrow 80^o + \angle BEC = 180^o$

$\Rightarrow \angle BEC = 100^o$

अतः $m\angle BDC = 80^o$ एवं $m\angle BEC = 100^o$

Q.12 दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याऐं एकसमान हों, तो सिद्ध करो कि सर्वांगसम वृत्तों की समान जीवाऐं उनके केन्द्र पर समान कोण बनाती हैं। **[NCERT]**

Sol. **दिया है :** $C(O_1, r)$ व $C'(O_2, r)$ सर्वांगसम वृत्त है एवं जीवा $\overline{AB}$ = जीवा $\overline{CD}$



सिद्ध करना है : $\angle AO_1B = \angle CO_2D$

रचना : O_1 को A व B से तथा O_2 को C व D से मिलाइये

उपपत्ति : ΔAO_1B व ΔCO_2D में,

$AO_1 = CO_2 = r$

$BO_1 = DO_2 = r$

$AB = CD$ (दिया है)

$\therefore$ SSS से, $\Delta AO_1B \cong \Delta CO_2D$

$\therefore \angle AO_1B = \angle CO_2D$ (CPCT)

प्रमेय 1 : दिये गये तीन असमरेखीय बिन्दुओं से होकर गुजरने वाला एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है। **[NCERT]**

उपपत्ति : तीन असमरेखीय बिन्दु A, B, C लीजिए तथा रेखाओं BA व BC के लम्बवत् समद्विभाजक खींचिये, जो बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करते हैं।

अब O से AB पर लम्ब समद्विभाजक खींचा

$\therefore OA = OB \quad ....(1)$

एवं O से BC पर लम्ब समद्विभाजक खींचा

$\therefore OB = OC \quad .....(2)$

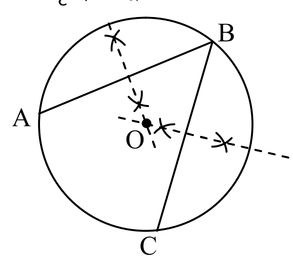
($\because$ एक रेखा के लम्ब समद्विभाजक पर प्रत्येक बिन्दु उस रेखा के दोनों शीर्षो से एक समान दूरी पर होता है।)

$\therefore$ (1) व (2) से, $OA = OB = OC$

अब O को केन्द्र लेकर एक वृत्त OA त्रिज्या का खींचे, जो बिन्दुओं A, B, C से होकर गुजरता हो

अद्वितीयता :

यह वृत्त, अद्वितीय होता है



$\because$ O दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिन्दु है तथा रेखाऐं केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

$\therefore$ हम कोई दूसरा बिन्दु (O′) प्राप्त नहीं कर सकते जो कि A, B व C से समान दूरी पर हो।

Ex.13 मान लो कि एक वृत्त दिया गया है तो इसका केन्द्र ज्ञात करने हेतु रचना लिखो **[NCERT]**

Sol. (i) दिये गये वृत्त पर तीन बिन्दु A, B, C लीजिए।

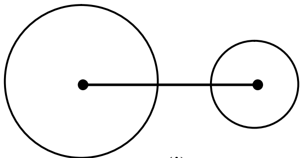
(ii) B को A व C से मिलाइये।

(iii) BA व BC का लम्ब समद्विभाजक खींचिये

(iv) लम्ब समद्विभाजक का प्रतिच्छेदन बिन्दु ही वृत्त का केन्द्र है।

➢ वृत्तों का प्रतिच्छेदन

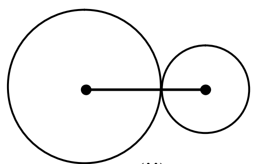
यदि वृत्तों के केन्द्र एवं त्रिज्या क्रमशः c_1, r_1 व c_2, r_2 हों, तब



(i)

प्रतिच्छेदन नहीं करते

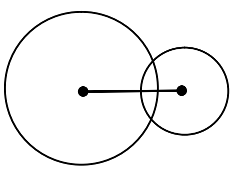
$c_1c_2 > r_1r_2$



(ii)

एक दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं

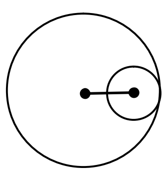
$c_1c_2 = r_1 + r_2$



(iii)

