चतुर्भुज

3
CHAPTER

➤ महत्त्वपूर्ण बिन्दु

- एक चतुर्भुज चार रेखाओं से घिरी हुई ऐसी बन्द आकृति है कि उनमें से तीन समान्तर ना हो।
- चतुर्भुज की दो आसन्न या क्रमागत भुजाऐं है यदि वे उभयनिष्ठ बिन्दु (शीर्ष) रखती है।
- एक चतुर्भुज की दो भुजाऐं सम्मुख भुजाऐं होती है यदि वे कोई उभयनिष्ठ अन्तःबिन्दु (शीर्ष) नहीं रखती है।
- एक चतुर्भुज के आसन्न कोण, दो कोण जो उनके प्रतिच्छेद में एक उभयनिष्ठ भुजा रखते हैं। अन्य शब्दों में दो कोण आसन्न होते हैं यदि वे एक उभयनिष्ठ भुजा रखते हैं।
- एक चतुर्भुज के दो कोण सम्मुख कोण कहे जाते हैं यदि वे कोई उभयनिष्ठ भुजा नहीं रखते हैं।
- एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^o होता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 एक चतुर्भुज ABCD में कोण A, B, C तथा D अनुपात 2 : 4 : 5 : 7 में है चतुर्भुज के प्रत्येक कोण की माप ज्ञात करो।

Sol. दिया है $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 2 : 4 : 5 : 7$. So, माना $\angle A = 2x^o$, $\angle B = 4x^o$, $\angle C = 5x^o$, $\angle D = 7x^o$.

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$

$\Rightarrow 2x + 4x + 5x + 7x = 360^o$

$\Rightarrow 18x = 360^o \qquad \Rightarrow x = 20^o$

अतः कोण है

$\angle A = 40^o, \angle B = (4 \times 20)^o = 80^o,$

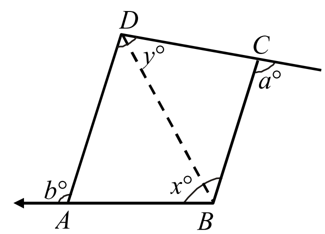
$\angle C = (5 \times 20)^o = 100^o$

तथा, $\angle D = (7x)^o = (7 \times 20)^o = 140^o$

Ex.2 भुजाऐं BA तथा DC एक चतुर्भुज ABCD की चित्र में दर्शाएनुसार बढ़ाई गई है

सिद्ध करो कि $a + b = x + y$.

Sol. BD को मिलाओं ΔABD में



$\angle ABD + \angle ADB = b^o$ ....(i)

ΔCBD में

$\angle CBD + \angle CDB = a^o$ ....(ii)

(i) तथा (ii) को जोड़ने पर

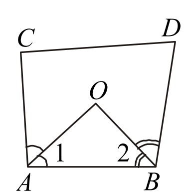
$(\angle ABD + \angle CBD) + (\angle ADB + \angle CDB) = a^o + b^o$

$\Rightarrow x^o + y^o = a^o + b^o$

अतः, $x + y = a + b$

Ex.3 एक चतुर्भुज ABCD में AO तथा BO क्रमशः $\angle A$ तथा $\angle B$ के समद्विभाजक हैं। सिद्ध करो कि $\angle AOB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$.

Sol. ΔAOB में



$\angle AOB + \angle 1 + \angle 2 = 180^o$

$\Rightarrow \angle AOB = 180^o - (\angle 1 + \angle 2)$

$\Rightarrow \angle AOB = 180^o - \left(\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B\right)$

$$\left[\because \angle 1 = \frac{1}{2}\angle A \text{ तथा } \angle 2 = \frac{1}{2}\angle B\right]$$

$\Rightarrow \angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B)$

$\Rightarrow \angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2} [360^\circ - (\angle C + \angle D)]$

$[\because \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

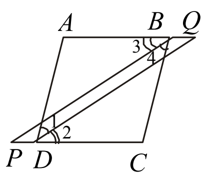
$\therefore \angle A + \angle B = 360^\circ - (\angle C + \angle D)]$

$\Rightarrow \angle AOB = 180^\circ - 180^\circ + \frac{1}{2} (\angle C + \angle D)$

$\Rightarrow \angle AOB = \frac{1}{2} (\angle C + \angle D)$

Ex.4 चित्र में चतुर्भुज ABCD के $\angle B$ तथा $\angle D$ के समद्विभाजक CD तथा AB को बढ़ाने पर क्रमशः P तथा Q पर मिलते हैं सिद्ध करो कि

$$\angle P + \angle Q = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ADC)$$



Sol. ΔPBC में

$\therefore \angle P + \angle 4 + \angle C = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle P + \frac{1}{2}\angle B + \angle C = 180^\circ$ ...(i)

ΔQAD में

$\angle Q + \angle A + \angle 1 = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle Q + \angle A + \frac{1}{2}\angle D = 180^\circ$ ...(ii)

(i) तथा (ii) को जोड़ने पर

$\angle P + \angle Q + \angle A + \angle C + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle D = 180^\circ + 180^\circ$

$\Rightarrow \angle P + \angle Q + \angle A + \angle C + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle D = 360^\circ$

$\Rightarrow \angle P + \angle Q + \angle A + \angle C + \frac{1}{2}(\angle B + \angle D) = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D$

[$\therefore$ एक चतुर्भुज ABCD में

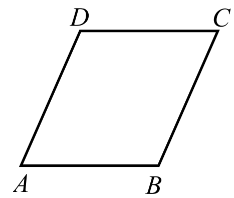
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$]

$\Rightarrow \angle P + \angle Q = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$

$\Rightarrow \angle P + \angle Q = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ADC)$

Ex.5 एक समान्तर चतुर्भुज ABCD में सिद्ध करो कि किन्हीं दो आसन्न कोणों का योग 180º होता है

Sol. चूंकि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है अतः AD || BC.



अब, AD || BC तथा तिर्यक AB उन्हें क्रमशः A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$

[$\because$ तिर्यक के एक ही ओर स्थित अन्तः कोणों का योग 180º होता है]

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$\angle B + \angle C = 180^\circ$, $\angle C + \angle D = 180^\circ$ तथा $\angle D + \angle A = 180^\circ$.

