समान्तर चतुर्भुज एवं त्रिभुज का क्षेत्रफल

4
CHAPTER

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

- एक ही आधार तथा समान्तर रेखाओं के मध्य बने समान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल समान होता है।
- समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी कोई एक भुजा तथा उसके संगत शीर्षलम्ब का गुणनफल होता है।
- एक ही आधार तथा एक समान क्षेत्रफल वाले समान्तर चतुर्भुज एक समान समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित होते है।
- यदि एक समान्तर चतुर्भुज तथा एक त्रिभुज एक ही आधार तथा एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल, समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
- दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 ABCD एक चतुर्भुज एवं चित्रानुसार BD इसका एक विकर्ण है तो प्रदर्शित करो कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, एवं इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Sol. चूँकि विकर्ण BD तिर्यक AB व DC को क्रमशः B व D पर इस प्रकार से काटती है कि

$\angle ABD = \angle CDB$ [प्रत्येक 90° के बराबर है]

अर्थात् एकान्तर अन्तःकोण समान होते है

$\therefore$ AB || DC

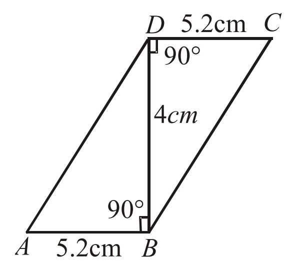
एवं AB = DC

[प्रत्येक 5.2 cms (के तुल्य दिया गया है)]

इस प्रकार, चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AB व DC समान हैं एवं समान्तर हैं।

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब



समान्तर चतुर्भुज (ABCD) का क्षेत्रफल

= आधर × संगत शीर्षलम्ब

$= AB \times BD = 5.2 \times 4$ sq.cm

Ex.2 समान्तर चतुर्भुज ABCD में, यदि AB = 10 cm हो एवं भुजाओं AB व AD के संगत शीर्षलम्बों की लम्बाइयाँ क्रमशः 7 cm व 8 cm हो तो AD ज्ञात कीजिए।

Sol. हम जानते हैं कि,

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज (ABCD) का क्षेत्रफल

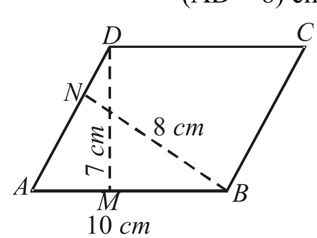
$= AB \times DM$

$= (10 \times 7)\ cm^2$ .... (i)

एवं समान्तर चतुर्भुज (ABCD) का क्षेत्रफल

$= AD \times BN$

$= (AD \times 8)\ cm^2$ ....(ii)



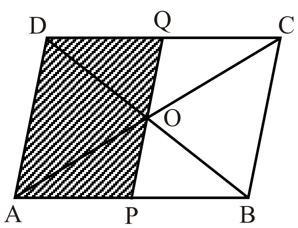
समीकरण (i) व (ii) से, हम जानते हैं कि

$10 \times 7 = AD \times 8$

$\Rightarrow \quad AD = \frac{10 \times 7}{8}$ cm

$= 8.75$ cm.

Ex.3 संलग्न चित्र में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसके विकर्ण AC व BD बिन्दु O पर काटते है। एक रेखाखण्ड जो O से होकर गुजरता है AB को P तथा Q को DC पर मिलता है, तो सिद्ध करो कि चतुर्भुज (APQD) $= \frac{1}{2} \times$ समान्तर चतुर्भुज (का क्षेत्रफल)



Sol. समान्तर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC इसे दो त्रिभुजों में बाँटता है, जिनके क्षेत्रफल समान है।

$\therefore$ (ΔACD) का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ समान्तर चतुर्भुज (ABCD का क्षेत्रफल) ....(i)

ΔOAP व OCQ में, हम जानते हैं कि

OA = OC

[समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे का समद्विभाजन करते है]

$\angle AOP = \angle COQ$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\angle PAO = \angle QCO$ [एकान्तर अन्तः कोण]

$\therefore \quad \Delta OAP \cong \Delta OCQ$

$\therefore \quad ar(\Delta OAP) = ar(\Delta OCQ)$

$\Rightarrow$ (ΔOAP) का क्षेत्रफल + (चतुर्भुज AOQD) का क्षेत्रफल = (ΔOCQ) का क्षेत्रफल + (चतुर्भुज AOQD) का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ (चतुर्भुज APQD) का क्षेत्रफल = (ΔACD) का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल [(i) से]

$\therefore$ (चतुर्भुज APQD) का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समानतर चतुर्भुज ABCD) का क्षेत्रफल

- एक ही आधार तथा एक ही समान समान्तर रेखाओं के मध्य बने त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते हैं।
- एक त्रिभुज का क्षेत्रफल इसकी कोई भुजा तथा संगत शीर्षलम्ब के गुणनफल का आधा होता है।
- यदि एक त्रिभुज तथा एक समान्तर चतुर्भुज का एक ही आधार हो तथा एक समान समान्तर रेखाओं के मध्य बने हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल, समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

- यदि एक त्रिभुज तथा एक समान्तर चतुर्भुज का एक ही आधार हो तथा एक समान समान्तर रेखाओं के मध्य बने हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल, समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

- एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल इसकी ऊँचाई एवं समान्तर भुजाओं के योग के गुणनफल का आधा होता है।
- समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों जिनकी एक भुजा, दूसरे त्रिभुज की एक भुजा के तुल्य हो तो उनके संगत शीर्षलम्ब समान होते हैं।

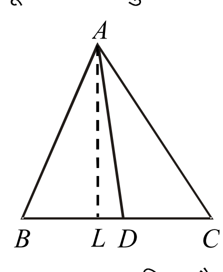
Ex.4 प्रदर्शित करो कि एक त्रिभुज की माध्यिका उस त्रिभुज को दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटती है।

Sol. दिया है: एक Δ ABC जिसकी माध्यिका AD है।

सिद्ध करना है : (Δ ABD) का क्षेत्रफल = (Δ ADC) का क्षेत्रफल

रचना : AL $\perp$ BC खींचिये

उपपत्ति : चूँकि AD त्रिभुज ABC की माध्यिका है,



D आधार BC का मध्य बिन्दु है

$\Rightarrow \quad BD = DC$

$\Rightarrow \quad BD \times AL = DC \times AL$

[दोनों तरफ AL से गुणा करने पर]

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} (BD \times AL)$

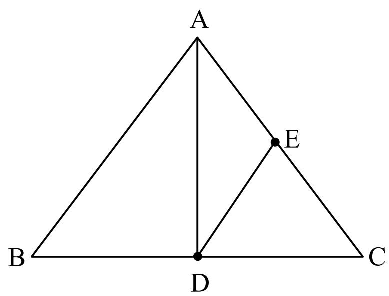
$= \frac{1}{2}$ (DC × AL)

⇒ ar (Δ ABD) = ar (Δ ADC)

वैकल्पिक विधि : चूँकि Δ ABD व Δ ADC के आधार समान है तथा शीर्षलम्ब AL समान हैं, तब ar (Δ ABC) = ar (Δ ADC).

