हीरो का सूत्र

4
CHAPTER

CONTENTS (सूची)

- कुछ आधारभूत पद
- त्रिभुज का क्षेत्रफल
- हीरो का सूत्र
- चतुर्भुज का क्षेत्रफल
- समचतुर्भुज का क्षेत्रफल
- समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

➤ कुछ आधारभूत पद

◈ **क्षेत्रफल (Area) :**

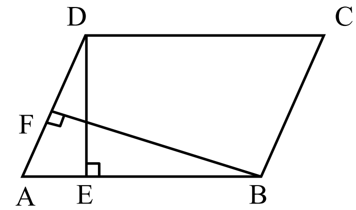
किसी वस्तु के आधार द्वारा घिरे क्षेत्र को उस वस्तु का क्षेत्रफल कहते हैं, आधार के प्रत्येक तरफ से क्षेत्रफल समान होता है।

◈ **ऊँचाई (Height) :**

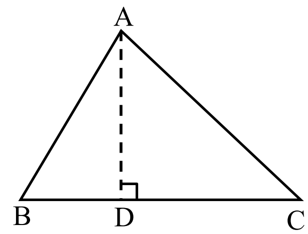
लम्बवत् दूरी ऊँचाई कहलाती है तथा वह भुजा जिस पर लम्ब का पाद स्थित होता है, आधार कहलाता है।

❖ उदाहरण ❖

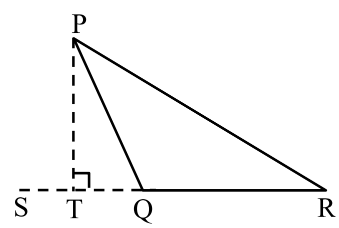
उदा.1 ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। यदि DE व BF बिन्दु D व B से क्रमशः भुजाओं AB व DA पर डाले गये लम्ब हों, तो उनके आधार क्रमशः AB व AD होते हैं।



उदा.2 ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, जिसकी ऊँचाई AD व आधार BC है।



उदा.3 PQR एक अधिक कोण त्रिभुज है, जिसमें Q पर अधिक कोण निर्मित है, तब P की BC से ऊँचाई PT है परन्तु आधार QR (SR नहीं) है।



◈ **त्रिभुज का क्षेत्रफल** = $\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) वर्ग इकाई

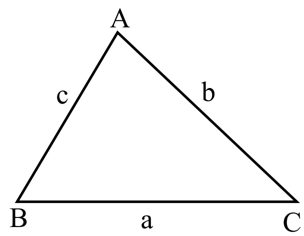
इस सूत्र का प्रयोग हम तब करते हैं जबकि हमें आधार व ऊँचाई दी गई हो

◈ **हीरो का सूत्र (Heron's formula) :** यदि हमें किसी त्रिभुज की सभी भुजाऐं दी गई हों तथा ऊँचाई ज्ञात करने का कोई तरीका नहीं हो, तो हम निम्न सूत्र से क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

जहाँ s त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है।

$s = \frac{1}{2}$ (सभी भुजाओं का योग) $= \frac{1}{2}(a + b + c)$

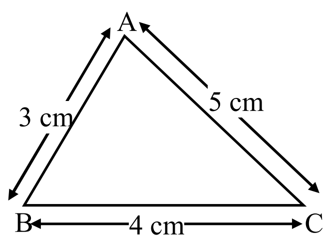


तथा a, b, c त्रिभुज ΔABC की भुजाऐं हैं

Note : यदि कोई दो भुजाऐं दी गई हों, तो हम समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने हेतु $\frac{1}{2}$ (आधार) (ऊँचाई) सूत्र का प्रयोग करते हैं।

❖ उदाहरण ❖

उदा.4 नीचे दिये गये चित्र में s (s – a) का मान ज्ञात कीजिए



हल. परिमाप = 2s = 3 + 4 + 5 = 12 cm

$\therefore$ अर्द्धपरिमाप $= \frac{12}{2} = 6$ cm

$\therefore$ s (s – a) = 6 (6 – 4)

= 6 × 2

= 12 cm.

उदा.5 यदि एक त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप 60 cm है तथा इसकी दो भुजाऐं 45 cm व 40 cm हों तो तीसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

हल. $\because$ अर्द्धपरिमाप = 60

$\therefore$ परिमाप = 2 × 60

$\Rightarrow$ सभी तीनों भुजाओं का योग = 120

(माना कि तीसरी भुजा = x cm)

$\Rightarrow x + 45 + 40 = 120$

$\Rightarrow x + 85 = 120$

$\Rightarrow x = 120 - 85$

$\Rightarrow x = 35$ cm.

उदा.6 यदि एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप 96 cm हो तो इसकी प्रत्येक भुजा ज्ञात कीजिए।

हल. $\because$ समबाहु Δ में सभी भुजाओं की लम्बाई समान होती है

मानाकि लम्बाई x cm है

$\therefore x + x + x = 96$

$\Rightarrow 3x = 96$

$\Rightarrow x = 32$ cm.

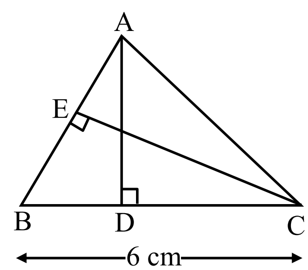
उदा.7 एक Δ की दो समान भुजाओं में से एक भुजा 14 cm हो तथा अर्द्धपरिमाप 22.5 cm हो तो तीसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

हल. मानाकि तीसरी भुजा x cm है

$\therefore x + 14 + 14 = 2 \times 22.5$

$\Rightarrow x = 45 - 28 = 17$ cm.