प्रतिच्छेदन करते हैं

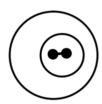
$r_1 - r_2 < c_1c_2 < r_1 + r_2$



(iv)

अन्तः स्पर्श

$c_1c_2 = r_1 - r_2$



(v)

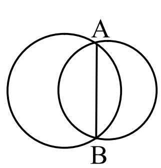
प्रतिच्छेदन नहीं करते

$c_1c_2 < (r_1 - r_2)$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दो वृत्त अधिकतम दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदन कर सकते हैं एवं ये दोनों वृत्तों के उभयनिष्ठ बिन्दु कहलाते हैं।

➢ उभयनिष्ठ जीवा

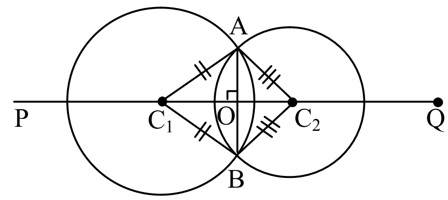
दो प्रतिच्छेदन करने वाले वृत्तों के उभयनिष्ठ बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा 'उभयनिष्ठ जीवा' कहलाती है।



AB उभयनिष्ठ जीवा है।

Ex.14 यदि दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदन करते हों, तो सिद्ध करो कि उनके केन्द्र, उभयनिष्ठ जीवा के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं। **[NCERT]**

Sol. Ist विधि



दिया है : दो वृत्त जिनकी त्रिज्याऐं r_1 व r_2 हैं, दो विभिन्न बिन्दुओं A व B पर प्रतिच्छेदन करते हैं एवं PQ, AB का लम्ब समद्विभाजक है।

$\therefore$ AO = OB व $\angle O = 90°$

सिद्ध करना है : वृत्त C_1 व C_2 के केन्द्र PQ पर स्थित है।

रचना : A को C_1, C_2 से तथा B को C_1, C_2 से मिलाइये।

उपपत्ति : $\because C_1A = C_1B = r_1$ एवं $C_2A = C_2B = r_2$

$\therefore$ चतुर्भुज C_1AC_2B एक पतंग के रूप में है

$\because$ PQ, AB के लम्बवत् एवं समद्विभाजक है

$\therefore$ AB छोटा विकर्ण है

$\therefore$ C_1, C_2 ; PQ पर हैं

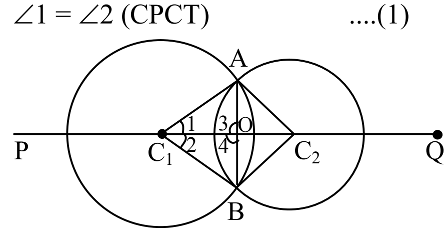
IInd विधि

माना कि PC_1C_2 Q एक रेखा है, हम सिद्ध करेंगे कि रेखा PQ उभयनिष्ठ जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक है।

उपपत्ति : $\Delta AC_1C_2 \cong \Delta BC_1C_2$

$$\left\{\begin{array}{c} C_1A = C_1B = r_1 \\ C_1C_2 = C_1C_2 = (\text{उभय निष्ठ}) \\ C_2A = C_2B = r_2 \end{array}\right\}_{(SSS)}$$

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$ (CPCT) ....(1)



अब, $\Delta AC_1O \cong \Delta BC_1O$

$$\left\{\begin{array}{c} C_1A = C_2B = r \\ \angle 1 = \angle 2 \ \ (1 \text{ से}) \\ C_1O = C_1O \text{ उभयनिष्ठ} \end{array}\right\}_{(SAS)}$$

$\therefore$ AO = OC (CPCT) ....(2)

अर्थात् PQ रेखा AB का समद्विभाजक है

एवं $\angle 3 = \angle 4$ (CPCT).