Ex.5 चित्र में, AD त्रिभुज ABC की माध्यिका है तथा DE त्रिभुज DAC की माध्यिका है, तो प्रदर्शित करो कि

$ar(\Delta AED) = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$



Sol. AD त्रिभुज ABC की माध्यिका है

⇒ ar (ΔABD) = ar (ΔACD)

$\Rightarrow ar(\Delta ACD) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$ .... (1)

DE त्रिभुज DAC की माध्यिका है

$\Rightarrow ar(\Delta AED) = \frac{1}{2} ar(\Delta ACD)$ .... (2)

(1) व (2) से,

$ar(\Delta AED) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} ar(\Delta ABC)\right\} = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

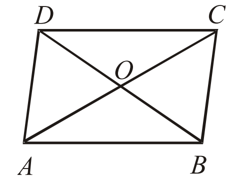
Ex.6 चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC व BD बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करते हैं। तो सिद्ध करो कि यदि BO = OD तो त्रिभुज ABC व ADC के क्षेत्रफल में समान होते हैं।

Sol. दिया है : एक चतुर्भुज ABCD जिसके विकर्ण AC व BD बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन इस प्रकार करते है कि BO = OD.

सिद्ध करना है : ar (Δ ABC) = ar (Δ ADC)

उपपत्ति : Δ ABD में, हम जानते है कि BO = OD.

[दिया है]



⇒ O विकर्ण BD का मध्य बिन्दु है

⇒ AO माध्यिका है

⇒ ar (Δ AOB) = ar (Δ AOD) ....(i)

[∵ माध्यिका एक त्रिभुज को दो बराबर क्षेत्रफल के त्रिभुज में बांटती है]

ΔCBD में, O विकर्ण BD का मध्य बिन्दु है

∴ CO माध्यिका है

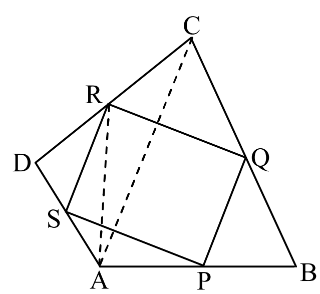
⇒ ar (Δ COB) = ar (Δ COD) ....(ii)

(i) व (ii) को जोड़ने पर, हम पाते है कि

ar (Δ AOB) + ar (Δ COB) = ar(Δ AOD) + ar(Δ COD)

⇒ ar (Δ ABC) = ar (Δ ADC).

Ex.7 मानाकि P, Q, R, S चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB, BC, CD व DA के मध्य बिन्दु हैं। तो प्रदर्शित कीजिए कि PQRS एक समान्तर चतुर्भुज इस प्रकार से है कि समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल)



Sol. AC व AR को जोड़िये

ΔABC में, P व Q क्रमशः भुजाओं AB व BC के मध्य बिंदु है।

$\therefore$ PQ || AC व $PQ = \frac{1}{2} AC$

ΔDAC में, S व R क्रमशः भुजाओं AD व DC के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore$ SR || AC व $SR = \frac{1}{2} AC$

अतः PQ || SR व PQ = SR.

∴ PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब, माध्यिका AR त्रिभुज ACD को समान क्षेत्रफल के दो त्रिभुजों में बांटती है।

$\therefore$ ar (ΔARD) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔACD) ….(1)

माध्यिका RS त्रिभुज ARD को दो समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बांटती है

$\therefore$ ar (ΔDSR) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔARD) ….(2)

(1) व (2) से,

ar (ΔDSR) = $\frac{1}{4}$ ar (ΔACD)

इसी प्रकार, ar (ΔBQP) = $\frac{1}{4}$ ar (ΔABC)

$\Rightarrow$ ar (ΔDSR) + ar (ΔBQP)

= $\frac{1}{4}$ [ar (ΔACD) + ar (ΔABC)]

$\Rightarrow$ ar (ΔDSR) + ar (ΔBQP)

= $\frac{1}{4}$ ar [चतुर्भुज ABCD) …..(3)

इसी प्रकार, ar (ΔCRQ) + ar (ΔASP)

= $\frac{1}{4}$ ar (चतुर्भुज ABCD) ….(4)

(3) व (4) को जोड़ने पर,

ar (ΔDSR) + ar (ΔBQP) + ar (ΔCRQ) + ar (ΔASP)

= $\frac{1}{2}$ ar (चतुर्भुज ABCD) ….(5)

परन्तु, ar (ΔDSR) + ar (ΔBQP) + ar (ΔCRQ) + ar (ΔASP) + ar (समान्तर चतुर्भुज PQRS)

= ar (चतुर्भुज ABCD) ….(6)

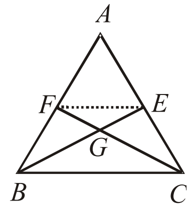
(5) को (6) से घटाने पर

ar (समान्तर चतुर्भुज PQRS)

= $\frac{1}{2}$ ar (चतुर्भुज ABCD)

Ex.8 एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाऐं BE व CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेदन करती हैं, तो सिद्ध करो कि ΔGBC का क्षेत्रफल = चतुर्भुज AFGE का क्षेत्रफल

Sol. EF को मिलाइये, चूँकि एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, तीसरी भुजा के समान्तर होती है। अर्थात् EF ∥ BC.



स्पष्टतः त्रिभुज BEF व CEF का समान आधार EF है तथा एक ही समान समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित हैं

अतः,

ar (ΔBEF) = ar (ΔCEF)

$\Rightarrow$ ar(ΔBEF) − ar(ΔGEF)

= ar(ΔCEF) − ar (ΔGEF)

$\Rightarrow$ ar (ΔBFG) = ar (ΔCEG) .... (i)

हम जानते है कि एक त्रिभुज की माध्यिका उस त्रिभुज को समान क्षेत्रफल के दो त्रिभुजों में बांटती है।

अतः, ar (ΔBEC) = ar (ΔABE)

$\Rightarrow$ ar(ΔBGC) + ar (ΔCEG) = ar(चतुर्भुज AFGE) + ar (ΔBFG)

$\Rightarrow$ ar(ΔBGC) + ar(ΔBFG) = ar (चतुर्भुज AFGE) + ar (ΔBFG) [(i) से]

$\Rightarrow$ ar (ΔBGC) = ar (चतुर्भुज AFGE)

Ex.9 एक समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB, BC, CD व DA के मध्य बिन्दु क्रमशः E,F,G,H हैं, तो प्रदर्शित कीजिए कि चतुर्भुज EFGH का क्षेत्रफल, समान्तर चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल का आधा होता है।

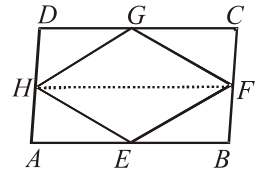
Sol. दिया है: एक चतुर्भुज ABCD जिसकी भुजाओं AB, BC, CD व DA के मध्य बिन्दु क्रमशः E,F,G,H हैं।

सिद्ध करना है :

(i) समान्तर चतुर्भुज EFGH का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

रचना : AC व HF को मिलाइये



चूंकि ΔHGF व समान्तर चतुर्भुज HDCF का एक समान आधार HF है एवं जो एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित है

$\therefore$ ar(ΔHGF) = $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज HDCF)....(i)

इसी तरह से, ΔHEF व समान्तर चतुर्भुज HABF का एक ही आधार HF है एवं जो एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित हैं।

$\therefore$ ar (ΔHEF) = $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज HABF) ....(ii)

(iii) व (iv) को जोड़ने पर,

ar (ΔHGF) + ar (ΔHEF)

= $\frac{1}{2}$ [ar(|समान्तर चतुर्भुज HDCF)