उदा.8 दिये गये चित्र में AD की लम्बाई ज्ञात कीजिए, यदि EC = 4 cm तथा AB = 5 cm.



हल. $\because$ ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(AB \times EC)$

$= \frac{1}{2}(5 \times 4) = 10$ वर्ग सेमी

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(BC \times AD)$

$= \frac{1}{2}(6 \times AD) = 3AD$ वर्ग सेमी

$\therefore 3AD = 10$

$\Rightarrow AD = \frac{10}{3} = 3.33$ cm.

नोट : $\sqrt{2}$ = 1.41, $\sqrt{3}$ = 1.73, $\sqrt{5}$ = 2.23, $\sqrt{6}$ = 2.45, $\sqrt{7}$ = 2.64, $\sqrt{8}$ = 2.82, $\sqrt{11}$ = 3.31, $\sqrt{15}$ = 3.87

उदा.9 एक त्रिभुज जिसकी भुजाऐं 52 cm, 56 cm तथा 60 cm लम्बाई की है, का क्षेत्रफल ज्ञात करो

हल. माना a = 52 cm, b = 56 cm तथा c = 60 cm.

त्रिभुज का परिमाप = (a + b + c) इकाई

= (52 + 56 + 60) cm = 168 cm

$$\therefore \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \left(\frac{1}{2}\times 168\right)\text{cm} = 84 \text{ cm}$$

(s – a) = (84 – 52) cm = 32 cm,

(s – b) = (84 – 56) cm = 28 cm

तथा (s – c) = (84 – 60) cm = 24 cm

हीरो के सूत्र से, दिये गये त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{84\times 32\times 28\times 24}\text{cm}^2$$

$$= \sqrt{14\times 6\times 16\times 2\times 14\times 2\times 6\times 4}\,\text{cm}^2$$

$$= (14 \times 6 \times 4 \times 2 \times 2)\ \text{cm}^2 = 1344\ \text{cm}^2.$$

उदा.10 हीरो के सूत्र के प्रयोग से एक समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा a इकाई हैं, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

हल. दिया गया है : $s = \frac{1}{2}\ (a + a + a) = \frac{3a}{2}$

$$\therefore\ (s-a) = \left(\frac{3a}{2} - a\right) = \frac{a}{2},$$

$$(s-b) = \left(\frac{3a}{2} - a\right) = \frac{a}{2}$$

तथा $(s-c) = \left(\frac{3a}{2} - a\right) = \frac{a}{2}$

इसलिए हीरो के सूत्र से :

क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ वर्ग इकाई

$= \sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}}$ वर्ग इकाई $= \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)$ वर्ग इकाई

अतः एक समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा की लम्बाई a है, का क्षेत्रफल $\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)$ वर्ग इकाई

नोट : $\Delta = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2\right) = \left(\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}\right)$

$\therefore$ ऊँचाई $= \frac{\sqrt{3}a}{2}$ इकाई

उदा.11 उस समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समान भुजा की प्रत्येक की लम्बाई 13 cm तथा जिसका आधार 24 cm है।

हल. यहाँ a = 13 cm, b = 13 cm तथा c = 24 cm.

$$\therefore\quad s = \frac{1}{2}\ (a+b+c) = \frac{1}{2}\ (13 + 13 + 24)\ \text{cm}$$

= 25 cm.

(s – a) = (25 – 13) cm = 12 cm,

(s – b) = (25 – 13) cm = 12 cm

तथा (s – c) = (25 – 24) cm = 1 cm.

हीरो के सूत्र से

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{25\times 12\times 12\times 1}\ \text{cm}^2 = (5\times 12)\text{cm}^2 = 60\ \text{cm}^2.$$

इस प्रकार दिये गये त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 cm^2 है।

उदा.12 एक त्रिभुजाकार खेत का परिमाप 450 m है तथा इसकी भुजाओं में अनुपात 13 : 12 : 5 है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल. a : b : c = 13 : 12 : 5 ⇒ a = 13x, b = 12x & c = 5x

∴ परिमाप = 450 ⇒ 13x + 12x + 5x = 450

⇒ 30x = 450 ⇒ x = 15.

इस प्रकार त्रिभुज का क्षेत्रफल

a = 13 × 15 = 195 m, b = 12 × 15 = 180 m

तथा c = 5 × 15 = 75 m

यह दिया गया है कि परिमाप = 450

⇒ 2s = 450

⇒ s = 225

∴ क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{225(225-195)(225-180)(225-75)}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $= \sqrt{225\times30\times45\times150}$

$= \sqrt{5^2\times3^2\times3\times5\times2\times3^2\times5\times5^2\times2\times3}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $= \sqrt{5^6\times3^6\times2^2} = 5^3\times3^3\times2 = 6750\,m^2.$

उदा.13 एक त्रिभुज के क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए जबकि इसकी प्रत्येक भुजा को दुगुना कर दिया जाये?