- ◈ एक चतुर्भुज जिसमें ठीक एक जोड़ा समान्तर भुजाओं का हो समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।
- ◈ एक समलम्ब चतुर्भुज समद्विबाहु समलम्ब कहलाता है यदि इसकी असमान्तर भुजाऐं बराबर हो।
- ◈ एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है यदि इसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों जोड़े समान्तर हो।
- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाऐं बराबर हो समचतुर्भुज कहलाता है।
- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण समकोण हो आयत कहलाता है।
- ◈ एक वर्ग वह आयत है जिसकी आसन्न भुजाओं का जोड़ा बराबर हो।
- ◈ एक चतुर्भुज एक पतंग है यदि यह आसन्न भुजाओं के दो बराबर जोड़े हो तथा सम्मुख भुजाऐं असमान हो।
- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटता है।
- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाऐं बराबर होती है।
- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज में किन्हीं दो आसन्न कोणों के समद्विभाजक समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।
- ◈ यदि एक समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण समान्तर चतुर्भुज के एक विकर्ण को समद्विभाजित करता है यह दूसरे कोण को भी समद्विभाजित करता है।
- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते है।

Ex.6 एक समान्तर चतुर्भुज ABCD में, $\angle D = 115^o$ तब $\angle A$ तथा $\angle B$ का माप ज्ञात करो।

Sol. चूंकि एक समान्तर चतुर्भुज के किन्हीं दो आसन्न कोणों का योग 180^o होता है अतः

$\angle A + \angle D = 180^o$ तथा $\angle A + \angle B = 180^o$

अब, $\angle A + \angle D = 180^o$

$\Rightarrow \angle A + 115^o = 180^o$

[$\because \angle D = 115^o$ (दिया है)]

$\Rightarrow \angle A = 65^o$

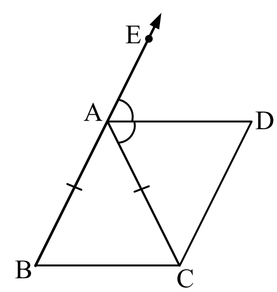
तथा $\angle A + \angle B = 180^o$

$\Rightarrow 65^o + \angle B = 180^o$

$\Rightarrow \angle B = 115^o$

अतः, $\angle A = 65^o$ तथा $\angle B = 115^o$

Ex.7 चित्र में, AB = AC, $\angle EAD = \angle CAD$ तथा CD $\parallel$ AB प्रदर्शित करो कि ABCD समान्तर चतुर्भुज है



Sol. ΔABC में, AB = AC [दिया है]

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$ ....(1)

(समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते है)

$\angle EAD = \angle CAD$[दिया है] ....(2)

अब, $\angle EAC = \angle ABC + \angle ACB$

(एक त्रिभुज का एक बाह्य कोण दो सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है)

$\Rightarrow \angle EAD + \angle CAD = \angle ABC + \angle ACB$

$\Rightarrow \angle CAD + \angle CAD = \angle ACB + \angle ACB$

(1) तथा (2) से

$\Rightarrow 2\angle CAD = 2\angle ACB$

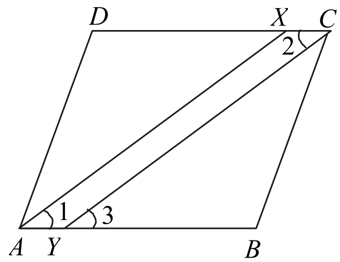
$\Rightarrow \angle CAD = \angle ACB$

$\Rightarrow BC \,||\, AD$

तथा, $CD \,||\, AB$ [दिया है]

अतः हमें चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के दोनों जोड़े समान्तर प्राप्त होते हैं अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

Ex.8 ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है तथा रेखा खण्ड AX,



तथा CY क्रमशः CA व CC के अर्धक हैं तो

सिद्ध करो $AX \parallel CY$

Sol. चूंकि एक समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर होते हैं अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD में

$\angle A = \angle C$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ ....(i)

[$\because$ AX तथा CY क्रमशः $\angle A$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक हैं]

अब, $AB \parallel DC$ तथा तिर्यक CY इन्हें प्रतिच्छेद करती है.

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ ....(ii)

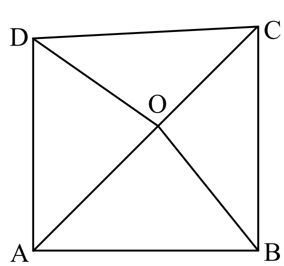
[$\because$ एकान्तर अन्तः कोण बराबर है]

(i) तथा (ii), से $\angle 1 = \angle 3$

अतः तिर्यक AB रेखाओं AX तथा YC को A तथा Y पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि $\angle 1 = \angle 3$ अर्थात् संगत कोण बराबर है

$\therefore AX \parallel CY$

Ex.9 दिए गए चित्र में एक बिन्दु O चतुर्भुज ABCD के अन्दर इस प्रकार लिया जाता है कि OB = OD प्रदर्शित करो कि A, O तथा C एक ही सरल रेखा पर है।



Sol. दिया गया है एक चतुर्भुज ABCD जिसमें AB = BC = CD = DA तथा O इसके अन्दर एक बिन्दु इस प्रकार है कि OB = OD.

सिद्ध करना है $\angle AOB + \angle COB = 180^\circ$

प्रमाण ΔOAB तथा OAD में

AB = AD (दिया है),

OA = OA (उभयनिष्ठ) तथा OB = OD (दिया है)

$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OAD$

$\therefore \angle AOB = \angle AOD$ ....(i) (c.p.c.t.)

इसी प्रकार, $\Delta OBC \cong \Delta ODC$

$\therefore \angle COB = \angle COD$ ....(ii)

अब, $\angle AOB + \angle COB + \angle COD + \angle AOD$

$= 360^\circ$ [$\angle$पर एक बिन्दु]

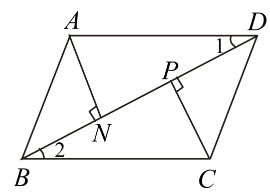
$\Rightarrow 2(\angle AOB + \angle COB) = 360^\circ$

$\Rightarrow \angle AOB + \angle COB = 180^\circ$

Ex.10 दिए गए चित्र में AN तथा CP समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर लम्ब हैं। सिद्ध करो कि

(i) $\Delta ADN \cong \Delta CBP$

(ii) AN = CP



Sol. चूंकि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

$\therefore AD \parallel BC$

अब, $AD \parallel BC$ तथा तिर्यक BD उन्हें B तथा D पर प्रतिच्छेद करती है

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

[$\because$ एकान्तर अन्तःकोण बराबर है]

अब त्रिभुजों ADN तथा CBP में

$\angle 1 = \angle 2$

$\angle AND = \angle CPD$

तथा, AD = BC

[$\because$ समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं बराबर हैं]

अतः AAS सर्वांगसमता के परिणाम से

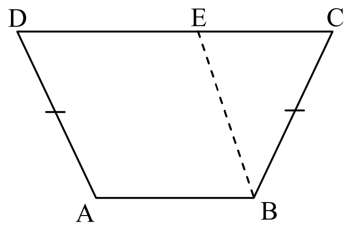
$\Delta ADN \cong \Delta CBP$

AN = CP

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजो के संगत भाग बराबर है]

Ex.11 चित्र में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज इस प्रकार है कि

AB || CD तथा AD = BC.