परन्तु $\angle 3 + \angle 4 = 180^o$ (रेखिक कोण युग्म)

एवं $\angle 3 = \angle 4 = 90^o$ ...(3)

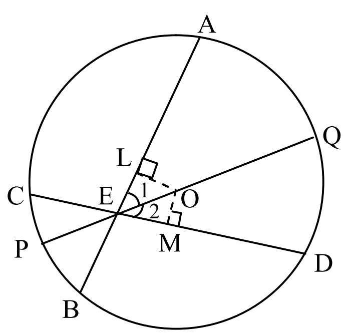
$\therefore$ PQ $\perp$ AB

अतः PQ उभयनिष्ठ जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक है

$\therefore$ C_1 व C_2 उभयनिष्ठ जीवा के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित हैं।

Ex.15 यदि एक वृत्त की प्रतिच्छेदन करने वाली दो जीवाऐं उस व्यास के साथ, जो इनके प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर गुजरता है, समान कोण बनाते हों, तो सिद्ध करो कि जीवाऐं समान हैं। **[NCERT]**

Sol. दिया गया है कि AB व CD एक वृत्त की दो जीवाऐं हैं जिसका केन्द्र O है, जो बिन्दु E पर प्रतिच्छेदन करती है। PQ वह व्यास है, जो E से होकर गुजरता है ताकि $\angle AEQ = \angle DEQ$ हमें सिद्ध करना है कि AB = CD, अब OL व OM क्रमशः AB व CD पर लम्ब खींचिये।



ΔOLE व ΔOME में,

$\angle OLE = \angle OME = 90^o$

$\angle 1 = \angle 2$ दिया है

EO = EO उभयनिष्ठ है

अतः, $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (AAS)

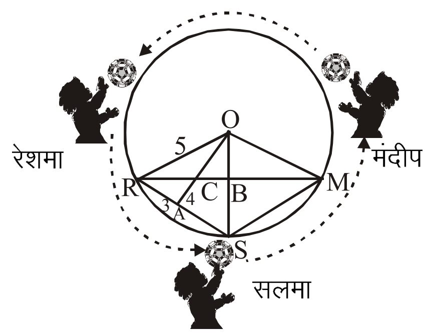
जिससे OL = OM (CPCT)

इसलिए, AB = CD

{वृत्त के केन्द्र से समान दूरी की जीवाऐं भी समान होती है}

Ex.16 तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा और मंदीप एक पार्क में 5 m त्रिज्या वाले एक वृत्त पर खड़े होकर एक खेल खेलती हैं। रेशमा, सलमा को गेंद फेंकती है, सलमा, मंदीप को तथा मंदीप, रेशमा को फेंकती है। यदि रेशमा व सलमा तथा सलमा व मंदीप प्रत्येक के बीच की दूरी 6 m हो, तो रेशमा व मंदीप के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

Sol. माना कि वृत्तीय पार्क की परिधि पर रेशमा, सलमा और मंदीप की स्थितियाँ क्रमशः R, S व M हैं



RS = SM = 6 m

त्रिज्या = OR = OS = 5m.

समकोण ΔRBO में,

$RB^2 = OR^2 - OB^2$ ....(1)

समकोण ΔSBR में,

$RB^2 = RS^2 - SB^2$ ....(2)

(1) व (2) से, हम जानते हैं कि

$OR^2 - OB^2 = RS^2 - SB^2$

$(5)^2 - x^2 = (6)^2 - (5 - x)^2$

(माना OB = x)

$25 - x^2 = 36 - x^2 - 25 + 10x$

$10x = -36 + 25 + 25$

$10x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{10}$

रेशमा व मंदीप के बीच की दूरी = RM

$= 2RB = 2\sqrt{OR^2 - OB^2}$

$= 2\sqrt{25 - x^2}$

$= 2\sqrt{25 - \left(\frac{14}{10}\right)^2}$

$= 2\sqrt{\frac{2500 - 196}{100}} = \frac{2\sqrt{2304}}{10}$

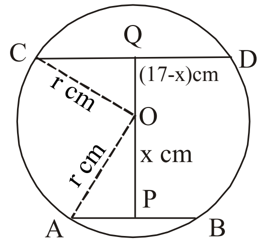
$= 2\times\frac{48}{10} = \frac{48}{5}$ m

Ex.17 AB व CD एक वृत्त की दो समान्तर जीवाऐं इस प्रकार से हैं कि AB = 10 cm एवं CD = 24 cm हो। यदि जीवाऐं, केन्द्र के विपरीत तरफ हों एवं उनके मध्य की दूरी 17 cm हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Sol. माना कि दिये गये वृत्त का केन्द्र O है एवं त्रिज्या r cm है। $OP \perp AB$ एवं $OQ \perp CD$ खींचिये, चूँकि $OP \perp AB$, $OQ \perp CD$ एवं $AB \parallel CD$ अतः बिन्दु P, O व Q संरेखीय है, अतः PQ = 17 cm

माना कि OP = x cm. तब, OQ = (17 – x) cm.