हल. मानाकि a, b, c पुराने त्रिभुज की भुजाऐं हैं तथा s इसका अर्द्धपरिमाप है, तब

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

अब नये त्रिभुज की भुजाऐं 2a, 2b व 2c हैं। मानाकि s' इसका अर्द्धपरिमाप है, तब

$s' = \frac{1}{2}\times(2a+2b+2c)$

$= a+b+c = 2s$

मानाकि Δ व Δ' क्रमशः पुराने व नये त्रिभुज के क्षेत्रफल हैं, तब

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ व

$\Delta' = \sqrt{s'(s'-2a)(s'-2b)(s'-2c)}$

$\Rightarrow \Delta' = \sqrt{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}$

$[\because s' = 2s]$

$\Rightarrow \Delta' = 4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 4\Delta$

$\therefore$ त्रिभुज के क्षेत्रफल में वृद्धि

$= \Delta' - \Delta = 4\Delta - \Delta = 3\Delta$

अतः क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि

$= \left(\frac{3\Delta}{\Delta}\times100\right) = 300\%$

उदा.14 एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयों में अनुपात 3 : 4 : 5 है तथा इसका परिमाप 144 cm. है। तो (i) त्रिभुज का क्षेत्रफल तथा (ii) महत्तम लम्बाई की भुजा के संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल. परिमाप = 144 cm तथा भुजाओं में अनुपात = 3 : 4 : 5

अनुपात वाली भुजाओं का योग = (3 + 4 + 5) = 12

मानाकि भुजाओं की लम्बाई क्रमशः a, b व c है।

तब $a = \left(144\times\frac{3}{12}\right)$ cm = 36 cm,

$b = \left(144\times\frac{4}{12}\right)$ cm = 48 cm

व $c = \left(144\times\frac{5}{12}\right)$ cm = 60 cm.

$\therefore\ s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(36+48+60)$ cm

= 72 cm.

(s – a) = (72 – 36) cm = 36 cm,

(s – b) = (72 – 48) cm = 24 cm

व (s – c) = (72 – 60) cm = 12 cm.

(i) हीरो सूत्र से, त्रिभुज का क्षेत्रफल

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{72\times36\times24\times12}\ cm^2$

$= \sqrt{36\times36\times24\times24}\ cm^2$

$= (36\times24)\ cm^2 = 864\ cm^2.$

अतः दिये गये त्रिभुज का क्षेत्रफल 864 cm^2.

(ii) मानाकि आधार = सबसे लम्बी भुजा = 60 cm तथा संगत ऊँचाई = h cm.

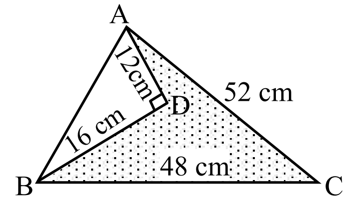
तब क्षेत्रफल = $\left(\frac{1}{2}\times \text{आधार}\times\text{ऊँचाई}\right)$ वर्ग इकाई

$= \left(\frac{1}{2}\times60\times h\right) cm^2 = (30h)\ cm^2.$

$\therefore 30h = 864 \Rightarrow h = \left(\frac{864}{30}\right) = 28.8\,.$

अतः लम्बी भुजा के संगत ऊँचाई 28.8 cm है।

उदा.15 दिये गये चित्र में रेखांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



हल. ΔADB में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$$
$$= \sqrt{12^2 + 16^2}$$
$$= \sqrt{144 + 256}$$
$$= \sqrt{400}$$

$AB = 20$ cm.

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\left\{ s = \frac{20+48+52}{2} = 60\,\text{cm} \right\}$$

$$= \sqrt{60(60-20)(60-48)(60-52)}$$
$$= \sqrt{60 \times 40 \times 12 \times 8}$$
$$= \sqrt{(12\times5)\times(5\times8)\times12\times8}$$
$$= \sqrt{5^2 \times 8^2 \times 12^2} = 5 \times 8 \times 12 = 480\text{ cm}^2.$$

ΔADB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (AD) (BD)

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96\text{ cm}^2$$

$\therefore$ रेखांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= ar(\Delta ABC) - ar(\Delta ADB)$$
$$= 480 - 96 = 384\text{ cm}^2.$$

उदा.16 एक समद्विबाहु त्रिभुज की भुजाऐं a cm, a cm तथा b cm हों तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

हल. अर्द्ध परिमाप $= \frac{a+a+b}{2} = \frac{2a+b}{2}$ cm.

$$\therefore\ \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{2a+b}{2}\right)\left(\frac{2a+b}{2}-a\right)\left(\frac{2a+b}{2}-a\right)\left(\frac{2a+b}{2}-b\right)}$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{2a+b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{2a-b}{2}\right)}$$

$$\Delta = \frac{b}{2\times2}\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$$

$$\Delta = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}\ \text{वर्ग सेमी}$$

उदा.17 एक ट्रेफिक सिग्नल बोर्ड़ जिस पर 'SCHOOL AHEAD' अंकित है, एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी भुजा लम्बाई 'a' है। हीरो सूत्र के प्रयोग से सिग्नल बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा यदि इसका परिमाप 180 cm हो तो सिग्नल बोर्ड का क्षेत्रफल क्या होगा? **[NCERT]**

हल. मानाकि 2s सिग्नल बोर्ड का परिमाप है, तब

$$2s = a + a + a \Rightarrow s = \frac{3a}{2}$$

मानाकि Δ दिये गये समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल है, तब

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}$$

[$\because$ a = b = c]

$$\Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

यदि परिमाप = 180 cm तब

$$2s = 180 \Rightarrow 3a = 180 \Rightarrow a = 60$$

$$\therefore \quad \Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (60)^2 = 900\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

➤ चतुर्भुज का क्षेत्रफल

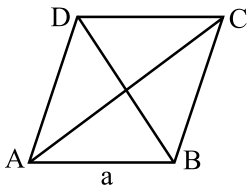
यदि चारों भुजाऐं तथा एक विकर्ण दिया गया हो तब विकर्ण द्वारा हम दो त्रिभुज पाते हैं। हीरो के सूत्र से हम दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कर इन दोनों को जोड़कर हमें चतुभुर्ज का क्षेत्रफल प्राप्त करते हैं।

