पृष्ठीय क्षेत्रफल एंव आयतन

2
CHAPTER

CONTENTS (सूची)

- घनाभ
- घन
- बेलन
- शंकु
- गोला एवं अर्धगोला

➤ घनाभ

मानाकि लम्बाई (ℓ),चौड़ाई (b) तथा ऊँचाई (h) है।

पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(\ell b + bh + h\ell)$

आयतन = आधार क्षैत्रफल × h

जहाँ आधार क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

अतः आयतन = $\ell \times b \times h$

इसके विकर्ण की लम्बाई = $\sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$

इसकी भुजाओं की कुल लम्बाई = $4(\ell + b + h)$

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 एक घनाभ की लम्बाई, चौडाई व ऊँचाई में अनुपात 6 : 4 : 5 है। यदि घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 2368 cm^2 हो, तो इसकी विमाऐं ज्ञात कीजिए।

Sol. माना कि लम्बाई (ℓ) = 6x cm, चौड़ाई (b) = 4x cm तथा ऊँचाई (h) = 5x cm,

$\therefore$ कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(\ell \times b + b \times h \times h \times \ell)$

$= 2(6x \times 4x + 4x \times 5x + 5x \times 6x)cm^2$

$= 2(24x^2 + 20x^2 + 30x^2)\ cm^2$

$= 148x^2\ cm^2$

दिया है : कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2368 cm^2

$\Rightarrow 148x^2 = 2368$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{2368}{148} = 16$

तथा $x = \sqrt{16} = 4$

$\therefore$ लम्बाई = 6x cm = 6 × 4 cm = 24 cm,

चौडाई = 4x cm = 4 × 4 cm = 16 cm तथा

ऊँचाई = 5x cm = 5 × 4 cm = 20 cm

Ex.2 एक प्लास्टिक बॉक्स 1.5 m लम्बा, 1.25 m चौड़ा तथा 65 cm गहरा है, जो ऊपर से खुला हुआ है। यदि प्लास्टिक शीट की मोटाई नगण्य हो, तो बतलाइये

(i) बॉक्स को बनाने में कितना क्षेत्रफल शीट लगानी पड़ी

(ii) यदि शीट की कीमत 1 m^2 के ₹ 20 की दर से लगते हो, तो कुल कीमत ज्ञात करो

Sol. दी गई लम्बाई (ℓ) = 1.5 m, चौड़ाई (b) = 1.25 m एवं गहराई अर्थात् ऊँचाई (h) = 65 cm = 0.65 m.

(i) चूँकि बॉक्स ऊपर से खुला हुआ है इसकी पाँच फलकें है, जिनमें चार फलको से दीवारो का पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा एक फलक आधार है।

$\therefore$ बॉक्स को बनाने में लगने वाली शीट का क्षेत्रफल

= चारों दीवारो का क्षे० + आधार क्षे०

$= 2(\ell + b) \times h + \ell \times b$

$= 2(1.5m + 1.25m) \times 0.65m + 1.5m \times 1.25\ m$

$= 2 \times 2.75\ m \times 0.65\ m + 1.875\ m^2$

$= 3.575\ m^2 + 1.875\ m^2 = 5.45\ m^2$

(ii) चूंकि शीट का 1 m^2 का खर्चा ₹ 20 रूपये है।

$\therefore$ बॉक्स बनाने पर कुल खर्चा

= 5.45 × ₹ 20

$= ₹\ 109$

Ex.3 एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई, व ऊँचाई क्रमशः 5m, 4m व 3m है। तो दीवारों व छत पर सफेद पुताई कराने का खर्चा ज्ञात कीजिए। जबकि सफेद पुताई कराने की दर 7.50 रूपये प्रति वर्ग मी हो

Sol. दिया है $\ell = 5m, b = 4m$ एवं $h = 3m$

चूंकि कमरे की दीवारों का क्षेत्रफल

= इसकी चारों दीवारों के क्षेत्रफल $= 2(\ell + b) \times h$

एवं कमरे की छत का क्षेत्रफल $= \ell \times b$

$\therefore$ सफेद पुताई कराने योग्य कुल क्षेत्रफल

= दीवारों का क्षेत्रफल + छत का क्षेत्रफल

$= 2(\ell + b) \times h + \ell \times b.$

$= 2(5m + 4m) \times 3m + 5m \times 4m$

$= 2 \times 9m \times 3m + 20m^2$

$= 54m^2 + 20m^2 = 74m^2$

चूँकि, सफेद पुताई की दर

= ₹ 7.50 प्रति मीटर^2

$\therefore$ सफेद पुताई कराने का कुल खर्चा।

$= 74 \times ₹\,7.50 = ₹\ 555$

Ex.4 एक आयताकार हॉल का फर्श का परिमाप 250 m है। यदि हॉल की चार दीवारों पर पेन्ट कराने का खर्चा जो कि 10 रूपये प्रति वर्गमीटर की दर से परिकलन करने पर 15,000, रूपये आता है, तो हॉल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ?