BE || AD तथा BE, BC को E पर मिलती है

प्रदर्शित करो (i) ABED एक समान्तर चतुर्भुज है

(ii) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^o$.

Sol. यहाँ, AB || CD (दिया है)

$\Rightarrow$ AB || DE ….(1)

तथा, BE || AD (दिया है) ….(2)

(1) तथा (2) से

ABED एक समान्तर चतुर्भुज है

$\Rightarrow$ AD = BE ….(3)

तथा,AD = BC (दिया है) ….(4)

(3) तथा (4) से

BE = BC

$\Rightarrow \angle BEC = \angle BCE$ ….(5)

तथा,$\angle BAD = \angle BED$

(समान्तर चतुर्भुज ABED के सम्मुख कोण)

अर्थात् $\angle BED = \angle BAD$ ….(6)

अब, $\angle BED + \angle BEC = 180^o$

(रेखीय कोण का जोड़ा)

$\Rightarrow \angle BAD + \angle BCE = 180^o$

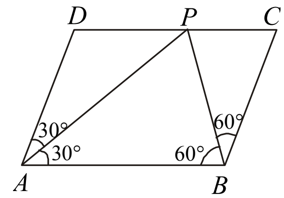
(5) तथा (6) से

$\Rightarrow \angle A + \angle C = 180^o$

इसी प्रकार,

$\angle B + \angle D = 180^o$

Ex.12 चित्र में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है तथा $\angle DAB = 60^o$ यदि AP तथा BP क्रमशः कोणों A व B के समद्विभाजक है जो P पर मिलते है वह CD पर है। सिद्ध करो कि P, CD का मध्य बिन्दु है।



Sol. दिया है, $\angle DAB = 60^o$

$\angle A + \angle B = 180^o$

$\therefore$ $60^o + \angle B = 180^o$

$\Rightarrow \angle B = 120^o$

अब, AB || DC तथा तिर्यक AP इन्हे प्रतिच्छेद करती है

$\therefore$ $\angle PAB = \angle APD$

$\Rightarrow \angle APD = 30^o$ [$\because \angle PAB = 30^o$]

अतः, ΔAPD में

$\angle PAD = \angle APD$

[प्रत्येक 30^o के बराबर]

$\Rightarrow$ AD = PD .... (i)

[$\because$समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर है]

चूंकि BP कोण $\angle B$ का समद्विभाजक है, अतः

$\angle ABP = \angle PBC = 60^o$

अब, AB || DC तथा तिर्यक BP उन्हें प्रतिच्छेद करती है

$\therefore$ $\angle CPB = \angle ABP$

$\Rightarrow \angle CPB = 60^o$ [$\because \angle ABP = 60^o$]

अतः, ΔCBP में

$\angle CBP = \angle CPB$ [प्रत्येक 60^o के बराबर]

$\Rightarrow$ CP = BC

$\because$ [समान कोणों की सम्मुख भुजा बराबर]

$\Rightarrow$ CP = AD .... (ii)

[$\because$ ABCD समान्तर चतुर्भुज है

$\therefore$ AD = BC]

(i) तथा (ii) से

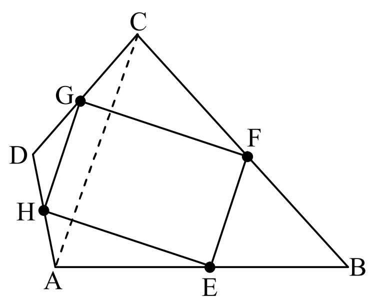
PD = CP

$\Rightarrow$ P, CD का मध्य बिन्दु है।

◈ एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज है यदि इसकी सम्मुख भुजाऐं बराबर है।
◈ एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज है यदि इसके सम्मुख कोण बराबर है।
◈ यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है तब चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है।
◈ एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज है यदि इसके सम्मुख भुजा का एक जोड़ा बराबर तथा समान्तर है।

Ex.13 सिद्ध करो कि एक चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड एक समान्तर चतुर्भुज बनाते है।

Sol. बिन्दु E, F, G तथा H क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दु हैं, चतुर्भुज ABCD है। हमें सिद्ध करना है कि EFGH समान्तर चतुर्भुज है।



विकर्ण AC चतुर्भुज ABCD में मिलाओ।

अब ΔABC में E तथा F भुजाओं BA तथा BC के मध्य बिन्दु है।

$\Rightarrow$ EF || AC (मध्य बिन्दु प्रमेय से)

तथा $EF = \frac{1}{2} AC$ .... (1)

इसी प्रकार ΔADC से

GH || AC

तथा $GH = \frac{1}{2} AC$ ....(2)

तब (1) तथा (2) से

EF || GH

तथा EF = GH

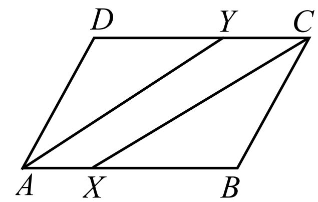
यह सिद्ध करता है कि EFGH एक समान्तर चतुर्भुज है।

Ex.14 चित्र में ABCD समान्तर चतुर्भुज है तथा X, Y क्रमशः भुजाओं AB तथा DC के मध्य बिन्दु हैं। प्रदर्शित करो कि AXCY एक समान्तर चतुर्भुज है।

Sol. चूंकि X तथा Y क्रमशः AB तथा DC के मध्य बिन्दु है अतः

$AX = \frac{1}{2} AB$ तथा $CY = \frac{1}{2} DC$ ... (i)

परन्तु, AB = DC [$\because$ ABCD समान्तर चतुर्भुज है]



$\Rightarrow \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DC$

$\Rightarrow$ AX = CY .... (ii)

तथा AB || DC

$\Rightarrow$ AX || YC .... (iii)

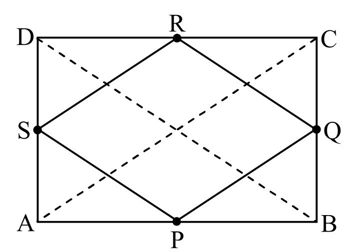
अतः चतुर्भुज AXCY में

AX || YC तथा AX = YC [(ii) तथा (iii) से]

अतः चतुर्भुज AXCY एक समान्तर चतुर्भुज है।

Ex.15 सिद्ध करो कि एक आयत की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड समचतुर्भुज बनाते हैं।

Sol. P, Q, R तथा S भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दु आयत ABCD में हैं।