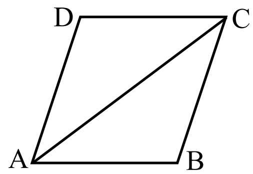
➤ समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

(1) यदि दोनों विकर्ण दिये गये हों (या हमें उनकी लम्बाई ज्ञात कर सकते हो) तब क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (विकर्णो का गुणनफल)

(2) यदि हम हीरो का सूत्र प्रयोग में लें, तब दो भुजाओं व एक विकर्ण से निर्मित त्रिभुज के क्षेत्रफल को

दुगुना करने पर समचतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त होता है



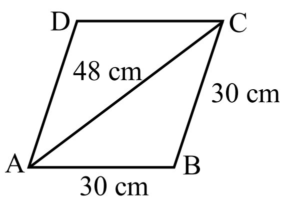


क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(AC \times DB)$ वर्ग इकाई   क्षेत्रफल $= 2(\Delta ABC)$ वर्ग इकाई

उदा.18 एक समचतुर्भुजाकार खेत में 18 गायों को चरने के लिए हरी घास लगी हुई है। यदि समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 30 m हो एवं सबसे लम्बे विकर्ण की लम्बाई 48 m हो तो हरी घास वाले क्षेत्र में प्रत्येक गाय कितना क्षेत्रफल हरी घास चरेगी ?

[NCERT]

हल.



$s = (30 + 30 + 48)/2 = (108)/2 = 54$ m

क्षेत्रफल $= 2(\Delta ABC)$

$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= 2\sqrt{54(54-30)(54-30)(54-48)}$

$= 2\sqrt{9 \times 6 \times 24 \times 24 \times 6}$

क्षेत्रफल $= 2 \times 3 \times 6 \times 24$

$\because$ 18 गायों के लिये अभीष्ट क्षेत्रफल

$= (48 \times 18)$ वर्ग इकाई $= 864$ वर्ग इकाई

$\therefore$ 1 गाय के लिये अभीष्ट क्षेत्रफल

$= \frac{48 \times 18}{18} = 48$ वर्ग इकाई

या

क्षेत्रफल $= 2\left[\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}\right]$

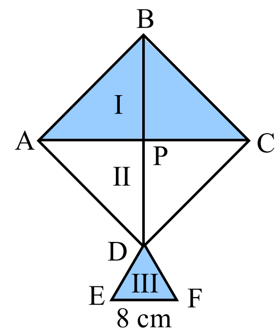
$= 2 \times \frac{48}{4}\sqrt{4(30)^2 - (48)^2}$

$= 24\sqrt{3600 - 2304} = 24\sqrt{1296}$

$= 24 \times 36 = 864$ वर्ग इकाई

उदा.19 एक पतंग वर्गाकार आकृति में है जिसका विकर्ण 32 cm है एवं चित्रानुसार तीन विभिन्न रूप दर्शाये गये हैं एवं एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसका आधार 8 cm व प्रत्येक भुजा 6 cm है, बनाया गया हैं। तो प्रत्येक रूप को काम में लेने हेतु कितना कागज लेना होगा, ज्ञात करो ?

[NCERT]



हल. $\because$ ABCD वर्ग है।

$\therefore$ दोनों विकर्ण समान हैं = 32 cm (प्रत्येक) एवं विकर्ण प्रत्येक को समकोण पर काटते हैं।

$\therefore$ AC = 32 cm व $BP = PD = \frac{32}{2} = 16$ cm

$\therefore (\Delta ABC)$ का क्षेत्रफल $= (\Delta ADC)$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}(32) \times 16 = 256 \text{ cm}^2$

ΔDEF का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \; s = \frac{8+6+6}{2} = 10\text{cm}$

$= \sqrt{10(10-8)(10-6)^2}$

$= 4\sqrt{2 \times 5 \times 2}$

$= 4 \times 2\sqrt{5}$

$= 8\sqrt{5} \text{ cm}^2 = 8 \times 2.236 = 17.88 \text{ cm}^2$

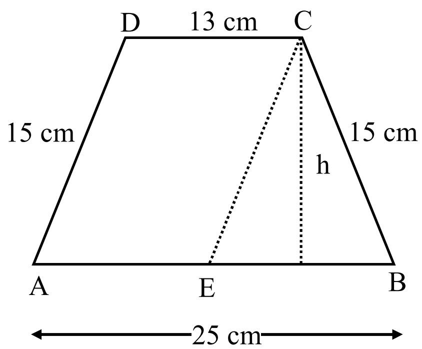
$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल 256 cm^2, 256 cm^2, 17.88 cm^2 हैं।

➤ समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

उदा.20 उस समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समान्तर भुजाऐं 25 cm, 13 cm व अन्य भुजाऐं 15 cm व 15 cm हैं।

हल. मानाकि ABCD दिया गया समलम्ब चतुर्भुज है, जिसमें AB = 25 cm, CD = 13 cm, BC = 15 cm तथा AD = 15 cm है

CE ∥ AD खींचिये



अब ADCE एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें AD ∥ CE एवं AE ∥ CD.