Sol. हम जानते है कि आयत का परिमाप

= 2(लम्बाई + चौड़ाई) $= 2\ (\ell + b)$

एवं आयताकार हॉल के फर्श का परिमाप 250 m हैं

$\Rightarrow\ 2(\ell + b) = 250$ m

हॉल की चार दीवारो का क्षेत्रफल

= हॉल की चार दीवारी का क्षेत्रफल

$= 2(\ell + b) \times h = 250\ m \times hm = 250\ hm^2$

चूंकि चारों दीवारों पर पेन्ट कराने की दर 10 रूपये प्रति वर्ग मीटर है

$\therefore$ पेन्ट कराने का खर्चा

$250\ hm^2 = 250\ h \times ₹\,10$

दिये गये कथन के अनुसार

$250\ h \times ₹\ 10 = ₹\ 15{,}000$

$\Rightarrow\ h = \dfrac{15{,}000}{250 \times 10} m = 6$ m

$\therefore$ हॉल की ऊँचाई = 6 m

Ex.5 एक विशेष डिब्बे में उतना ही पेन्ट रखना पर्याप्त है जितना कि 9.375 m^2 क्षेत्रफल को पेन्ट करने में लगता है। तो माप 22.5 cm × 10 cm × 7.5 cm की कितनी ईट इस डिब्बे के पेन्ट से रंगी जाती है। **[NCERT]**

Sol. प्रत्येक ईट के लिए, $\ell = 22.5$ cm, $b = 10$ cm व $h = 7.5$ cm.

$\therefore$ प्रत्येक ईट का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\ (\ell \times b + b \times h + h \times \ell)$

$= 2\ (22.5 \times 10 + 10 \times 7.5 + 7.5 \times 22.5)cm^2$

$= 2\ (225 \times 75 + 168.75)\ cm^2 = 937.5\ cm^2$

चूंकि डिब्बे के उतना ही पेन्ट आता है जितना कि निम्न क्षेत्रफल को पेन्ट करना है।

$= 9.375\ m^2 = 9.375 \times 100 \times 100\ cm^2$

[$1\ m = 100$ cm तथा $1\ m^2 = 100 \times 100\ cm^2$]

$= 93750\ cm^2$

$\therefore$ पेन्ट की जा सकने वाली ईटो की संख्या

$= \dfrac{\text{कुल क्षेत्रफल जिसे पेन्ट करना है}}{\text{एक ईट का पृष्ठीय क्षेत्रफल}}$

$= \dfrac{93750\ cm^2}{937.5\ cm} = 100$

Ex.6 एक छोटा दरवाजे वाला ग्रीन हाउस पूर्णतया काँच के फलकों (आधार को मिलाकर) व टेप से मिलकर बना है। जो 30 cm लम्बा, 25 cm चौड़ा एवं 25 cm ऊँचा है। तब - **[NCERT]**

(i) काँच का क्षेत्रफल कितना है ?

(ii) सभी 12 किनारों के लिए कितने टेप की आवश्यकता है ?

Sol. चूँकि ग्रीन हाउस घनाभ के आकार का है, जिसमें $\ell = 30$ cm, $b = 25$ cm व $h = 25$ cm

(i) काँच का क्षेत्रफल

= घनीय ग्रीन हाउस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(\ell \times b + b \times h + h \times \ell)$

$= 2(30 \times 25 + 25 \times 25 + 25 \times 30)\ cm^2$

$= 2(750 + 625 + 750)cm^2 = 4250\ cm^2$

(ii) टेप की लम्बाई

= घनीय ग्रीन हाउस की 12 सिरों की लम्बाई

$= 4(\ell + b + h) = 4(30 + 25 + 25)\text{cm} = 320 \text{ cm}$

Ex.7 शान्ति मिठाई भंडार ने अपनी मिठाई पैकिंग हेतु दो प्रकार के डिब्बों का आदेश दिया है। बडे डिब्बे का आकार 25 cm × 20 cm × 5 cm एवं छोटे डिब्बे का आकार 15 cm × 12 cm × 5 cm है और इन सभी को लपेटने हेतु कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का 5% अतिरिक्त कार्डबोर्ड भी चाहिये। यदि कार्डबोर्ड की कीमत 4 रूपये प्रति 1000 cm^2 हो तो प्रत्येक प्रकार के 250 डिब्बे बनवाने हेतु कुल कितना खर्चा आएगा, ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