यहाँ, AC = BD ($\because \Delta ABC \cong \Delta BAD$)

अब, SR || AC तथा $SR = \frac{1}{2} AC$

तथा PQ || AC तथा $PQ = \frac{1}{2} AC$

$\Rightarrow$ SR || PQ तथा $SR = PQ = \frac{1}{2} AC$

इसी प्रकार, PS || QR तथा PS = QR = $\frac{1}{2}$ BD

$\Rightarrow$ SR || PQ, PS || QR

तथा SR = PQ = PS = QR ($\because$ AC = BD)

PQRS एक समचतुर्भुज है।

Ex.16 चित्र में ABCD समान्तर चतुर्भुज है तथा X व Y विकर्ण BD पर बिन्दु इस प्रकार है कि DX = BY। सिद्ध करो कि

(i) AXCY एक समान्तर चतुर्भुज है

(ii) AX = CY, AY = CX

(iii) $\Delta AYB \cong \Delta CXD$

Sol. दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। X तथा Y विकर्ण BD पर बिन्दु इस प्रकार है कि DX = BY

सिद्ध करना है :

(i) AXCY एक समान्तर चतुर्भुज है

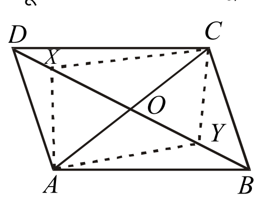
(ii) AX = CY, AY = CX

(iii) $\Delta AYB \cong \Delta CXD$

रचना : AC को मिलाया जो BD को O पर मिलती है।

प्रमाण :

(i) हम जानते है कि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है अतः AC तथा BD एक दूसरे को O पर समद्विभाजित करते है।



$\therefore$ OB = OD

परन्तु, BY = DX

$\therefore$ OB – BY = OD – DX $\Rightarrow$ OY = OX

अतः चतुर्भुज AXCY में विकर्ण AC तथा XY इस प्रकार है कि OX = OY तथा OA = OC अर्थात् विकर्ण AC तथा XY एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

अतः, AXCY एक समान्तर चतुर्भुज है।

(ii) चूंकि AXCY एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ AX = CY तथा AY = CX

(iii) त्रिभुजों AYB तथा CXD में

AY = CX [(ii) से]

AB = CD [$\because$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है]

BY = DX [दिया है]

अतः SSS-सर्वांगसमता के प्रतिबन्ध से

$\Delta AYB \cong \Delta CXD$

Ex.17 चित्र में ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC, CP || AB तथा AP ; ΔABC के बाह्य कोण $\angle CAD$ का समद्विभाजक है। सिद्ध करो कि $\angle PAC = \angle BCA$ तथा ABCP एक समान्तर चतुर्भुज है।

Sol. दिया है : एक समद्विबाहु ΔABC जिसमें AB = AC है। AP, बाह्य कोण $\angle CAD$ का समद्विभाजक है तथा CP || AB है।

सिद्ध करना है : $\angle PAC = \angle BCA$ तथा ABCP

प्रमाण : ΔABC में

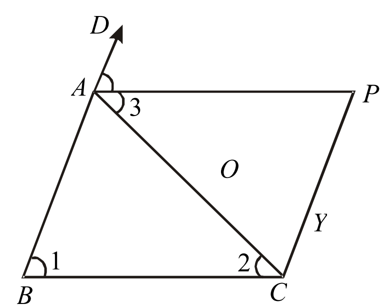
AB = AC [दिया है]

$\Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 2$ .... (i)

[$\because$ एक Δ में समान भुजाओं के सामने के कोण समान होते है]

अब ΔABC में

बाह्य $\angle CAD = \angle 1 + \angle 2$



[$\because$ बाह्य कोण, दो सम्मुख अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है]

$\Rightarrow$ बाह्य $\angle CAD = 2\angle 2$ [$\because$ $\angle 1 = \angle 2$ ((i)) से]

$\Rightarrow$ $2\angle 3 = 2\angle 2$

[$\because$ AP बाह्य कोण $\angle CAD$ का समद्विभाजक है $\therefore \angle CAD = 2\angle 3$]

$\Rightarrow$ $\angle 3 = \angle 2$

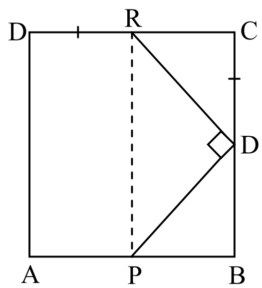
अतः AC रेखाओं AP तथा BC को क्रमशः A तथा C पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि $\angle 3 = \angle 2$ अर्थात् एकान्तर अन्तः कोण बराबर है अतः

AP || BC.

परन्तु, CP || AB [दिया है]

अतः, ABCP एक चतुर्भुज इस प्रकार है कि AP || BC तथा CP || AB। अतः ABCP एक समान्तर चतुर्भुज है।

Ex.18 दिए गए चित्र में, ABCD एक वर्ग है तथा $\angle PQR = 90^o$. यदि PB = QC = DR, सिद्ध करो कि



(i) QB = RC, (ii) PQ = QR, (iii) $\angle QPR = 45^o$.

Sol. $BC = DC, CQ = DR \Rightarrow BC - CQ = \Delta CDR$

$\Rightarrow QB = RC$

ΔCQR से $\angle RQB = \angle QCR + \angle QRC$

$\Rightarrow \angle RQP + \angle PQB = 90^o + \angle QRC$

$\Rightarrow 90^o + \angle PQB = 90^o + \angle QRC$

अब, $\Delta RCQ \cong \Delta QBP$ तथा इससे,

$QR = PQ$

$PQ = QR \Rightarrow \angle QPR = \angle PRQ$

परन्तु $\angle QPR + \angle PRQ = 90^o$.