OA व OC को मिलाइये, तब OA = OC = r.



चूंकि वृत्त की किसी जीवा पर उसके केन्द्र से डाला गया लम्ब उस जीवा को समद्विभाजित करता है

$\therefore$ AP = PB = 5 cm एवं CQ = QD = 12 cm.

समकोण त्रिभुज OAP व OCQ में, हम जानते हैं कि

$OA^2 = OP^2 + AP^2$ व $OC^2 = OQ^2 + CQ^2$

$\Rightarrow\ r^2 = x^2 + 5^2$ ....(i)

एवं, $r^2 = (17 - x)^2 + 12^2$ ....(ii)

$\Rightarrow\ x^2 + 5^2 = (17 - x)^2 + 12^2$

[r^2 के मानों की तुलना करने पर]

$\Rightarrow\ x^2 + 25 = 289 - 34x + x^2 + 144$

$\Rightarrow\ 34x = 408$

$\Rightarrow x = 12$ cm.

x = 12 cm समीकरण (i) में रखने पर,

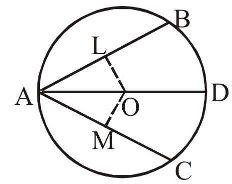
$r^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

$\Rightarrow\ r = 13$ cm.

अतः वृत्त की त्रिज्या 13 cm है।

Ex.18 यदि एक वृत्त की दो जीवाऐं, वृत्त के उस व्यास से जो इनके प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर गुजरता है, के साथ समान कोण बनाती हों, तो सिद्ध करो कि जीवाऐं समान हैं।

Sol. **दिया है :** दो जीवाऐं AB व AC एक वृत्त C(O, r) की ऐसी हैं कि AB व AC व्यास AOD के साथ एक समान कोण बना रही हैं



सिद्ध करना है : AB = AC

रचना : $OL \perp AB$ एवं $OM \perp AC$ खींचिये।

उपपत्ति : ΔOLA व ΔOMA में,

$\angle OLA = \angle OMA$ [प्रत्येक 90° के तुल्य हैं]

$\angle OAL = \angle OAM$ [दिया है]

एवं OA = OA [उभयनिष्ठ है]

$\therefore\ \Delta OLA \cong \Delta OMA$

AAS नियम से,

$\Rightarrow$ OL = OM

$\Rightarrow$ जीवाऐं AB व AC केन्द्र O से समान दूरी पर हैं

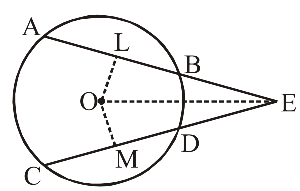
$\Rightarrow$ AB = AC

Ex.19 एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, की दो समान जीवाऐं AB व CD को बढ़ाने पर यह बिन्दु E पर मिलती हों, तो सिद्ध करो कि BE = DE व AE = CE.

Sol. **दिया है :** दो समान जीवाऐं AB व CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेदन करती है

सिद्ध करना है : BE = DE एवं AE = CE

रचना : OE को मिलायें तथा $OL \perp AB$ व $OM \perp CD$ खींचिये



उपपत्ति :

त्रिभुज OLE व OME में, ($\because \overline{AB} = \overline{CD}$)

OL = OM

$\angle OLE = \angle OME$ [प्रत्येक 90° के बराबर है]

एवं OE = OE [उभयनिष्ठ है]

$\therefore\ \Delta OLE \cong \Delta OME$ [RHS नियम से]

$\Rightarrow \quad LE = ME \quad$ ....(1) [C.P.C.T]

$AB = CD \quad$ [दिया है]