Sol. प्रत्येक बड़े डिब्बे के लिए :

$\ell = 25$ cm, $b = 20$ cm एवं $h = 5$ cm

$\therefore$ पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(\ell \times b + b \times h + h \times \ell)$

$= 2(25 \times 20 + 20 \times 5 + 5 \times 25)\text{cm}^2$

$= 2(500 + 100 + 125)\text{cm}^2 = 1450 \text{ cm}^2$

प्रत्येक छोटे डिब्बे के लिए :

$\ell = 15$ cm, $b = 12$ cm तथा $h = 5$ cm

$\therefore$ पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(\ell \times b + b \times h + h \times \ell)$

$= 2(15 \times 12 + 12 \times 5 + 5 \times 15)\text{cm}^2$

$= 2(180 + 60 + 75) \text{ cm}^2 = 630 \text{ cm}^2$

प्रत्येक प्रकार के 250 डिब्बों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 250 \times 1450 \text{ cm}^2 + 250 \times 630 \text{ cm}^2$

$= 362500 \text{ cm}^2 + 157500 \text{ cm}^2$

$= 520000 \text{ cm}^2$

लपेटने हेतु आवश्यक कार्डबोर्ड

$= 5\% \text{ of } 520000 \text{ cm}^2$

$= \frac{5}{100} \times 52000 cm^2 = 26000 \text{ cm}^2$

$\therefore$ कार्डबोर्ड का कुल क्षेत्रफल

$= 520000 \text{ cm}^2 + 26000 \text{ cm}^2 = 546000 \text{ cm}^2$

दिया है, कि 1000 cm^2 कार्डबोर्ड का खर्चा = ₹ 4

$\Rightarrow$ 1 cm^2 कार्डबोर्ड का खर्चा = ₹ $\frac{4}{1000}$

$\Rightarrow$ 546000 cm^2 कार्डबोर्ड का खर्चा

= ₹ $\frac{4}{1000} \times 546000$ = ₹ 2184

Ex.8 एक घनीय ठोस का आयतन 3240 cm^3 तो

(i) ऊँचाई ज्ञात करो यदि लम्बाई = 8 cm एवं चौड़ाई = 15cm

(ii) चौड़ाई ज्ञात करो यदि लम्बाई = 24 cm एवं ऊँचाई = 10cm

(iii) लम्बाई ज्ञात करो यदि चौड़ाई = 9 cm एवं ऊँचाई = 20 cm

Sol. आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$\Rightarrow$ (i) ऊँचाई $= \frac{\text{आयतन}}{\text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}}$

(ii) चौड़ाई $= \frac{\text{आयतन}}{\text{लम्बाई} \times \text{ऊँचाई}}$

(iii) लम्बाई $= \frac{\text{आयतन}}{\text{ऊँचाई} \times \text{चौडाई}}$

(i) ऊँचाई $= \frac{\text{आयतन}}{\text{लम्बाई} \times \text{चौडाई}}$

$= \frac{3240 \text{ cm}^3}{18 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}} = 12 \text{ cm}$

(ii) चौड़ाई $= \frac{\text{आयतन}}{\text{लम्बाई} \times \text{ऊँचाई}} = \frac{3240 \text{ cm}^3}{24 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}}$

$= 13.5$ cm

(iii) लम्बाई $= \frac{\text{आयतन}}{\text{ऊँचाई} \times \text{चौडाई}} = \frac{3240 \text{ cm}^3}{9 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}}$

$= 18$ cm

Ex.9 एक माचिस की डिब्बी की माप 6 cm × 4 cm × 2.5cm है तो ऐसी 24 डिब्बियों के पैकेट का आयतन कितना होगा ?