अतः $\angle QPR = 45^o$

- एक आयत के चारों कोणों में प्रत्येक समकोण होता है।
- एक समचतुर्भुज में चारों भुजाओं में प्रत्येक समान लम्बाई की होती है।
- एक वर्ग का प्रत्येक कोण समकोण होता है तथा चारों भुजाओं में प्रत्येक समान लम्बाई की होती है।
- एक आयत के विकर्ण समान लम्बाई के होते है।
- यदि एक समान्तर चतुर्भुज के दो विकर्ण बराबर है तब यह आयत है।
- एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे के लम्बवत् होते है।
- यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण लम्बवत् है तो यह समचतुर्भुज है।
- एक वर्ग के विकर्ण बराबर तथा एक दूसरे के लम्बवत् होते है।
- यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर है तथा समकोण पर समद्विभाजित होते है तब समान्तर चतुर्भुज एक वर्ग है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.19 एक समान्तर चतुर्भुज में सिद्ध करो

(i) सम्मुख भुजाऐं बराबर है।

(ii) सम्मुख कोण बराबर है।

(iii) प्रत्येक विकर्ण समान्तर चतुर्भुज को समद्विभाजित करता है।

Sol. दिया है : एक समान्तर चतुर्भुज ABCD जिसमें AB || DC तथा AD || BC है

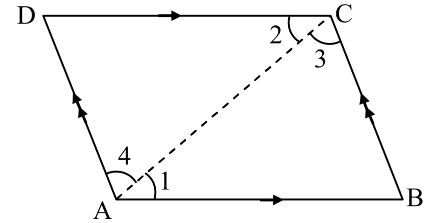
सिद्ध करना है : (i) AB = CD तथा BC = AD;

(ii) $\angle B = \angle D$ तथा $\angle A = \angle C$,

(iii) $\Delta ABC = \Delta CDA$ तथा $\Delta ABD = \Delta CDB$

रचना : A तथा C को मिलाया

ΔABC तथा CDA में



$\angle 1 = \angle 2$

[एकान्तर अन्तःकोण, AB || DC तथा CA उन्हे काटती है।]

$\angle 3 = \angle 4$

[एकान्तर अन्तः कोण, BC || AD तथा CA उन्हे काटती है]

AC = CA (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ [AAS-परिणाम]

(i) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (सिद्ध है)

$\therefore$ AB = CD तथा BC = AD (c.p.c.t.)

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (सिद्ध है)

$\therefore \angle B = \angle D$ (c.p.c.t.)

तथा $\angle 1 = \angle 2$ तथा $\angle 3 = \angle 4$

$\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$

$\Rightarrow \angle A = \angle C$

अतः, $\angle B = \angle D$ तथा $\angle A = \angle C$

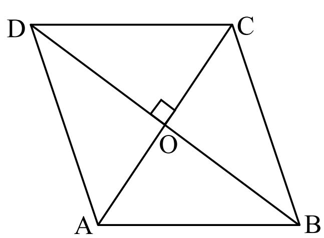
(iii) चूंकि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ तथा सर्वांगसम त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है।

अतः $\Delta ABC = \Delta CDA$

इसी प्रकार, $\Delta ABD = \Delta CDB$

Ex.20 यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे के लम्बवत् है। सिद्ध करो कि यह एक सम चतुर्भुज है।

Sol. चूंकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।



दिया है, OA = OC तथा OB = OD.

अतः, ΔAOD तथा COD, में

OA = OC, $\angle AOD = \angle COD = 90°$

तथा OD उभयनिष्ठ है

$\therefore \quad \Delta AOD \cong \Delta COD$

$\therefore \quad$ AD = CD (c.p.c.t.)

अब, AB = CD तथा AD = BC

(समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

तथा AD = CD (सिद्ध है)

$\therefore$ AB = CD = AD = BC

अतः, ABCD एक समचतुर्भुज है।

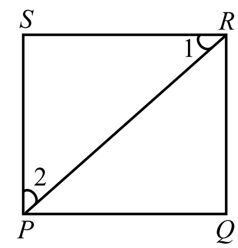
Ex.21 PQRS एक वर्ग है $\angle SRP$ ज्ञात करो।

Sol. PQRS एक वर्ग है।

$\therefore \quad PS = SR$ तथा $\angle PSR = 90°$

अब, Δ PSR में

दिया है PS = SR



$\Rightarrow \quad \angle 1 = \angle 2 \quad$ [$\because$ समान भुजाओं के समाने के कोण समान]

परन्तु, $\angle 1 + \angle 2 + \angle PSR = 180°$

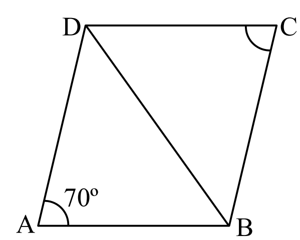
$\therefore \quad 2\angle 1 + 90° = 180° \qquad [\because \angle PSR = 90°]$

$\Rightarrow \quad 2\angle 1 = 90°$

$\Rightarrow \quad \angle 1 = 45°$

Ex.22 दिए गए चित्र में, ABCD एक समचतुर्भुज है यदि $\angle A = 70°$ तब, $\angle CDB$ ज्ञात करो।

Sol.



दिया है $\angle C = \angle A = 70°$

(समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

माना $\angle CDB = x°$

ΔCDB, में दिया गया है

$CD = CB \Rightarrow \angle CBD = \angle CDB = x°$

$\therefore \quad \angle CDB + \angle CBD + \angle DCB = 180°$

(त्रिभुज के कोण)

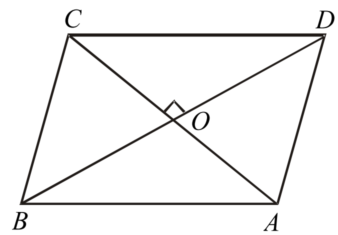
$\Rightarrow x° + x° + 70° = 180°$

$\Rightarrow 2x = 110$ अर्थात् $x = 55$

अतः, $\angle CDB = 55°$

Ex.23 ABCD एक समचतुर्भुज है जिसमें $\angle ABC = 56°$ तब $\angle ACD$ ज्ञात करो।

Sol. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।



$\Rightarrow \angle ABC = \angle ADC$

$\Rightarrow \angle ADC = 56°$ [$\because \angle ABC = 56°$ (दिया है)]

$\Rightarrow \angle ODC = 28°$ [$\because \angle ODC = \frac{1}{2} \angle ADC$]

अब, ΔOCD में,

$\angle OCD + \angle ODC + \angle COD = 180°$

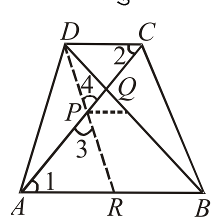
$\Rightarrow \angle ODC + 28° + 90° = 180°$

$\Rightarrow \angle OCD = 62° \Rightarrow \angle ACD = 62°$.