अब, $\quad \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow \quad BL = DM \quad$ ….(2)

(2) को (1) से घटाने पर

$LE - BL = ME - DM$

$BE = DE.$

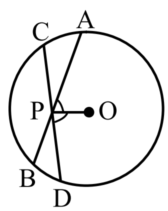
पुनः $AB = CD$ एवं $BE = DE$

$\Rightarrow \quad AB + BE = CD + DE$

$\Rightarrow \quad AE = CE$

अतः $BE = DE$ एवं $AE = CE$

Ex.20 एक वृत्त का केन्द्र O है तथा PO कोण APD का समद्विभाजन करता हो तो सिद्ध करो कि AB = CD

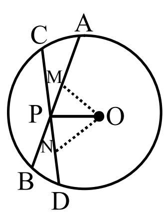


Sol. एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, की जीवाऐं AB व CD बिन्दु P पर मिलती हैं एवं PO कोण APD का समद्विभाजन करती हैं।

सिद्ध करना है : AB = CD

रचना : $OM \perp AB$ व $ON \perp CD$ खींचिये

उपपत्ति : ΔOMP व ΔONP में,



$\angle OMP = \angle ONP \quad$ ...(प्रत्येक 90°)

$OP = OP \quad$ ...(उभयनिष्ठ)

$\angle OPM = \angle OPN \quad$ ...(दिया है)

$\Rightarrow \Delta OMP \cong \Delta ONP \quad$ (AAS सर्वांगसमता)

$\Rightarrow OM = ON \quad$ (CPCT)

$\Rightarrow$ जीवाऐं AB व CD केन्द्र से समान दूरी पर हैं।

हम जानते हैं कि वृत्त के केन्द्र से समान दूरी की जीवाऐं समान होती है।

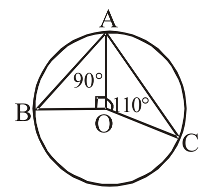
$\therefore \quad AB = CD$

Ex.21 एक वृत्त का केन्द्र O है। यदि $\angle BOA = 90°$ व $\angle COA = 110°$ हो तो $\angle BAC$ ज्ञात करो ?

Sol. **दिया है** : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा

$\angle AOB = 90°, \angle AOC = 110°$

ज्ञात करना है : $\angle BAC = ?$



$\angle AOB + \angle AOC + \angle BOC = 360°$

$\Rightarrow \; 90° + 110° + \angle BOC = 360°$

$\Rightarrow \; \angle BOC = 360° - 90° - 110°$

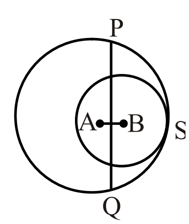
$\Rightarrow \; \angle BOC = 160°$

परन्तु चाप $\overset{\frown}{BC}$ केन्द्र पर $\angle BOC$ अन्तरित करता है एवं वृत्त के शेष भाग पर $\angle BAC$ अन्तरित करता है

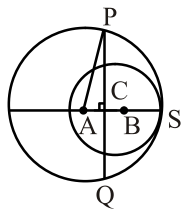
$\Rightarrow \; \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

$\therefore \; \angle BAC = \frac{1}{2}(160°) = 80°$

Ex.22 दो वृत्त जिनके केन्द्र A व B हैं एवं त्रिज्याऐं क्रमशः 5 cm व 3 cm हैं, एक दूसरे को अन्तः स्पर्श करते हैं। यदि रेखाखण्ड AB का लम्ब समद्विभाजक बड़े वृत्त को P व Q पर मिलता हो, तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



Sol. **दिया है :** दो वृत्त एक दूसरे को बिन्दु S पर अन्तः स्पर्श करते हैं। बिन्दु A व B क्रमशः बड़े वृत्त व छोटे वृत्त के केन्द्र हैं। लम्ब समद्विभाजक PQ रेखा AB को समद्विभाजित करता है एवं वृत्त को P व Q पर काटता है



ज्ञात करना है : PQ

रचना : PA, ABS को मिलाइये

प्रक्रिया : दी गई त्रिज्याओं से हम पाते हैं कि

AS = 5 cm

BS = 3 cm

AB = 5 – 3 = 2 cm एवं AC = 1 cm

[लम्ब समद्विभाजक जीवा को समद्विभाजित करता है]