+ ar(समान्तर चतुर्भुज HABF)]

$\Rightarrow$ ar (समान्तर चतुर्भुज EFGH)

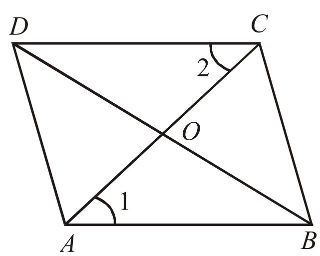
= $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABCD)

Ex.10 दो रेखाखण्ड AC व BD एक दूसरे को O पर काटते हैं, तो सिद्ध करो कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज हैं।

Sol. दिया है: AC व BD दो रेखाखण्ड एक दूसरे को O पर काटते है

सिद्ध करना है: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

रचना : AB, BC, CD व DA को मिलाइये



उपपत्ति : त्रिभुजAOB व COD में, हम जानते है कि

AO = CO [दिया है]

BO = DO [दिया है]

एवं, $\angle AOB = \angle COD$ [शीर्षाभिमुख कोण]

अतः सर्वांगसमता के SAS नियम से,

$\Delta AOB \cong \Delta COD$

$\Rightarrow$ AB = CD [$\because$सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है]

एवं, $\angle 1 = \angle 2$.

इस प्रकार AB व DC विकर्ण AC को क्रमशः A व C पर प्रतिच्छेदन करते हैं, जिससे $\angle 1 = \angle 2$ अर्थात् एकान्तर अन्तःकोण बराबर होते हैं।

$\therefore$ AB || DC

इस प्रकार, चतुर्भुज ABCD में,

AB = DC एवं AB || DC

अर्थात् सम्मुख भुजा युग्म समान एवं समान्तर होते हैं, अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

Ex.11 ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है एवं L व M क्रमशः AB व DC पर बिन्दु है एवं AL = CM तो सिद्ध करो कि LM व BD परस्पर एक दूसरे का प्रतिच्छेदन करते हैं।

Sol. हम जानते हैं कि,

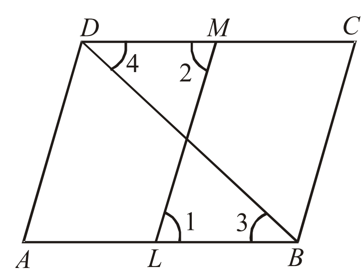
AL = CM

$\Rightarrow$ AB – BL = CD – DM

$\Rightarrow$ – BL = – DM [$\because$ ABCD समान्तर चतुर्भुज है $\therefore$ AB = DC]

$\Rightarrow$ BL = DM .... (i)

अब AB || DC एवं तिर्यक रेखाऐं BD व LM उन्हें प्रतिच्छेद करती है।



$\therefore$ $\angle 3 = \angle 4$ व $\angle 1 = \angle 2$ ....(ii)

इस प्रकार, त्रिभुज OBL व ODM में,

$\angle 1 = \angle 2$ [(ii) से]

BL = MD [i) से]

$\angle 3 = \angle 4$ [(ii) से]

सर्वांगसमता के नियम ASA से,

$\Delta OBL \cong \Delta ODM$

$\Rightarrow$ OB = OD एवं OL = OM

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं]

$\Rightarrow$ O, BD व LM का मध्य बिन्दु है

$\Rightarrow$ BD व LM एक दूसरे का समद्विभाजन करते हैं

Ex.12 एक आयत ABCD के अन्दर कोई बिन्दु O है जिसे शीर्षो से मिलाया गया है। तो सिद्ध करो कि सम्मुख त्रिभुजों के युग्म के क्षेत्रफलों का योग, अन्य त्रिभुज युग्म के क्षेत्रफलों के योग के तुल्य होता है।

Sol. दिया है : एक आयत ABCD है एवं O इसके अन्दर कोई बिन्दु है। OA, OB, OC व OD को मिलाया गया हैं।

सिद्ध करना है : ar (Δ AOD) + ar (Δ BOC)

= ar (Δ AOB) + ar (Δ COD).

रचना : EOF|| AB तथा LOM || AD खींचिए

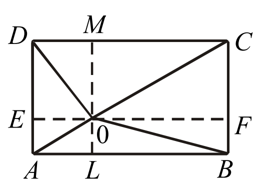
उपपत्ति : हम जानते है कि,

ar (ΔAOD) + ar (ΔBOC)

$= \frac{1}{2}(AD \times OE) + \frac{1}{2}(BC \times OF)$

$= \frac{1}{2}(AD \times OE) + \frac{1}{2}(AD \times OF)$ [$\therefore AD = BC$]

$= \frac{1}{2}(AD \times (OE + OF))$



$= \frac{1}{2}(AD \times EF)$

$= \frac{1}{2}(AD \times AB)$ [$\therefore EF = AB$]

$= \frac{1}{2}$ ar (आयत ABCD) तथा,

ar(Δ AOB)+ ar (ΔCOD)

$= \frac{1}{2}(AB \times OL) + \frac{1}{2}(CD \times OM)\frac{1}{2}$

$= (AB \times OL) + \frac{1}{2}(AB \times OM)$ [$\because AB = CD$]

$= \frac{1}{2} AB \times (OL + OM)$

$= \frac{1}{2}(AB \times LM)$ [$\because LM = AD$]

$\frac{1}{2} = (AB \times AD) = \frac{1}{2}$ ar (आयत ABCD)

$\therefore$ ar (Δ AOD) + ar (Δ BOC)

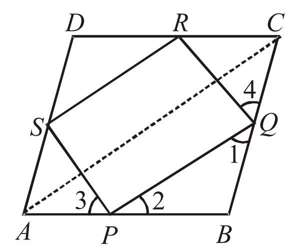
= ar(Δ AOB)+ ar (Δ COD)

Ex.13 ABCD एक समचतुर्भुज है एवं P, Q, R, S क्रमशः AB, BC, CD, DA के मध्य बिन्दु हों, तो सिद्ध करो कि PQRS एक आयत है।

Sol. दिया है: एक समचतुर्भुज ABCD जिसमें P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD एवं DA के मध्य बिन्दु हैं। PQ, QR, RS व SP को मिलाइये।

सिद्ध करना है: PQRS आयत है

रचना : AC को मिलाइये



उपपत्ति : यह सिद्ध करना कि PQRS एक आयत है, हमें यह दर्शाना ही पर्याप्त होगा कि यह एक समान्तर चतुर्भुज है जिसका एक कोण, समकोण है। सर्वप्रथम हम यह सिद्ध करेगें कि PQRS समान्तर चतुर्भुज है।

ΔABC में, P व Q भुजाओं AB व BC के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore$ PQ || AC व $PQ = \frac{1}{2} AC$ ....(i)

ΔADC में, R व S क्रमशः CD व AD के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore$ RS || AC व $RS = \frac{1}{2} AC$ ....(ii)

(i) व (ii) से, हम जानते हैं कि

PQ || RS व PQ = RS

इस प्रकार, PQRS एक चतुर्भुज है जिसका एक सम्मुख भुजा युग्म PQ व SR समान है एवं समान्तर हैं।

इसलिए, PQRS समान्तर चतुर्भुज है

अब, ~~हम सिद्ध करेंगे कि समान्तर चतुर्भुज~~ PQRS का एक कोण समकोण है।

ABCD एक समचतुर्भुज है।

$\Rightarrow$ AB = BC

[$\because$ एक समचतुर्भुज की सभी भुजाऐं समान होती हैं]