- ◈ एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर तथा इसके आधे के बराबर होता है।
- ◈ एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को इनके मध्य बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

Ex.24 सिद्ध करो कि एक समलम्ब चतुर्भुज के विकर्णो के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखा खण्ड प्रत्येक समान्तर भुजाओं के समान्तर होता है तथा यह इन भुजाओं के अन्तर के आधे के बराबर होता है।

Sol. दिया है : एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD जिसमें AB || DC तथा P तथा Q इसके विकर्णो क्रमशः AC तथा BD के मध्य बिन्दु है।



सिद्ध करना है : (i) PQ || AB या DC

(ii) $PQ = \frac{1}{2}$ (AB – DC)

रचना : DP को मिलाया तथा DP को बढ़ाने पर यह AB को R पर मिलती है।

प्रमाण : चूंकि AB || DC तथा तिर्यक AC उन्हे क्रमशः A तथा C पर काटती है।

$\angle 1 = \angle 2$ .... (i)

[$\therefore$ एकान्तर कोण बराबर है]

अब त्रिभुजों, APR तथा DPC, में

$\angle 1 = \angle 2$ [(i) में]

AP = CP [$\because$ P, AC का मध्य बिन्दु है]

तथा, $\angle 3 = \angle 4$ [शीर्षाभिमुख कोण]

अतः, ASA सर्वांगसमता के परिणाम

$\Delta APR \cong \Delta DPC$

$\Rightarrow$ AR = DC तथा PR = DP .....(ii)

[$\because$ सर्वागसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर]

ΔDRB, में P तथा Q क्रमशः भुजाओं DR तथा DB के मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ PQ || RB

$\Rightarrow$ PQ || AB [$\because$ RB, AB का भाग है]

$\Rightarrow$ PQ || AB तथा DC [$\because$ AB || DC (दिया है)

यह (i) को सिद्ध करता है।

पुनः, P तथा Q क्रमशः भुजाओं DR तथा DB के मध्य बिन्दु ΔDRB में है।

$\therefore PQ = \frac{1}{2} RB$

$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2} (AB - AR)$

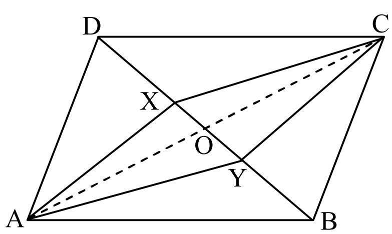
$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2} (AB - DC)$ [(ii) से, AR = DC]

यह (ii) सिद्ध करता है।

- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसे दो समान क्षेत्रफल के भागों में विभाजित करता है।
- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज के प्रत्येक आधार के लिए संगत शीर्षलम्ब आधार पर एक बिन्दु से सम्मुख भुजा को रखने वाली रेखा पर डाले गए लम्ब का रेखा खण्ड है।
- ◈ एक ही आधार तथा एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य बनाए गए समान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है।
- ◈ एक ही आधार तथा एक ही समान्तर भुजाओं के मध्य बनने वाले समान्तर चतुर्भुज तथा आयत का क्षेत्रफल बराबर होता है।
- ◈ एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल इसके आधार तथा संगत शीर्षलम्ब का गुणनफल होता है।
- ◈ समान आधार तथा समान समान्तर भुजाओं के मध्य बनाए गए समान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.25 दिए गए चित्र में, ABCD समान्तर चतुर्भुज है तथा X, Y विकर्ण BD पर बिन्दु इस प्रकार है कि DX = BY, सिद्ध करो कि CXAY एक समान्तर चतुर्भुज है।



Sol. AC को मिलाया जो BD को O पर मिलती है। चूंकि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। अतः OA = OC तथा OD = OB.

अब, OD = OB तथा DX = BY

$\Rightarrow$ OD – DX = OB – BY $\Rightarrow$ OX = OY

अब, OA = OC तथा OX = OY

$\therefore$ CXAY एक चतुर्भुज हैं जिसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

$\therefore$ CXAY एक समान्तर चतुर्भुज है।

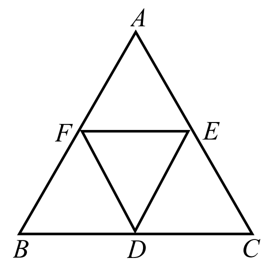
Ex.26 सिद्ध करो कि एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाले चारों त्रिभुज एक दूसरे के सर्वांगसम होते है।

Sol. दिया है : एक त्रिभुज ABC तथा D,E,F क्रमशः भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु है।

सिद्ध करना है :

Δ AFE $\cong$ ΔFBD $\cong$ ΔEDC $\cong$ ΔDEF.

प्रमाण : चूंकि एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु को मिलाने वाला खण्ड तीसरी भुजा का आधा होता है। अतः



$DE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow DE = AF = BF$ .... (i)

$EF = \frac{1}{2}BC \Rightarrow EF = BD = CD$ .... (ii)

$DF = \frac{1}{2}AC \Rightarrow DF = AE = EC$ ....(iii)

अब, त्रिभुजों DEF तथा AFE, में

DE = AF [(i) से]

DF = AE [(ii) से]

तथा, EF = FE [उभयनिष्ठ]

अतः, SSS सर्वांगसमता परिणाम से,

Δ DEF $\cong$ Δ AFE

इसी प्रकार,

Δ DEF $\cong$ Δ FBD तथा Δ DEF $\cong$ Δ EDC

अतः,

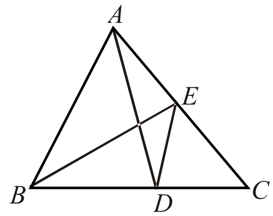
Δ AFE $\cong$ Δ FBD $\cong$ Δ EDC $\cong$ Δ DEF

Ex.27 चित्र में AD माध्यिका है तथा DE $\parallel$ AB सिद्ध करो कि BE माध्यिका है।

Sol. यह सिद्ध करने के लिए कि BE माध्यिका है यह प्रदर्शित करना पर्याप्त है कि E, AC का मध्य बिन्दु है।

अब, त्रिभुज ABC में, AD माध्यिका है

⇒ D, BC का मध्य बिन्दु है।



चूंकि DE एक रेखा भुजा BC के मध्य बिन्दु से ΔABC में खींची गई है तथा AB के समान्तर है। (दिया है) अतः E , AC का मध्य बिन्दु है। अतः BE, ΔABC की माध्यिका है।

Ex.28 माना ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC तथा माना D,E,F क्रमशः BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु है। प्रदर्शित करो कि AD $\perp$ FE तथा AD, FE द्वारा समद्विभाजित होती है।

Sol. दिया है : एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसमें D, E तथा F क्रमशः भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु इस प्रकार है कि AB = AC है। AD, FE को O पर प्रतिच्छेद करती है।

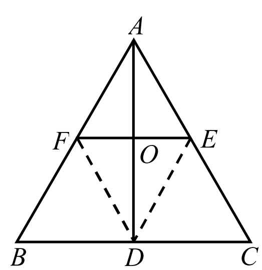
सिद्ध करना है : AD $\perp$ FE तथा AD, FE द्वारा समद्विभाजित होती है।

रचना : DE तथा DF को मिलाया।

प्रमाण : चूंकि एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर तथा इसका आधा होता है। अतः

DE || AB तथा DE = $\frac{1}{2}$AB

एवं, DF || AC तथा DF = $\frac{1}{2}$AC



परन्तु, AB = AC [दिया है]