$\therefore$ AE = DC = 13 cm व

BE = AB – AE = 25 – 13 = 12 cm

Δ BCE में, हम जानते है कि

$$s = \frac{15+15+12}{2} = 21$$

$\therefore$ ΔBCE का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Rightarrow$ ΔBCE का क्षेत्रफल

$= \sqrt{21(21-15)(21-15)(21-12)}$

$\Rightarrow$ ΔBCE का क्षेत्रफल

$= \sqrt{21\times 6\times 6\times 9} = 18\sqrt{21}\,\text{cm}^2$ ....(i)

मानाकि ΔBCE की ऊँचाई h है, तब

ΔBCE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)

$= \frac{1}{2} \times 12 \times h = 6h$ .....(ii)

(i) व (ii) से,

$6h = 8\sqrt{21} \Rightarrow h = 3\sqrt{21}$ cm

स्पष्टतः समलम्ब चतुर्भुज ABCD की ऊँचाई त्रिभुज ΔBCE की ऊँचाई के समान है।

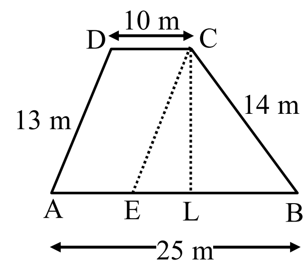
$\therefore$ समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) × h

$\Rightarrow$ समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}(25+13)\times 3\sqrt{21}\ \text{cm}^2 = 57\sqrt{21}\ \text{cm}^2.$

उदा.21 एक खेत का आकार समलम्ब चतुर्भुजाकार है जिसकी समान्तर भुजाऐं 25 m व 10 m हैं। एवं असमान्तर भुजाऐं 14 m व 13 m हैं। तो खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

हल. C से, CE ∥ DA खींचो, स्पष्टतः ADCE एक समान्तर चतुभुर्ज है जिसमें AD ∥ CE एवं DC ∥ AE ऐसी हैं कि AD = 13 m व DC = 10 m.



$\therefore$ AE = DC = 10 m व CE = AD = 13 m

$\Rightarrow$ BE = AB – AE = (25 – 10) m = 15 m

इस प्रकार त्रिभुज BCE में,

BC = 14 m, CE = 13 m व BE = 15 m

मानाकि s त्रिभुज BCE का अर्द्ध-परिमाप है, तो

2s = BC + CE + BE = 14 + 13 + 15 = 42

$\Rightarrow$ s = 21

$\therefore$ ΔBCE का क्षेत्रफल

$= \sqrt{21\times(21-14)\times(21-13)\times(21-15)}$

$\Rightarrow$ ΔBCE का क्षेत्रफल = $\sqrt{21\times 7\times 8\times 6}$

$\Rightarrow$ ΔBCE का क्षेत्रफल = $\sqrt{7^2\times 3^2\times 4^2} = 84\,\text{m}^2$

एवं ΔBCE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$(BE × CL)

$\Rightarrow \quad 84 = \frac{1}{2}\times 15\times CL$

$\Rightarrow \quad CL = \frac{168}{15} = \frac{56}{5}$

$\Rightarrow$ समान्तर चतुर्भुज ADCE की ऊँचाई $= CL = \frac{56}{5}$ m

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज ADCE का क्षेत्रफल

= आधार × ऊँचाई $= AE \times CL = 10 \times \frac{56}{5} = 112\,m^2$

इस प्रकार, समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल
= समान्तर चतुर्भुज ADCE का क्षेत्रफल
+ΔBCE का क्षेत्रफल

$= (112 + 84)\ m^2 = 196\ m^2$.

उदा.22 एक स्कूल के छात्रों ने सफाई अभियान का आयोजन किया। वे छात्र दो समूहो में सफाई करने निकले। एक समूह ने पथ AB, BC तथा CA चुना जबकि दूसरे समूह ने AC, CD व DA को चुना। फिर वे सभी छात्र समूह अपने पथ की सफाई करने लगे। यदि AB = 9 m, BC = 40 m, CD = 15 m, DA = 28 m, एवं $\angle B = 90°$ हो तब किस समूह ने अधिक क्षेत्र को साफ किया और कितना? छात्रों द्वारा साफ किया गया कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

हल. ΔABC में, हम जानते हैं कि

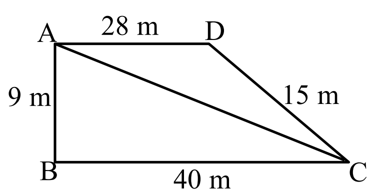
$\angle B = 90°$

$\therefore \ AC^2 = AB^2 + BC^2$

[पाइथागोरस प्रमेय से]

$\Rightarrow AC^2 = 9^2 + 40^2 = 1681$

$\Rightarrow AC = 41$



ΔABC के क्षेत्रफल की गणना :

$\Delta_1 = \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(BC \times AB)$

[$\because \ \angle B = 90°$]

$\Rightarrow \Delta_1 = \frac{1}{2}(40 \times 9)\ m^2 = 180\ m^2$

ACD के क्षेत्रफल की गणना :

मानाकि 2s ; ΔACD का परिमाप है, तब

$2s = AC + CD + DA = 41 + 15 + 28 = 84$

$\Rightarrow \ s = 42$ m

$\therefore \ \Delta_2 = \Delta ACD$ का क्षेत्रफल

$\Rightarrow \ \Delta_2 = \sqrt{s(s-AC)(s-CD)(s-DA)}$

$\Rightarrow \ \Delta_2 = \sqrt{42 \times (42-41) \times (42-15) \times (42-28)}$

$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14} = 126\,m^2$

इस प्रकार प्रथम समूह ने 180 m^2 तथा दूसरे समूह ने 126 m^2 को साफ किया

$\Delta_1 + \Delta_2 = (180 + 126)\ m^2 = 306\ m^2$ एवं $\Delta_1 - \Delta_2 = (180 - 126)\ m^2 = 54\ m^2$ इस प्रकार प्रथम समूह ने 54 m^2 क्षेत्रफल दूसरे समूह की तुलना में अधिक साफ किया एवं सभी छात्रों ने कुल 306 m^2 साफ किया।