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow$ PB = BQ ....(i)

[$\because$ P व Q क्रमशः भुजाओं AB व BC के मध्य बिन्दु है]

अब, त्रिभुज PBQ में,

PB = BQ

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ ....(ii)

[समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते है]

पुनः, ABCD एक समचतुर्भुज है

$\Rightarrow$ AB = BC = CD = AD

$\Rightarrow$ AB = BC, CD = AD

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC, \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AD$

$\Rightarrow$ AP = CQ, CR = AS ....(iii)

अब, त्रिभुज APS व CQR में, हम जानते है कि

AP = CQ [(iii) से]

AS = CR [(iii) से]

एवं PS = QR [$\because$ PQRS समान्तर चतुर्भुज है $\therefore$ PS = QR]

इसलिए, सर्वांगसम के SSS नियम से,

$\Delta APS \cong \Delta CQR$

$\Rightarrow \angle 3 = \angle 4$ ....(iv)

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते है]

अब, $\angle 3 + \angle SPQ + \angle 2 = 180^o$

एवं, $\angle 1 + \angle PQR + \angle 4 = 180^o$

$\therefore \angle 3 + \angle SPQ + \angle 2 = \angle 1 + \angle PQR + \angle 4$

$\Rightarrow \angle SPQ = \angle PQR$ ...(v)

$\begin{bmatrix} \because \angle 1 = \angle 2, & \text{(ii) से} \\ \text{तथा } \angle 3 = \angle 4, & \text{(iv) से} \end{bmatrix}$

अब, तिर्यक रेखा PQ समान्तर रेखाओं SP व RQ को क्रमशः P व Q पर काटती है

$\therefore \angle SPQ + \angle PQR = 180^o$

$\Rightarrow \angle SPQ + \angle SPQ = 180^o$ [(v) से]

$\Rightarrow \angle SPQ = 90^o$

इस प्रकार, PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है, ताकि

$\angle SPQ = 90^o$.

अतः, PQRS एक आयत है।

Ex.14 त्रिभुजों ABC व DBC का एकसमान आधार BC है, जबकि रेखा A, D ; BC के विपरीत तरफ स्थित है एवं, ar (Δ ABC) = ar (Δ DBC) तो प्रदर्शित करो कि BC, AD को समद्विभाजित करता है।

Sol. चूंकि त्रिभुजों ABC व DBC के क्षेत्रफल समान हैं एवं इनका उभयनिष्ठ आधार BC है, अतः BC के संगत शीर्षलम्ब समान हैं अर्थात्

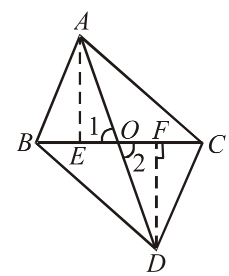
AE = DF.

अब, त्रिभुज AEO व DFO में, हम जानते हैं कि

$\angle 1 = \angle 2$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\angle AEO = \angle DFO$ [प्रत्येक 90° के तुल्य]

एवं, AE = DF



अतः सर्वांगसम के नियम AAS से,

$\Delta AEO \cong \Delta DFO$

$\Rightarrow$ AO = DO

$\Rightarrow$ BC, AD का समद्विभाजन करता है।

Ex.15 ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है एवं O इसके अन्तर्गत कोई बिन्दु है, तो सिद्ध करो कि:

(i) ar (ΔAOB) + ar (ΔCOD) $= \frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABCD)

(ii) ar (ΔAOB) + ar Δ(COD) = ar (ΔBOC) + ar (ΔAOD)

Sol. दिया है: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है एवं O इसके अन्तर्गत कोई बिन्दु दिया हुआ है।

(i) चूंकि ΔAOB तथा समान्तर चतुर्भुज ABFE एक ही आधार AB व एकसमान समान्तर रेखाओं AB व EF के मध्य है।

$\therefore$ ar (ΔAOB)

$= \frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABFE) ....(i)

इसी तरह से,

ar (ΔCOD)

$= \frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज DEFC) ....(ii)

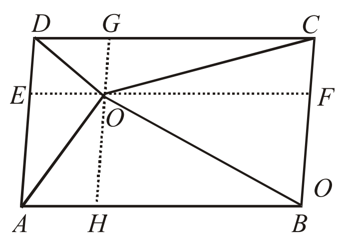
(i) व (ii) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

ar (ΔAOB) + ar (ΔCOD)

$= \frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABCD)

(ii) सिद्ध करना है: ar(ΔAOB) + ar(ΔCOD) = ar (ΔBOC) + ar (ΔAOD).

रचना: EOF ||AB व GOH || AD खींचिये।



उपपत्ति: चूंकि GH || DE व EF || DC

$\therefore$ OG || DE व OE || GD

$\Rightarrow$ EOGD एक समान्तर चतुर्भुज है।

इसी तरह से, EAHO, HBFO व FOGC समान्तर चतुर्भुज है

अब, OD समान्तर चतुर्भुज EOGD का विकर्ण है

$\Rightarrow$ ar (ΔEOD) = ar (ΔDOG) .... (iii)

OA समान्तर चतुर्भुज EAHO का विकर्ण है

$\Rightarrow$ ar (ΔEOA) = ar (ΔAOH) ....(iv)

OB समान्तर चतुर्भुज HBFO का विकर्ण है

$\Rightarrow$ ar (ΔBOF) = ar (ΔBOH) ....(v)

OC समान्तर चतुर्भुज FOGC का विकर्ण है

$\Rightarrow$ ar (ΔFOC) = ar (ΔCOG)

(iii), (iv) व (v) को जोड़ने पर,

ar (ΔEOD) + ar (ΔEOA) + ar (ΔBOF) + ar(ΔFOC)

= ar (ΔDOG) + ar (ΔAOH) + ar (ΔBOH) + ar (ΔCOG)

$\Rightarrow$ ar (ΔAOD) + ar (ΔBOC) = ar (AOB) + ar (ΔCOD)

Ex.16 एक चतुर्भुज ABCD ऐसा है कि इसका विकर्ण BD इसको दो समान क्षेत्रफल के भागों में बांटता है। सिद्ध करो कि BD, AC को समद्विभाजित करता है।

Sol. दिया है: एक चतुर्भुज ABCD जिसका विकर्ण BD इसे समद्विभाजित करता है, अर्थात्

ar (Δ ABD) = ar (Δ BDC)

रचना : AC को मिलाइये।

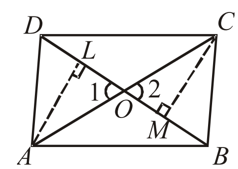
मानाकि AC व BD बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करते है, अब AL $\perp$ BD व CM $\perp$ BD खींचिये।

सिद्ध करना है : AO = OC.

उपपत्ति: हम जानते हैं कि,ar(ΔABD)=ar(Δ BDC)

इस प्रकार त्रिभुज ABD व ABC एकसमान आधार AB पर हैं एवं क्षेत्रफल में समान है, अतः उनके संगत शीर्षलम्ब समान है

अर्थात् AL = CM



अब, Δ ALO व Δ CMO में, हम जानते हैं कि

$\angle 1 = \angle 2$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\angle$ALO = $\angle$CMO [प्रत्येक 90° के तुल्य]

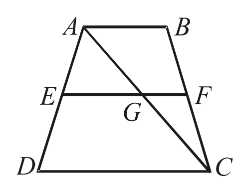
एवं, AL = CM [ऊपर सिद्ध हो चुका है]

अतः, सर्वांगसम के AAS नियम से

Δ ALO $\cong$ Δ CMO

$\Rightarrow$ AO = OC $\Rightarrow$ BD, AC का समद्विभाजन करता है

Ex.17 चित्र में, ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी भुज AB भुजा DC के समान्तर है एवं E भुजा AD का मध्य बिन्दु है। यदि F भुजा BC पर कोई बिन्दु इस प्रकार से है कि रेखाखण्ड EF भुजा DC के समान्तर है।



सिद्ध करो कि EF = $\frac{1}{2}$ (AB + DC).