⇒ $\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2}$AC

⇒ DE = DF .... (i)

अब, DE = $\frac{1}{2}$AB ⇒ DE = AF .... (ii)

तथा, DF = $\frac{1}{2}$AC ⇒ DF = AE ....(iii)

(i), (ii) तथा (iii) से

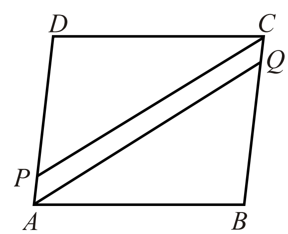
DE = AE = AF = DF

⇒ DEAF एक समचतुर्भुज है।

⇒ विकर्ण AD तथा FE एक दूसरे को समकोण पर काटते है। AD $\perp$ FE तथा AD, FE द्वारा समद्विभाजित होती है।

Ex.29 ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। P, AD पर एक बिन्दु इस प्रकार है कि AP = $\frac{1}{3}$ AD तथा Q, BC पर एक बिन्दु इस प्रकार है कि CQ = $\frac{1}{3}$BP, सिद्ध करो कि AQCP एक समान्तर चतुर्भुज है।

Sol. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।



⇒ AD = BC तथा AD || BC

⇒ $\frac{1}{3}$AD = $\frac{1}{3}$BC तथा AD || BC

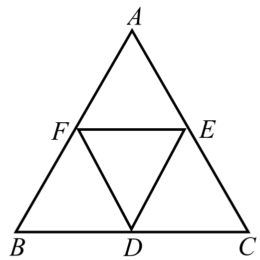
⇒ AP = CQ तथा AP || CQ

अतः APCQ एक चतुर्भुज इस प्रकार है कि सम्मुख भुजाओं का एक जोड़ा AP तथा CQ समान्तर तथा बराबर हैं।

अतः APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

Ex.30 चित्र में D,E तथा F क्रमशः भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु एक समबाहु त्रिभुज ABC में है सिद्ध करो कि DEF भी एक समबाहु त्रिभुज है।

Sol. चूंकि एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा की आधी होती है। अतः D तथा E क्रमशः BC तथा AC के मध्य बिन्दु है।



$\Rightarrow$ $DE = \frac{1}{2}AB$ .... (i)

E तथा F क्रमशः AC तथा AB के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore$ $EF = \frac{1}{2}BC$ .... (ii)

F तथा D क्रमशः AB तथ BC के मध्य बिन्दु हैं।

$\Rightarrow$ $FD = \frac{1}{2}AC$

अब, ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

$\Rightarrow$ $AB = BC = CA$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}CA$

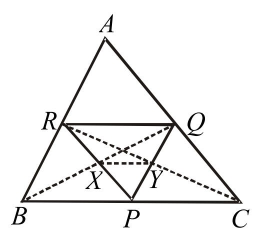
$\Rightarrow$ $DE = EF = FD$ [(i), (ii) व (iii) से]

अतः ΔDEF एक समबाहु त्रिभुज है।

Ex.31 P, Q तथा R क्रमशः भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु एक त्रिभुज ABC में है। X, PR तथा BQ पर मिलती है तथा Y, CR तथा PQ पर मिलती है। सिद्ध करो कि $XY = \frac{1}{4}BC$

Sol. दिया है : एक ΔABC जिसमें P,Q तथा R क्रमशः BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु हैं PR तथा BQ, X पर मिलती है। तथा CR तथा PQ , Y पर मिलती है।

रचना : "X तथा Y को मिलाया



प्रमाण : चूंकि एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर तथा उससे आधा होता है। अतएव Q तथा R क्रमशः AC तथा AB के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore$ $RQ \parallel BC$ तथा $RQ = \frac{1}{2}$ BC .... (i)

$\left[\because P, BC \text{ का मध्य बिन्दु है } \therefore \frac{1}{2}BC = BP\right]$

$\Rightarrow$ $RQ \parallel BP$ तथा $RQ = BP$

$\Rightarrow$ BPQR एक समान्तर चतुर्भुज है

चूंकि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं

$\therefore$ X, PQ का मध्य बिन्दु है।

[$\because$X, विकर्णो BQ तथा PR का समान्तर चतुर्भुज BPQR में प्रतिच्छेद बिन्दु है]

इसी प्रकार Y, PQ का मध्य बिन्दु है।

अब, ΔPQR से XY वह रेखाखण्ड है जो भुजाओं PR तथा PQ के मध्य बिन्दुओं को मिलाता है।

$\therefore$ $XY = \frac{1}{2}RQ$ .... (i)

परन्तु $RQ = \frac{1}{2}BC$ [(i) से]

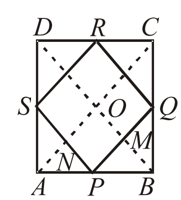
अतः, $XY = \frac{1}{4}BC.$

Ex.32 प्रदर्शित कीजिए कि एक वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाला चतुर्भुज भी वर्ग होता है।

Sol. दिया है : एक वर्ग ABCD जिसमें P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD, DA के मध्य बिन्दु हैं PQ, QR, RS तथा SP को मिलाया गया है।

सिद्ध करना है : PQRS एक वर्ग है।

रचना : AC तथा BD को मिलाया



प्रमाण : ΔABC में P तथा Q क्रमशः भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore$ $PQ \parallel AC$ तथा $PQ = \frac{1}{2}AC$ .... (i)

ΔADC में R तथा S क्रमशः CD तथा AD के मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ RS || AC तथा RS = $\frac{1}{2}$ AC ....(ii)

(i) तथा (ii) से

PQ || RS तथा PQ = RS ....(iii)

अतः चतुर्भुज PQRS में सम्मुख भुजाओं का एक जोड़ा समान्तर तथा बराबर है।

अत : PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब त्रिभुजों PBQ तथा RCQ में

PB = RC

$\left[\begin{array}{l}\because \text{ABCD एक वर्ग है} \therefore AB = BC = CD = DA \\ \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \text{ तथा } \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC\end{array}\right]$

BQ = CQ [$\Rightarrow$ PB = CR तथा BQ = CQ]

तथा $\angle$PBQ = $\angle$RCQ [प्रत्येक 90°]

अत: SAS सर्वांगसमता के परिणाम से

$\Delta PBQ \cong \Delta RCQ$

$\Rightarrow$ PQ = QR ....(iv)

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर]

(iii) तथा (iv) से

PQ = QR = RS

परन्तु PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

QR = PS

अत: PQ = QR = RS = PS ....(v)

अब, PQ || AC [(i) से]

$\Rightarrow$ PM || NO ....(vi)

अत : P तथा S क्रमशः AB तथा AD के मध्य बिन्दु है।

PS || BD

$\Rightarrow$ PM || MO ....(vii)

अत: चतुर्भुज PMON में

PM || NO [(vi) से]

PN || MO [(vii) से]

अत:, PMON एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\Rightarrow$ $\angle$MPN = $\angle$MON

$\Rightarrow$ $\angle$MPN = $\angle$BOA [$\because$ $\angle$MON = $\angle$BOA]

$\Rightarrow$ $\angle$MPN = 90°

z$\left[\begin{array}{l}\because \text{ वर्ग के विकर्ण लम्बवत् हैं} \\ \therefore AC \perp BD \Rightarrow \angle BOA = 90°\end{array}\right]$

$\Rightarrow$ $\angle$QPS = 90°

अत: PQRS एक चतुर्भुज इस प्रकार है कि PQ = QR = RS = SP तथा $\angle$ QPS = 90°.