PA = बड़े वृत्त की त्रिज्या = 5 cm

समकोण त्रिभुज ACP में,

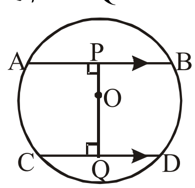
$PC^2 = PA^2 - AC^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$\Rightarrow PC^2 = (5)^2 - (1)^2 \Rightarrow PC^2 = 25 - 1 = 24$

$\Rightarrow PC = \sqrt{24} \quad \Rightarrow PC = 2\sqrt{6}$

$PQ = 2PC = 4\sqrt{6}$ cm.

Ex.23 एक वृत्त का केन्द्र O है एवं त्रिज्या 5 cm है, तथा $OP \perp AB$, $OQ \perp CD$, $AB \parallel CD$, AB = 8 cm एवं CD = 6 cm हो, तो PQ का मान ज्ञात कीजिए

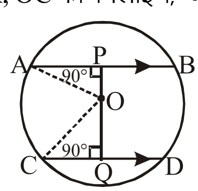


Sol. **दिया है :** AB व CD दो समान्तर जीवाऐं हैं,

AB = 8 cm, CD = 6 cm, त्रिज्या = 5 cm.

ज्ञात करना है : PQ

रचना : OA, OC को मिलाइये, जहाँ O वृत्त का केन्द्र है।



प्रक्रिया :

AP = PB = 4 cm ...[$\because$ AB = 8 cm]

CQ = QD = 3cm ...[$\because$ CD = 6 cm]

[$\because$ केन्द्र से डाला गया लम्ब, जीवा को समद्विभाजित करता है] समकोण ΔOAP में,

OA = OC = वृत्त की त्रिज्या = 5 cm

$OP^2 = OA^2 - AP^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$= (5)^2 - (4)^2 = 25 - 16 = 9$

$\Rightarrow OP = 3$

समकोण ΔOCQ, $OQ^2 = OC^2 - CQ^2$ में,

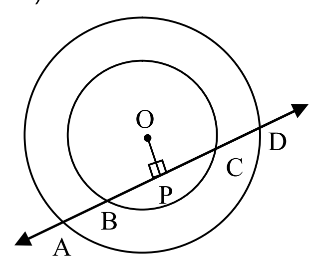
[पाइथागोरस प्रमेय से]

$(5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16$

$\Rightarrow OQ = 4$

$\therefore PQ = PO + OQ = 3 + 4 = 7$ cm.

Ex. 24 यदि एक रेखा, दो संकेन्द्रीय वृत्तों (वृत्त जिनके केन्द्र समान हों) जिनका केन्द्र O है, को A, B, C व D बिन्दुओं पर काटती हो तो सिद्ध करो कि AB = CD (चित्र देखें) **[NCERT]**



Sol. $OP \perp AD$ खींचे

बाह्य वृत्त के लिए, AD जीवा है

$\therefore$ AP = PD .....(1)

($\because$ केन्द्र से डाला गया लम्ब, जीवा को समद्विभाजित करता है)

आन्तरिक वृत्त के लिए, BC जीवा है

$\therefore$ BP = PC .....(2)

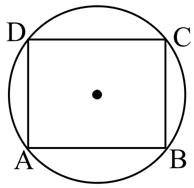
(2) को (1) से घटाने पर,

$\Rightarrow$ AP – BP = PD – PC

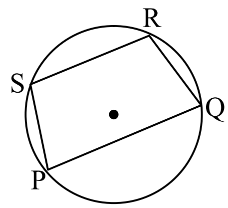
$\Rightarrow$ AB = CD

➢ चक्रीय चतुर्भुज

यदि एक चतुर्भुज के सभी चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित हों, तो यह चतुर्भुज 'चक्रीय चतुर्भुज' कहलाता है।



or

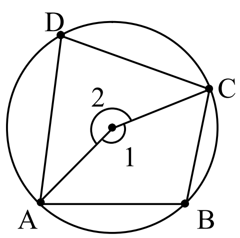


गुणधर्म :

1. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180º होता है (या चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं)