Sol. दिया है : एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD जिसमें AB || DC तथा E, AD का मध्य बिन्दु है एवं F, भुजा BC पर बिन्दु इस तरह से है कि EF || DC.

सिद्ध करना है: $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

उपपत्ति: ΔADC में, E, AD का मध्य बिन्दु है एवं $EG \parallel DC$ (दिया है)

$\therefore$ G, AC का मध्य बिन्दु है

चूँकि एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर एवं उसकी आधी होती है

$\therefore \quad EG = \frac{1}{2} DC$ ....(i)

अब, ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसमें $AB \parallel DC$.

परन्तु, $EF \parallel DC$

$\therefore \quad EF \parallel AB$

$\Rightarrow \quad GF \parallel AB$

ΔABC में, G, AC का मध्य बिन्दु है (पहले सिद्ध हो चुका है) एवं $EF \parallel AB$.

$\therefore$ F, BC का मध्य बिन्दु है।

$\Rightarrow \quad GF = \frac{1}{2} AB$ ....(ii)

[$\because$एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, तीसरी भुजा की आधी होती है]

(i) व (ii) से, हम जानते है कि

$$EG + GF = \frac{1}{2}(DC) + \frac{1}{2}(AB)$$

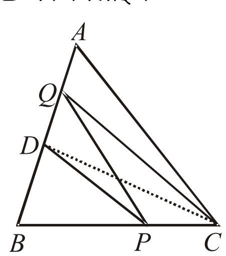
$\Rightarrow \quad EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

Ex.18 ΔABC में, D भुजा AB का मध्य बिन्दु है। P भुजा BC पर कोई बिन्दु है। $CQ \parallel PD$ जो AB को Q पर मिलती है, तो प्रदर्शित करो कि

$$ar(\Delta BPQ) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC).$$

Sol. सिद्ध करना है : $ar(\Delta BPQ) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$

रचना : CD को मिलाइये



उपपत्ति: चूंकि D भुजा AB का मध्य बिन्दु है, अतः ΔABC में, CD माध्यिका है।

$ar(\Delta BCD) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$ .... (i)

चूंकि ΔPDQ व ΔPDC समान आधार PD पर एवं एक ही समान्तर रेखाओं PD व QC के मध्य है।

$\therefore \quad ar(\Delta PDQ) = ar(\Delta PDC)$ ....(ii)

अब, (i) से

$$ar(\Delta BCD) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$$

$\Rightarrow \quad ar(\Delta BPD) + ar(\Delta PDC) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$

$\Rightarrow \quad ar(\Delta BPD) + ar(\Delta PDQ) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$

[(ii) से]

$\Rightarrow \quad ar(\Delta BPQ) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$

Ex.19 यदि ΔABC की माध्यिका G पर प्रतिच्छेदन करती हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि

$ar(\Delta AGB) = ar(\Delta AGC) = ar(\Delta BGC)$

$= \frac{1}{3} ar(\Delta ABC).$

Sol. दिया है: ΔABC जिसकी माध्यिकायें AD, BE व CF ; G पर काटती है

सिद्ध करना है : $ar(\Delta AGB) = ar(\Delta BGC) = ar(CGA) = \frac{1}{3} ar(\Delta ABC)$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि एक त्रिभुज की माध्यिका इसको समान क्षेत्रफल के दो त्रिभुजों में बांटती है

ΔABC में, AD माध्यिका है

$\Rightarrow \quad ar(\Delta ABD) = ar(\Delta ACD)$ .... (i)

ΔGBC में, GD माध्यिका है

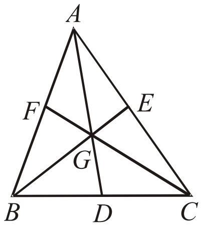
$\Rightarrow \quad ar(\Delta GBD) = ar(\Delta GCD)$ ....(ii)

(ii) को (i) में से घटाने पर, हम जानते हैं कि

$ar(\Delta ABD) - ar(\Delta GBD) = ar(\Delta ACD) - ar(\Delta GCD)$

$\Rightarrow ar(\Delta AGB) = ar(\Delta AGC)$ ....(iii)

इसी तरह से,



ar (Δ AGB) = ar (Δ BGC) ....(iv)

(iii) व (iv) से,

ar(Δ AGB) = ar(Δ BGC) = ar(Δ AGC) ....(v)

परन्तु, ar (Δ AGB) + ar (Δ BGC) + ar (Δ AGC) = ar (Δ ABC)

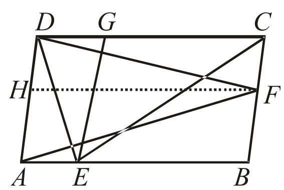
$\therefore$ 3 ar (Δ AGB) = ar (Δ ABC)

$\Rightarrow$ ar (Δ AGB) = $\frac{1}{3}$ ar (Δ ABC)

अतः ar (Δ AGB) = ar (Δ AGC) = ar (Δ BGC) = $\frac{1}{3}$ ar (Δ ABC).

Ex.20 समान्तर चतुर्भुज ABCD में, कोई दो बिन्दु E, F क्रमशः भुजाओं AB व BC पर हैं, तो प्रदर्शित करो कि (ΔADF) = ar (ΔDCE).

Sol. रचनाः EG || AD एवं FH || AB खींचिये



उपपत्तिः चूंकि FH || AB (रचना सें)

इस प्रकार ABFH एक समान्तर चतुर्भुज है

अब, AF समान्तर चतुर्भुज ABFH का विकर्ण है

$\therefore$ ar (ΔAFH) = $\frac{1}{2}$ ar(समान्तर चतुर्भुज ABFH) .... (i)

समान्तर चतुर्भुज DCFH में, DF विकर्ण है

$\therefore$ ar(ΔDFH) = $\frac{1}{2}$ ar(समान्तर चतुर्भुज DCFH) ....(ii)

(i) व (ii) से,

ar (ΔAFH) + ar(ΔDFH)

= $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABFH) + $\frac{1}{2}$ ar(||^{gm} DCFH)

$\Rightarrow$ ar (ΔAFH) + ar (ΔDFH)

= $\frac{1}{2}$ [ar (समान्तर चतुर्भुज ABFH)

+ ar (समान्तर चतुर्भुज DCFH)]

$\Rightarrow$ ar(ΔAFH) + ar(ΔDFH)

= $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABCD)

$\Rightarrow$ ar(ΔADF) = $\frac{1}{2}$ ar(समान्तर चतुर्भुज ABCD) ....(iii)

समान्तर चतुर्भुज AEGD में, DE is a विकर्ण है

$\therefore$ ar(ΔDEG) = $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज AEGD) ....(iv)

समान्तर चतुर्भुज CBEG में, CE विकर्ण है

$\therefore$ ar(ΔCEG) = $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज CBEG) ....(v)

(iv) व (v) से,

ar (ΔDEG) + ar (ΔCEG)

= $\frac{1}{2}$ ar ((समान्तर चतुर्भुज AEGD)

+ $\frac{1}{2}$ ar ((समान्तर चतुर्भुज CBEG)

$\Rightarrow$ ar (ΔDEG) + ar (ΔCEG)

= $\frac{1}{2}$ [ar (समान्तर चतुर्भुज AEGD

+ $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज CBEG)]

$\Rightarrow$ ar(ΔDEG) + ar(ΔCEG)

= $\frac{1}{2}$ [ar(समान्तर चतुर्भुज ABCD)

$\Rightarrow$ ar(ΔDCE) = $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABCD) ....(vi)

(iii) व (vi) से,

ar (ΔADF) = ar (ΔDCE).