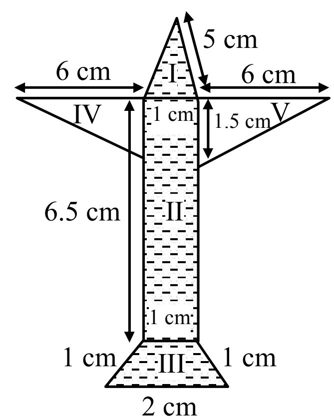
उदा.23 राधा ने हवाईजहाज की एक तस्वीर चित्रानुसार रंगीन कागजों से बनाई तो प्रयोग में लाये गये कागज का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[NCERT]

हल. क्षेत्र I का क्षेत्रफल;

क्षेत्र I उस त्रिभुज से घिरा है, जिसकी भुजाऐं

a = 5 cm, b = 5 cm व c = 1 cm हैं



मानाकि 2s त्रिभुज की परिमिति है, तब,

$$2s = 5 + 5 + 1 \Rightarrow s = \frac{11}{2} \text{ cm}$$

∴ क्षेत्र I का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ cm}^2$$

⇒ क्षेत्र I का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{\frac{11}{2} \times \left(\frac{11}{2} - 5\right) \times \left(\frac{11}{2} - 5\right) \times \left(\frac{11}{2} - 1\right)} \text{ cm}^2$$

⇒ क्षेत्र I का क्षेत्रफल $= \sqrt{\frac{11}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{2}} \text{ cm}^2$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{11} \text{ cm}^2 = \frac{3}{4} \times 3.32 \text{ cm}^2 = 2.49 \text{ cm}^2$$

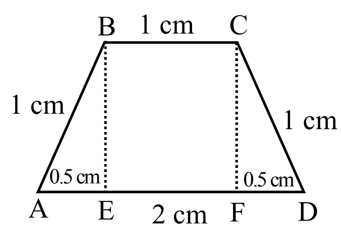
क्षेत्र II का क्षेत्रफल :

क्षेत्र II एक आयत है जिसकी लम्बाई 6.5 cm व चौड़ाई 1 cm है।

∴ क्षेत्र II का क्षेत्रफल $= 6.5 \times 1 \text{ cm}^2 = 6.5 \text{ cm}^2$

क्षेत्र III का क्षेत्रफल :

क्षेत्र III एक समद्विबाहु समलम्ब है (चित्रानुसार)



ΔABE में, हम जानते हैं कि

$$AB^2 = AE^2 + BE^2$$

$$\Rightarrow 1 = 0.25 + BE^2$$

$$\Rightarrow BE = \sqrt{0.75} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

∴ क्षेत्र III का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(AD + BC) \times BE$

$$= \frac{1}{2}(2 + 1) \times \sqrt{\frac{3}{4}} \text{ cm}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 1.3 \text{ cm}^2$$

क्षेत्र IV का क्षेत्रफल :

क्षेत्र IV एक समकोण त्रिभुज है जिसकी दो भुजाएं 6 cm व 1.5 cm लम्बाई की हैं

∴ क्षेत्र IV का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 6 \times 1.5 \text{ cm}^2 = 4.5 \text{ cm}^2$

क्षेत्र V का क्षेत्रफल :

क्षेत्र IV व V संगामी है

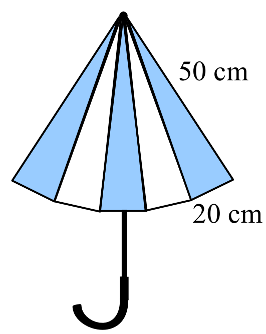
∴ क्षेत्र V का क्षेत्रफल $= 4.5 \text{ cm}^2$

अतः प्रयोग हुए कागज का कुल क्षेत्रफल

$= (2.49 + 6.5 + 1.3 + 4.5 + 4.5) \text{ cm}^2 = 19.29 \text{ cm}^2$

उदा.24 चित्रानुसार एक छाते को 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों जो दो अलग अलग रंग के कपड़े के टुकड़ों से बनाये गये हैं, से बनाया गया है। प्रत्येक टुकड़े की माप 20 cm, 50 cm व 50 cm है। तो छाता बनाने हेतु कितना कपड़ा प्रत्येक रंग का लेना होगा?

[NCERT]



हल. कपड़े के एक त्रिभुजाकार टुकड़े की भुजाएं $a = 20$ cm, $b = 50$ cm व $c = 50$ cm हैं।

मानाकि s त्रिभुजाकार टुकड़े का अर्द्धपरिमाप है। तब

$$2s = a + b + c \Rightarrow 2s = 20 + 50 + 50 \Rightarrow s = 60$$

∴ Δ = एक त्रिभुजाकार टुकड़े का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Rightarrow \Delta = \sqrt{60 \times (60-20) \times (60-50) \times (60-50)} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \Delta = \sqrt{60 \times 40 \times 10 \times 10} \text{ cm}^2$$

$$= \sqrt{6 \times 4 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} \text{ cm}^2 = 200\sqrt{6} \text{ cm}^2$$