उपपत्ति : चाप $\overset{\frown}{ABC}$ के लिए $\angle D = \frac{1}{2}\angle 1$ .....(1)

चाप $\overset{\frown}{ADC}$ के लिए, $\angle B = \frac{1}{2}\ \angle 2$ ......(2)



{वृत्त की परिधि पर बना कोण, उसके केन्द्र पर बने कोण का आधा होता है}

अब, समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

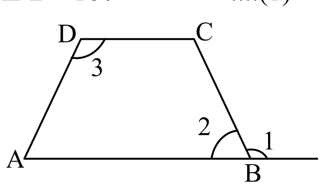
$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2)$$

$$= \frac{1}{2}(360) = 180^\circ$$

2. बाह्य कोण : एक चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोण, सम्मुख अन्तः कोण के तुल्य होता है।

उपपत्ति : माना कि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है,

तब $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$ ....(1)



($\because$ सम्मुख कोण संपूरक होते हैं)

परन्तु $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ....(2) (L.P)

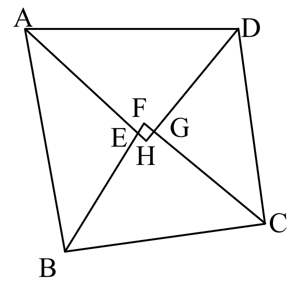
$\therefore$ (1) व (2) से,

$\angle 3 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 2$

$\Rightarrow \angle 3 = \angle 1$

Ex.25 सिद्ध करो कि किसी चतुर्भुज के अन्तः कोण समद्विभाजकों द्वारा निर्मित चतुर्भुज 'चक्रीय चतुर्भुज' होता है। **[NCERT]**

Sol. चित्र में, ABCD एक चतुर्भुज है, जिसके कोण समद्विभाजक AH, BF, CF व DH क्रमशः अन्तःकोणों A, B, C व D के हैं, जिनसे मिलकर चतुर्भुज EFGH बनता है।



अब,

$\angle FEH = \angle AEB = 180^\circ - \angle EAB - \angle EBA$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

एवं $\angle FGH = \angle CGD = 180^\circ - \angle GCD - \angle GDC$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

अतः $\angle FEH + \angle FGH$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$= 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$

$= 360^\circ - \frac{1}{2} \times 360^\circ$

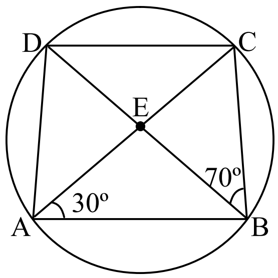
$= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

इस प्रकार, प्रमेय से चतुर्भुज EFGH चक्रीय चतुर्भुज है

Ex.26 ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण बिन्दु E पर प्रतिच्छेदन करते हैं। यदि $\angle DBC = 70^\circ$, $\angle BAC$ 30º, हो तो $\angle BCD$. ज्ञात करो। अब यदि AB = BC, हो तो $\angle ECD$ का मान ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

Sol. $\angle BDC = \angle BAC = 30^\circ$

एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण



$\therefore$ यदि ΔBCD

$\angle BCD = 180^\circ - (\angle CBD + \angle BDC)$

$= 180^\circ - (70^\circ + 30^\circ)$

$= 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

यदि $AB = BC$

$\therefore$ ΔABC समद्विबाहु Δ है

$\therefore$ $\angle BCA = \angle BAC = 30^\circ$

अब $\angle ECD = \angle BCD - \angle BCA$

$= 80^\circ - 30^\circ$

$= 50^\circ$

Ex.27 सिद्ध करो कि चक्रीय समान्तर चतुर्भुज, आयत होता है

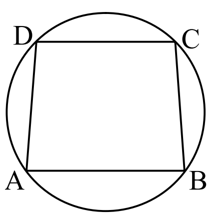
(NCERT)

Sol. ABCD चक्रीय है

$\therefore$ $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ...(1)

परन्तु ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

$\therefore$ $\angle A = \angle C$ ....(2)



(1) व (2) से,

$\angle A + \angle A = 180^\circ$

$2\angle A = 180^\circ$

$\angle A = 90^\circ$

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज ABCD एक आयत है।