Ex.21 चित्र में, PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है। PQ व QO क्रमशः कोण $\angle$P व $\angle$Q के कोण समद्विभाजक है। रेखा LOM को PQ के समान्तर खींचा जाता है, तो सिद्ध करो कि :

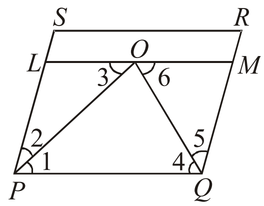
(i) PL = QM (ii) LO = OM.

Sol. चूंकि PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है

$\therefore$ PS || QR

$\Rightarrow$ PL || QM

इस प्रकार, हम जानते हैं कि



PL || QM व LM || PQ [दिया है]

$\Rightarrow$ PQML समान्तर चतुर्भुज है

$\Rightarrow$ PL = QM [$\because$एक समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं बराबर होती है]

जिससे (i) सिद्ध होता है

अब, OP कोण $\angle P$ का समद्विभाजक है

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$ ....(i)

अब, PQ || LM एवं तिर्यक OP इन्हें काटती है

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 3$ ....(ii)

(i) व (ii) से, हम पाते हैं कि

$\angle 2 = \angle 3$

इस प्रकार ΔOPL में,

$\angle 2 = \angle 3$

$\Rightarrow$ OL = PL ...(iii) [$\because$ एक त्रिभुज में समान कोणों की सम्मुख भुजाऐं भी बराबर होती है]

चूंकि OQ कोण $\angle Q$ का समद्विभाजक है

$\therefore$ $\angle 4 = \angle 5$ ....(iv)

एवं PQ || LM तथा तिर्यक OQ उन्हें काटती है, तब

$\angle 4 = \angle 6$ ....(v)

(iv) व (v) से, हम पायेंगे कि

$\angle 5 = \angle 6$

इस प्रकार ΔOQM में,

$\angle 5 = \angle 6$

$\Rightarrow$ OM = QM ....(vi)

[$\because$ एक त्रिभुज के समान कोणों के सम्मुख भुजाऐं भी होती है]

परन्तु PL = QM ...(vii) [ऊपर सिद्ध हो चुका है]

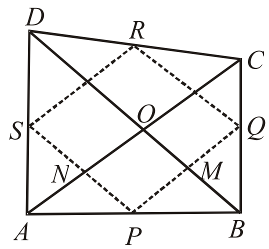
अतः (iii), (vi) व (vii) से, हम पाते हैं कि

OL = OM.

Ex.22 एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण लम्बवत हों, तो प्रदर्शित करो कि इसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना चतुर्भुज एक आयत है

Sol. दिया है : एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC व BD एक दूसरे के लम्बवत् हैं एवं P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD व DA के मध्य बिन्दु हैं एवं PQ, QR, RS व SP को मिलाइये।

सिद्ध करना है : PQRS एक आयत है



उपपत्ति : ΔABC में, P व Q भुजाओं AB व BC के क्रमशः मध्य बिन्दु है

$\therefore$ PQ || AC व $PQ = \frac{1}{2}AC$ .... (i)

ΔADC में, R व S क्रमशः CD व AD के मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ RS || AC व $RS = \frac{1}{2}AC$ ....(ii)

(i) व (ii) से, हम जानते हैं कि

PQ || RS व PQ = RS

इस प्रकार चतुर्भुज PQRS में, सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान है तथा समान्तर हैं, अतः PQRS समान्तर चतुर्भुज है।

माना कि विकर्ण AC व BD जो चतुर्भुज ABCD के हैं, बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करते हैं।

Δ ABD में, P भुजा AB का तथा S भुजा AD का मध्य बिन्दु है

$\therefore$ PS || BD

$\Rightarrow$ PN || MO

एवं (i) से PQ || AC

$\Rightarrow$ PM || NO

इस प्रकार, चतुर्भुज PMON में, हम जानते हैं कि

PN || MO एवं PM || NO

$\Rightarrow$ PMON एक समान्तर चतुर्भुज है

$\Rightarrow$ $\angle MPN = \angle MON$

[∵ एक समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं]

$\Rightarrow$ $\angle MPN = \angle BOA$ [$\because \angle BOA = \angle MON$]

$\Rightarrow$ $\angle MPN = 90^o$ [$\because AC \perp BD \therefore \angle BOA = 90^o$]

$\Rightarrow$ $\angle QPS = 90^o$ [$\because \angle MPN = \angle QPS$]

इस प्रकार, PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है जिसका एक कोण $\angle QPS = 90^o$ अतः PQRS एक आयत है।

Ex.23 समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC व BD बिन्दु O पर काटते हैं एवं AC = 6.8cm तथा BD = 13.6 cm है, तो OC व CD की माप ज्ञात कीजिए।

Sol. चूंकि समान्तर चतुर्भुज के किवर्ण एक दूसरे का प्रतिच्छेदन करते हैं, अतः O विकर्ण AC व BD का मध्य बिन्दु है

$\therefore$ $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6.8\text{ cm} = 3.4\text{ cm}$

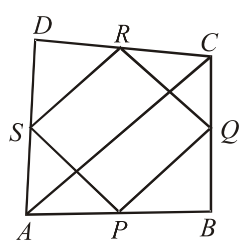
एवं, $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 5.6\text{ cm} = 2.8\text{ cm}$

Ex.24 सिद्ध कीजिए एक चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के युग्मों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति एक समान्तर चतुर्भुज होती है।

Sol. दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R व S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD व DA के मध्य बिन्दु है।

सिद्ध करना है: PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है

रचना: A व C को मिलाइये



उपपत्ति: ΔABC में, P व Q क्रमशः भुजाओं AB व BC के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore$ $PQ \parallel AC$ व $PQ = \frac{1}{2}AC$ .... (i)

ΔADC में, R व S क्रमशः CD व AD के मध्य बिन्दु हैं

$\therefore$ $RS \parallel AC$ व $RS = \frac{1}{2}AC$ ....(ii)

(i) व (ii) से, हम जानते हैं कि

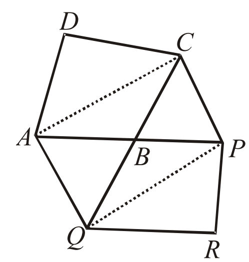
$PQ = RS$ व $PQ \parallel RS$

समान्तर चतुर्भुज PQRS में, सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान है एवं समान्तर है।

अतः, PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

Ex.25 समान्तर चतुर्भुज ABCD की एक भुजा AB को बिन्दु P तक बढ़ाया गया है। बिन्दु A से CF के समान्तर खींची गई रेखा CB को बढ़ाने पर Q पर मिलती है, इस प्रकार से समान्तर चतुर्भुज PBQR पूर्णतः निर्मित होता है, तो प्रदर्शित करो कि समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