प्रत्येक रंग के कपड़े का क्षैत्रफल

$$= 5 \times 200\sqrt{6} \text{ cm}^2 = 1000\sqrt{6} \text{ cm}^2$$

उदा.25 फर्श पर एक फूलनुमा डिजाइन 16 टाइल्सों जो त्रिभुजाकार है एवं जिनका माप 9 cm, 28 cm व 35 cm है (चित्रानुसार) से मिलकर बनाई गई है। तो इन टाईल्सों पर 50 पैसे प्रति वर्ग सेमी की दर से पॉलिश कराने का खर्चा ज्ञात कीजिए।

[NCERT]

हल. त्रिभुजाकार टाइल्स की भुजा की लम्बाइयाँ 28 cm, 9 cm व 35 cm है।

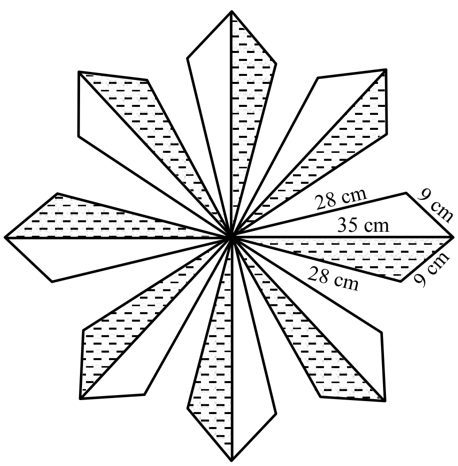
मानाकि एक टाइल्स का अर्द्धपरिमाप s है, तब

$$s = \frac{28+9+35}{2} \text{cm} = 36 \text{cm}$$

∴ एक टाइल्स का क्षेत्रफल

$= \sqrt{36 \times (36-28) \times (36-9) \times (36-35)}$

$= 36\sqrt{6} \text{ cm}^2$



16 टाइल्सों का क्षेत्रफल

$= 16 \times 36\sqrt{6} \text{ cm}^2 = 576\sqrt{6} \text{ cm}^2$

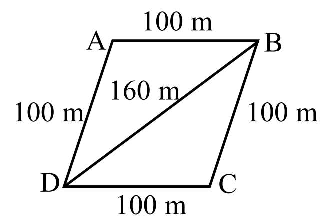
इस प्रकार 50 पैसे प्रति वर्ग सेमी अर्थात् ₹ $\frac{1}{2}$ प्रति वर्ग सेमी. की दर से पॉलिश कराने का खर्चा

$=$ ₹ $576\sqrt{6} \times \frac{1}{2}$ = ₹ 705.45.

उदा.26 सानया का भूखण्ड समचतुर्भुजाकार आकृति का है। वह चाहती है कि उसकी एक पुत्री व एक पुत्र इस भूखण्ड पर ऐसा काम करें कि विभिन्न प्रकार की फसलें पैदा हों ताकि उनके परिवार का गुजारा हो सके। वह इस भूखण्ड को दो बराबर भागों में बाँट देती है। यदि इस भूखण्ड का परिमाप 400 m है तथा एक विकर्ण 160 m हो तो उनको प्रत्येक को कितना-कितना क्षेत्रफल हिस्से में आयेगा ?

[NCERT]

हल. मानाकि ABCD वह भूखण्ड है जो विकर्ण BD = 160 m से दो बराबर भागों में बंटा हुआ है।



चूँकि ABCD वह समचतुर्भुज है जिसका परिमाप 400 m है, इसलिए

$$AB = BC = CD = DA = \frac{400}{4} \text{m} = 100 \text{ m}$$

मानाकि s त्रिभुज ΔBCD का अर्द्धपरिमाप है।

तब $s = \frac{BC+CD+BD}{2} = \frac{100+100+160}{2}$ m

$= 180$ m

∴ ΔBCD का क्षेत्रफल

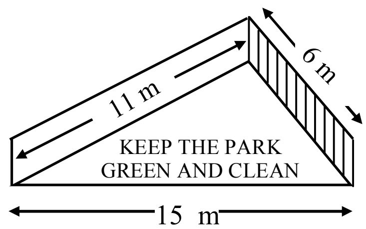
$= \sqrt{180 \times (180-100) \times (180-100) \times (180-160)} \text{ m}^2$

$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20} \text{ m}^2 = 4800 \text{ m}^2$

इस प्रकार प्रत्येक दोनों बच्चे 4800 m^2 क्षेत्रफल पायेंगे।

उदा.27 एक पार्क में एक त्रिभुजाकार स्लाईड रखी हुई है, जिसकी एक भुजा किसी रंग से पेन्टिंग की हुई है, जिस पर लिखा संदेश है ''KEEP THE PARK GREEN AND CLEAN'' (चित्रानुसार) यदि दीवार की भुजाऐं 15 m, 11 m व 6 m हो तो रंग से पेन्टिंग किये गये क्षेत्र का क्षेत्रफल है।

[NCERT]



हल. स्पष्टतः दीवार त्रिभुजाकार रूप में है जिसकी भुजाऐं $a = 15$ m, $b = 6$ m व $c = 11$ m हैं

मानाकि 2s दीवार का परिमाप है, तब

$2s = a + b + c \Rightarrow 2s = 15 + 6 + 11 \Rightarrow s = 16$

$\therefore s - a = 16 - 15 = 1, s - b = 16 - 6 = 10$

एवं $s - c = 16 - 11 = 5$

अतः रंग से पेन्टिंग किये गये क्षेत्र का क्षेत्रफल

= दीवार का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

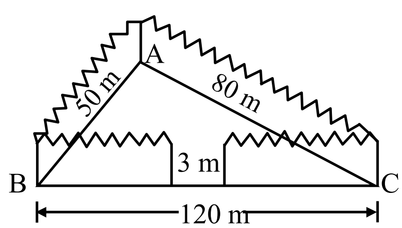
$$= \sqrt{16 \times 1 \times 10 \times 5} = 20\sqrt{2}\ m^2$$