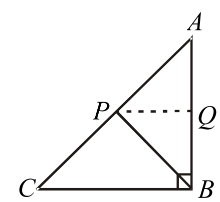
अत: PQRS एक वर्ग है।

Ex.33 ΔABC एक त्रिभुज B पर समकोण है तथा P, AC का मध्य बिन्दु है। सिद्ध करो कि PB = PA = $\frac{1}{2}$ AC.

Sol. दिया है : ΔABC, B पर समकोण है, P, AC का मध्य बिन्दु है।

सिद्ध करना है : PB = PA = $\frac{1}{2}$ AC.

प्रमाण : P से PQ || BC खीचीं जो AB को Q पर मिलती है।



प्रमाण : चूंकि PQ || BC अतः

$\angle$ AQP = $\angle$ ABC [संगत कोण]

$\Rightarrow$ $\angle$AQP = 90° [$\because$ $\angle$ ABC = 90°]

लेकिन, $\angle$ AQP + $\angle$ BQP = 180°

$\left[\begin{array}{l}\because \angle AQP \text{ तथा } \angle BQP \\ \text{एक रेखीय युग्म के कोण हैं}\end{array}\right]$

$\therefore$ 90° + $\angle$ BQP = 180°

$\Rightarrow$ $\angle$ BQP = 90°

अत: $\angle$ AQP = $\angle$ BQP = 90°

अब Δ ABC में P, AC का मध्य बिन्दु है तथा PQ || BC अतएवं Q, AB का मध्य बिन्दु है अर्थात् AQ = BQ.

अब त्रिभुजों APQ तथा BPQ में

हम जानते है, AQ = BC [उपरोक्त सिद्ध]

$\angle$ AQP = $\angle$ BQP [(i) से]

तथा, PQ = PQ

अत: SAS सर्वांगसमता के परिणाम से

Δ APQ $\cong$ $\angle$ BPQ

$\Rightarrow$ PA = PB

सभी

PS = $\frac{1}{2}$ AC चूंकि: P, AC का मध्य बिन्दु है।

अत : $PA = PB = \frac{1}{2} AC$

Ex.34 प्रदर्शित करो कि एक आयत की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर बनने वाला चतुर्भुज एक समचतुर्भुज होता है।

Sol. दिया है : एक आयत ABCD जिसमें P, Q, R तथा S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दु है। PQ, QR, RS तथा SP को मिलाया गया है।

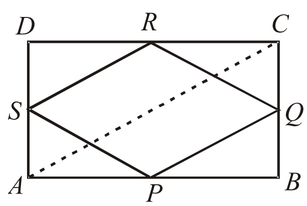
सिद्ध करना है : PQRS समचतुर्भुज है।

रचना : AC को मिलाया

प्रमाण : ΔABC में, P तथा Q क्रमशः AB तथा BC के मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ $PQ \parallel AC$ तथा $PQ = \frac{1}{2} AC$ .... (i)

Δ ADC में R तथा S क्रमश : भुजाओं CD तथा AD के मध्य बिन्दु है।



$\therefore$ $SR \parallel AC$ तथा $SR = \frac{1}{2} AC$ .... (ii)

(i) तथा (ii) से,

$PQ \parallel SR$ तथा $PQ = SR$ ....(iii)

$\Rightarrow$ PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब ABCD एक आयत है।

$\Rightarrow$ $AD = BC$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC$

$\Rightarrow$ $AS = BQ$ ....(iv)

त्रिभुजों APS तथा BPQ में

$AP = BP$ [$\therefore$ P, AB का मध्य बिन्दु है।]

$\angle PAS = \angle PBQ$ [प्रत्येक 90°]

तथा $AS = BQ$ [(iv) से]

अतः SAS सर्वांगसमता के परिणाम से

$\Delta APS \cong \Delta BPQ$

$PS = PQ$ ....(v)

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर]

(iii) तथा (v) से हम देखते हैं कि PQRS एक समान्तर चतुर्भुज इस प्रकार है कि PS = PQ अर्थात् दो आसन्न भुजाएँ बराबर है।

अतः PQRS एक समचतुर्भुज है।

याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. एक चतुर्भुज के कोणों का योग 360° है।

2. एक समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

3. एक समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते है।

4. एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

5. एक समान्तर चतुर्भुज में किन्ही दो आसन्न कोणों के समद्विभाजक समकोण पर प्रतिच्छेद करते है।

6. यदि एक समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण समान्तर चतुर्भुज के एक कोण को समद्विभाजित करता है तो यह दूसरे कोण को भी समद्विभाजित करेगा।

7. एक समान्तर चतुर्भुज के कोण समद्विभाजक एक आयत बनाते है।

8. एक चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज है यदि इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर है।

9. एक चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज है यदि इसके सम्मुख कोण बराबर हैं।

10. एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं यदि यह समान्तर चतुर्भुज है।

11. एक चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज है यदि इसकी सम्मुख भुजाओं का एक जोड़ा समान्तर तथा बराबर है।

12. यह आयत के चारों कोण समकोण होते हैं।

13. एक समचतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर लम्बाई की होती है।

14. एक आयत के विकर्ण बराबर लम्बाई के होते है।

15. एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण केवल तभी बराबर होते है यदि यह एक आयत है।

16. एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे के लम्बवत् होते है।

17. एक समान्तर चतुर्भज के विकर्ण लम्बवत् होते है यदि यह एक समचतुर्भुज है।

18. एक वर्ग के विकर्ण बराबर तथा एक दूसरे के लम्बवत् होते है।

19. यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर तथा समकोण पर प्रतिच्छेद करते है तब यह एक वर्ग है।

20. एक त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर तथा उसकी आधी होती है।

21. एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के समान्तर जाने वाली रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

22. एक चतुर्भुज के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाला चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज होता है।