Sol. रचना : AC व PQ को मिलाइये।



सिद्ध करना हैः समान्तर चतुर्भुज (ABCD) का क्षेत्रफल = समान्तर चतुर्भुज (BPRQ) का क्षेत्रफल

उपपत्ति: चूंकि AC व PQ क्रमशः समान्तर चतुर्भुज ABCD व BPQR के विकर्ण है।

$\therefore ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABCD) .... (i)

एवं, $ar(\Delta PBQ) = \frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज BPRQ) ....(ii)

अब, त्रिभुज Δ ACQ व Δ AQP एक ही आधार AQ व समान समान्तर रेखाओं AQ व CP के मध्य बने हैं

$\therefore$ $ar(\Delta ACQ) = ar(\Delta AQP)$

$\Rightarrow$ $ar(\Delta ACQ) - ar(\Delta ABQ) = ar(\Delta AQP) - ar(\Delta ABQ)$

[ΔABQ को दोनों तरफ से घटाने पर]

$\Rightarrow$ $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta BPQ)$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABCD) $= \frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज BPRQ) [(i) व (ii) से]

$\Rightarrow$ ar(समान्तर चतुर्भुज ABCD)

= ar(समान्तर चतुर्भुज BPRQ).

Ex.26 समान्तर चतुर्भुज ABCD में, कोण $\angle A$ का समद्विभाजक भुजा BC को X पर समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध करो कि AD = 2AB.

Sol. चूंकि AX कोण $\angle A$ का समद्विभाजक है

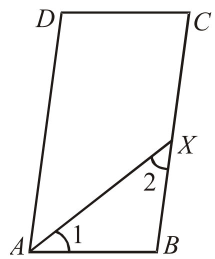
$\therefore \quad \angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$ .... (i)

चूंकि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

अतः AD || BC एवं AB उन्हें काटता है

$\Rightarrow \quad \angle A + \angle B = 180^{\circ}$

[$\because$ अन्तःकोणों का योग 180° होता है]



$\Rightarrow \quad \angle B = 180^{\circ} - \angle A$

ΔABX में, हम जानते हैं कि

$\angle 1 + \angle 2 + \angle B = 180^{\circ}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\angle A + \angle 2 + 180^{\circ} - \angle A = 180^{\circ}$

$\Rightarrow \quad \angle 2 - \frac{1}{2}\angle A = 0$

$\Rightarrow \quad \angle 2 = \frac{1}{2}\angle A$ ....(ii)

(i) व (ii) से,

$\angle 1 = \angle 2.$

इस प्रकार ΔABX में

$\angle 1 = \angle 2.$

$\Rightarrow$ BX = AB [$\because$ एक त्रिभुज Δ में समान कोणों की सम्मुख भुजाऐं भी समान होती है]

$\Rightarrow$ 2BX = 2AB [दोनों तरफ 2 से गुणा करने पर]

$\Rightarrow$ BC = 2AB [$\because$ X भुजा BC का मध्य बिन्दु है $\therefore$ AD = BC]

$\Rightarrow$ AD = 2AB [$\because$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है $\therefore$ AD = BC]

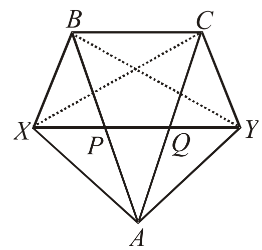
Ex.27 चित्र में, BC || XY, BX || CA एवं AB || YC तो सिद्ध करो कि:

ar (ΔABX) = ar (ΔACY).

Sol. XC व BY को मिलाइये

चूंकि त्रिभुज Δs BXC व BCY एक ही आधार BC तथा एक समान समान्तर रेखाओं BC व XY के मध्य आते हैं।

$\therefore$ ar(ΔBXC) = ar(ΔBCY) .... (i)



एवं त्रिभुज Δ BXC व Δ ABX एक ही आधार BX तथा एक समान समान्तर रेखाओं BX व AC के मध्य आते हैं

$\therefore$ ar (ΔBXC) = ar (ΔABX) ....(ii)

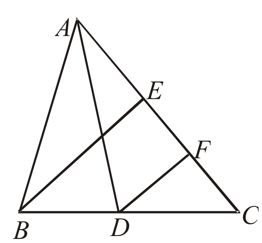
स्पष्टतः त्रिभुज Δ BCY व Δ ACY जिनका आधार CY एक समान है तथा जो एक ही समान्तर रेखाओं AB व CY के मध्य बने हैं

$\therefore$ ar(ΔBCY) = ar (ΔACY) ....(iii)

(i), (ii) व (iii) से, हम जानते हैं कि

ar(ΔABX) = ar (ΔACY).

Ex.28 दिये गये चित्र में, AD व BE त्रिभुज ABC की माध्यिकाऐं हैं एवं BE || DF, तो सिद्ध करो कि $CF = \frac{1}{4}AC$



Sol. ΔBEC में, DF वह रेखा है जो BC के मध्य बिन्दु D से होकर गुजरती है एवं जो BE के समान्तर है तथा CE को F पर काटती है। अतः F, CE का मध्य बिन्दु है, क्योंकि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से होकर खींची जाने वाली रेखा जो दूसरी भुजा के समान्तर हो, तीसरी भुजा का समद्विभाजन करती है।

अब, F, CE का मध्य बिन्दु है

$\Rightarrow \quad CF = \frac{1}{2} CE$

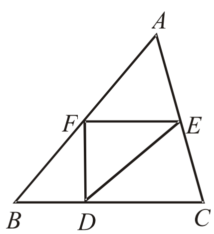
$\Rightarrow \quad CF = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AC\right) \left[\because$ E, AC का मध्य बिन्दु है $AC \therefore EC = \frac{1}{2}AC\right]$

$\Rightarrow \quad CF = \frac{1}{4} AC$

Ex.29 एक त्रिभुज ΔABC की भुजाओं BC, CA व AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E, F हों तो सिद्ध करो कि BDEF एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसका क्षेत्रफल, त्रिभुज ΔABC के क्षेत्रफल का आधा है एवं प्रदर्शित करो कि

ar(ΔDEF) का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}$ (ΔABC) का क्षेत्रफल

Sol. चूंकि D व E भुजाओं BC व AC के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं



इस प्रकार DE || BA $\Rightarrow$ DE || BF

इसी प्रकार FE || BD अतः BDEF एक समान्तर चतुर्भुज है, इसी तरह DCEF व AFDE भी समान्तर चतुर्भुज है

अब, DF समान्तर चतुर्भुज BDEF का विकर्ण है

$\therefore$ ar (ΔBDF) = ar (ΔDEF) .... (i)

DE समान्तर चतुर्भुज DCEF का विकर्ण है

$\therefore$ ar (ΔDCE) = ar (ΔDEF) ....(ii)

FE समान्तर चतुर्भज AFDE का विकर्ण है

$\therefore$ ar (ΔAFE) = ar (ΔDEF) ....(iii)

(i), (ii) व (iii) से, हम जानते हैं कि

ar (ΔBDF) = ar (ΔDCE) = ar (ΔAFE) = ar (ΔDEF)

अब ar (ΔBDF) + ar (ΔDCE) + ar (ΔAFE) + ar (ΔDEF) = ar (ΔABC)

$\therefore$ 4 ar (ΔDEF) = ar (ΔABC)

$\Rightarrow$ ar (ΔDEF) = $\frac{1}{4}$ ar (ΔABC).