उदा.28 एक त्रिभुजाकार पार्क ABC की भुजाऐं 120 m, 80 m व 50 m है (चित्रानुसार) एक बागवान धनिया इस पार्क के चारों तरफ कंटीले तार (बाड़) लगवाता है एवं अन्दर घास के चारों ओर भी। तो उगाने योग्य क्षेत्र कितना है? तो ₹ 20 रूपये प्रति मीटर के हिसाब से चारों तरफ तार लगवाने पर कितना खर्चा आयेगा जबकि 3m का स्थान दरवाजे के लिए है। **[NCERT]**

हल. क्षेत्रफल की गणना हेतु : स्पष्टतः पार्क त्रिभुजाकार है जिसकी भुजाऐं

$a = BC = 120$ m, $b = CA = 80$ m तथा

$c = AB = 50$ m



यदि s पार्क का अर्द्धपरिमाप हो, तब

$2s = a + b + c \Rightarrow 2s = 120 + 80 + 50$

$\Rightarrow s = 125$

$\therefore s - a = 125 - 120 = 5, s - b = 125 - 80 = 45$

एवं $s - c = 125 - 50 = 75$.

अतः पार्क का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}\ m^2 = 375\sqrt{15}\ m^2$$

बाड़ लगाने हेतु आवश्यक तार की लम्बाई

= पार्क का परिमाप – दरवाजे की चौड़ाई

= 250 m – 3 m = 247 m

$\therefore$ बाड़ लगाने का खर्चा = ₹ (20 × 247)

= ₹ 4940.

उदा.29 एक पुल की त्रिभुजाकार दीवार को विज्ञापन हेतु काम में लेना है। दीवार की भुजाऐं 122 m, 22 m व 120 m है (चित्रानुसार) विज्ञापन से प्रतिवर्ष ₹ 5000 प्रति मीटर^2 की कमाई होती है। एक कम्पनी 3 महीनो के लिए दोनों दीवारों को किराये पर लेती है, तो बतलाइये कि उसे कितना भुगतान करना होगा ? **[NCERT]**

हल. दीवारों की भुजा की लम्बाइयाँ 122 m, 22 m व 120 m हैं।

हम जानते है कि

$$122^2 = 120^2 + 20^2$$

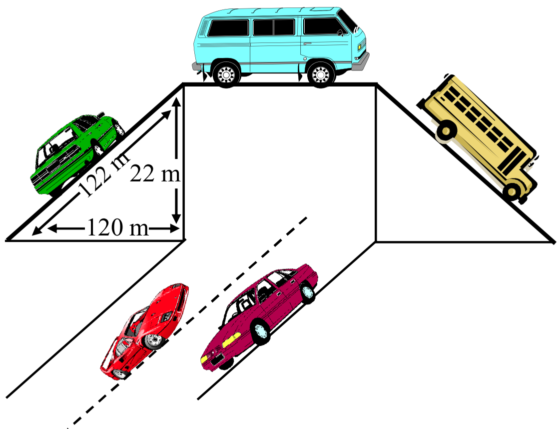
चूँकि दीवारें समकोण त्रिभुजाकार रूप में हैं

$\therefore$ दोनों दीवारों का क्षेत्रफल

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}\right)$$

$\Rightarrow$ दो दीवारों का क्षेत्रफल

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 120 \times 22\right) = 2640\ m^2$$



हम जानते है कि

वार्षिक किराया = ₹ 5000 प्रति मीटर^2

$\therefore$ मासिक किराया = ₹ $\left(\frac{5000}{12}\right)$ प्रति मीटर^2

अतः कम्पनी द्वारा 3 महीने में दिये जाने वाला किराया भुगतान

$= ₹\left(\frac{5000}{12} \times 3 \times 2640\right) = ₹\,3300000.$

उदा.30 एक त्रिभुज की भुजाओं में अनुपात 12 : 17 : 25 है एवं इसका परिमाप 540 cm है, तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

हल. मानाकि Δ की भुजाऐं 12x cm, 17x cm, 25x cm.

$\therefore$ 12x + 17x + 25x = 540 cm

$\Rightarrow$ 54x = 540

$\Rightarrow$ x = 10 cm

$\therefore$ भुजाऐं 120 cm, 170 cm, 250 cm

तथा $s = \frac{540}{2} = 270$ cm

$\therefore$ क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{270(270-120)(270-170)(270-250)}$

$= \sqrt{27 \times 10(150)(100)(20)}$

$= 10\sqrt{9 \times 3 \times 10 \times (5 \times 3 \times 10)(4 \times 5)}$

$= 10 \times 3 \times 2\sqrt{(3 \times 3)(5 \times 5)(10 \times 10)}$

$= 60 \times 3 \times 5 \times 10 = 9000$ cm^2.

उदा.31 एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाऐं 18 cm व 10 cm है तथा परिमाप 42 cm हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

हल. Δ की दो भुजाऐं 18 cm, 10 cm है तथा परिमाप = 42 cm.

$\therefore$ तीसरी भुजा = 42 – 18 – 10 = 14 cm.

$s = \frac{42}{2} = 21$ cm

क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-18)(21-10)(21-14)}$

$= \sqrt{(7 \times 3)(3)(11)(7)}$

$= 7 \times 3\sqrt{11} = 21\sqrt{11}$ cm^2 = 21 × 3.31

= 69.51 cm^2.