अब, ar (समान्तर चतुर्भुज BDEF) = 2 ar (ΔDEF)

$\Rightarrow$ ar (समान्तर चतुर्भुज BDEF)

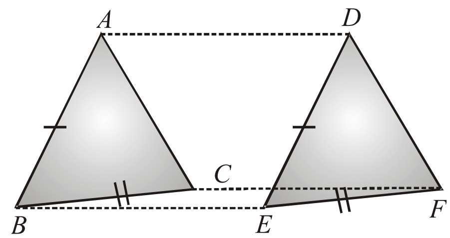
$= 2 \times \frac{1}{4}$ ar(ΔABC)

$= \frac{1}{2}$ ar (ΔABC)

Ex.30 ΔABC व ΔDEF दो त्रिभुज ऐसे हैं कि AB, BC क्रमशः DE, EF के समान एवं समान्तर हैं, तो प्रदर्शित करो कि AC, DF के समान एवं समान्तर हैं।

Sol. दिया है: दो त्रिभुज ABC व DEF ऐसे हैं कि AB = DE एवं AB || DE तथा BC = EF एवं BC || EF

सिद्ध करना है: AC = DF व AC || DF



उपपत्ति : चतुर्भुज ABED पर विचार करें

हम जानते हैं कि AB = DE एवं AB || DE

$\Rightarrow$ सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान हैं एवं समान्तर है

$\Rightarrow$ ABED समान्तर चतुर्भुज है

$\Rightarrow$ AD = BE एवं AD || BE ....(i)

अब, चतुर्भुज BCFE पर विचार करें

हम जानते हैं कि

BC = EF व BC || EF

$\Rightarrow$ सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान हैं एवं समान्तर है

$\Rightarrow$ BCFE समान्तर चतुर्भुज है

$\Rightarrow$ CF = BE व CF || BE ....(ii)

(i) व (ii) से, हम जानते हैं कि

AD = CF व AD || CF

$\Rightarrow$ ACFD एक समान्तर चतुर्भुज है

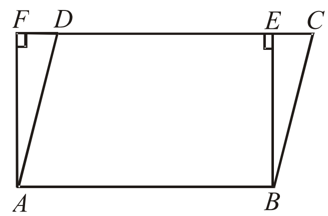
AC = DF व AC || DF

Ex.31 समान्तर चतुर्भुज ABCD व आयत ABEF का एक समान आधार AB है तथा इनके क्षेत्रफल भी एकसमान हैं, तो प्रदर्शित करो कि समान्तर चतुर्भुज की परिमिति, आयत की परिमिति से अधिक है।

Sol. दिया है: एक समान्तर चतुर्भुज ABCD तथा आयत ABEF के एक समान आधार AB है एवं इनके क्षेत्रफल भी एक समान हैं

सिद्ध करना है: समान्तर चतुर्भुज ABCD की परिमिति > आयत ABEF की परिमिति

अर्थात् AB + BC + CD + AD > AB + BE + EF + AF.



उपपत्ति: चूंकि समान्तर चतुर्भुज एवं आयत की सम्मुख भुजाऐं समान हैं

$\therefore$ AB = DC [$\because$ ABCD समान्तर चतुर्भुज हैं]

and, AB = EF [$\because$ ABEF आयत है]

$\therefore$ DC = EF .... (i)

$\Rightarrow$ AB + DC = AB + EF ....(ii)

चूंकि एक दी गई रेखा पर एक बिन्दु जो इस रेखा पर नहीं हैं, से खींचे गये सभी रेखाखण्डों में से लम्बवत् रेखाखण्ड सबसे छोटा होता है

$\therefore$ BE < BC एवं AF < AD

$\Rightarrow$ BC > BE एवं AD > AF

$\Rightarrow$ BC + AD > BE + AF ....(iii)

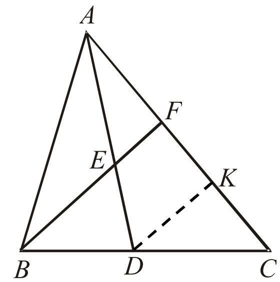
(ii) व (iii) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

AB + DC + BC + AD > AB + EF + BE + AF

$\Rightarrow$ AB + BC + CD + DA > AB + BE + EF + FA.

Ex.32 ΔABC में, AD वह माध्यिका हैं जो A से होकर गुजरती हैं तथा E, AD का मध्य बिन्दु है। BE को आगे बढ़ाने पर यह AC को F पर मिलता है, तो सिद्ध करो कि AF = $\frac{1}{3}$AC.

Sol. D से होकर, DK || BF खींचिये। ΔADK में, E, AD का मध्य बिन्दु है एवं EF || DK.



$\therefore$ F, AK का मध्य बिन्दु है

$\Rightarrow$ AF = FK .... (i)

ΔBCF में, D, BC का मध्य बिन्दु है तथा DK || BF

$\therefore$ K, FC का मध्य बिन्दु है

$\therefore$ FK = KC ....(ii)

(i) व (ii) से, हम जानते हैं कि

AF = FK = KC ....(iii)

अब AC = AF + FK + KC

$\Rightarrow$ AC = AF + AF + AF [(iii) के प्रयोग से]

$\Rightarrow$ AC = 3 (AF)

$\Rightarrow$ AF = $\frac{1}{3}$AC

याद रखने योग्य महत्वपूर्ण बिन्दु

1. दो आकृतियाँ एक ही आधार व एक जैसी समान्तर रेखाओं के मध्य कहलाती है, यदि उनकी एक भुजा (आधार) व शीर्षों (या शीर्ष) उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति आधार के समान्तर एक रेखा पर स्थित हो।
2. दो सर्वांगसम चित्रों (आकृतियाँ) के क्षेत्रफल समान होते हैं, परन्तु इसके विलोम का सही होना आवश्यक नहीं हैं।
3. एक समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसको समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभक्त करता है।
4. एक ही आधार व एक ही समान समान्तर रेखाओं के मध्य बने समान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल समान होता है।
5. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल इसके आधार तथा संगत शीर्षलम्बों के गुणनफल के तुल्य होता है।
6. एक समान आधार तथा एक समान समान्तर रेखाओं के मध्य बने समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल समान होते हैं।
7. एक समान आधार तथा एक समान समान्तर रेखाओं के मध्य बने त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते हैं।
8. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल इसकी किसी भुजा तथा संगत शीर्षलम्ब के गुणनफल के आधे के तुल्य होता है।
9. एक समान आधार व एक समान समान्तर रेखाओं के मध्य बने एक त्रिभुज व एक समान्तर चतुर्भुज में त्रिभुज का क्षेत्रफल, समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
10. एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल, इसकी ऊँचाई तथा समान्तर भुजाओं के योग के गुणनफल का आधा होता है।
11. समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में एक त्रिभुज की एक भुजा दूसरे त्रिभुज की एक भुजा के समान हो तो संगत शीर्षलम्ब भी समान होते हैं।
12. यदि एक चतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण इसको दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बांटता हो तो यह चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज होता है।
13. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल, इसके विकर्णो की लम्बाई के गुणनफल के आधे के तुल्य होता है।
14. एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण इसको समान क्षेत्रफल वाले चार त्रिभुजों में बांटते हैं।
15. एक त्रिभुज की माध्यिका इसको समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बांटती है।