Sol. माचिस की डिब्बी का आकार घनाभ जैसा है।

$\therefore$ 1 माचिस की डिब्बी का आयतन

= लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= 6 \times 4 \times 2.5 \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^3$

$\Rightarrow$ ऐसी ही 24 माचिस की डिब्बियों का आयतन

= 24 माचिस की डिब्बियों का आयतन

$= 24 \times 60 \text{ cm}^3 = 1440 \text{ cm}^3$

Ex.10 एक घनाभ के आकार के पानी की टंकी 6 m लम्बी, 5 m चौड़ी व 4.5 m गहरी है तो इसमे कितना लीटर पानी भरा जा सकता है ? ($1 \text{ m}^2 = 1000\ \ell$)

Sol. टंकी में भरे जाने वाले पानी का आयतन

= टंकी का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= 6 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 4.5 \text{ m} = 135 \text{ m}^3$

$= 135 \times 1000\ \ell = 135000\ \ell$

Ex.11 10 m लम्बा, 7.5 m चौड़ा व 80 cm गहरा एक गड्ढा खोदने हेतु कितना खर्चा आयेगा यदि गड्ढा खोदने की दर 16 रूपये प्रति घन मीटर हो ?

Sol. दिया है

गड्ढे की लम्बाई = 10 m, चौड़ाई = 7.5 m एवं गहराई = 80 cm = 0.8 m

∴ घनाभीय गड्ढे का आयतन

= लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई (गहराई)

$= 10 \text{ m} \times 7.5 \text{ m} \times 0.8 \text{ m} = 60 \text{ m}^3$

गडढ़ा खोदने की दर = ₹ 16 प्रति घन मीटर

∴ खोदन पर खर्चा 60 × ₹ 16 = ₹ 960

Ex.12 लकड़ी के लट्ठे जिनमें प्रत्येक की माप $1.5 \text{ m} \times 1.25 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ है, इनको एक गोदाम में रखना है, तो उन लकड़ी के लट्ठों की अधिकतम संख्या जो निम्न माप के गोदामों में रखे जा सकते हो :

(i) $45 \text{ m} \times 25 \text{ m} \times 10\text{m}$.

(ii) $40 \text{ m} \times 25 \text{ m} \times 10\text{m}$

Sol. (i) चूँकि गोदाम की लम्बाई 45 m है तथा लट्ठे की लम्बाई 1.5 m है।

∴ गोदाम की लम्बाई के अनुरूप रखे जा सकने वाले लट्ठो की अधिकतम संख्या

$$= \frac{45\text{m}}{1.5\text{m}} = 30$$

इसी प्रकार से, गोदाम की चौड़ाई के अनुरूप रखे जा सकने वाले लट्ठो की अधिकतम संख्या

$$= \frac{25\text{m}}{1.25\text{m}} = 20$$

एवं इसी प्रकार से गोदाम की ऊँचाई के अनुरूप रखे जा सकने वाले लट्ठो की अधिकतम संख्या

$$= \frac{10\text{m}}{0.5\text{m}} = 20$$

∴ गोदाम में रखे जा सकने वाले लट्ठो की अधिकतम संख्या

$= 30 \times 20 \times 20 = 12000$

(ii) लम्बाई के अनुरूप लट्ठों की संख्या

$$= \frac{40\text{m}}{1.5\text{m}} = 26\frac{2}{3} = 26$$

[लट्ठों की संख्या भिन्न में नहीं हो सकती]

चौड़ाई के अनुरूप लट्ठो की संख्या

$$= \frac{25\text{m}}{1.25\text{m}} = 20$$

ऊँचाई के अनुरूप लट्ठों की संख्या

$$= \frac{10\text{m}}{0.5\text{m}} = 20$$

∴ गोदाम में रखे जा सकने वाल लट्ठों की संख्या

$= 26 \times 20 \times 20$

$= 10400$

Ex.13 एक घनाभ के आकार की पानी की टंकी क्षमता 50000 लीटर पानी रखने की है। यदि पानी की टंकी लम्बाई व गहराई क्रमशः 2.5 m व 10 m हो तो टंकी की चौडाई ज्ञात कीजिए।

Sol. घनाभ के आकार की पानी की टंकी की क्षमता 50000 लीटर है।

⇒ टंकी का आयतन = 50000 लीटर

$$= \frac{50000}{1000} \text{m}^3 \qquad [\because\ 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ लीटर}]$$

$= 50 \text{ m}^3$

⇒ टंकी की लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई $= 50 \text{ m}^3$

⇒ $2.5 \text{ m} \times$ चौड़ाई $\times 10 \text{ m} = 50 \text{ m}^3$

⇒ चौड़ाई $= \dfrac{50}{2.5 \times 10} \text{m} = 2\text{m}$

➤ घन

माना कि प्रत्येक भुजा की लम्बाई 'a' हो तब

पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6\ a^2$

आयतन $= a^3$

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\ a^2$

विकर्ण की लम्बाई $= a\sqrt{3}$

इसकी कोरों की कुल लम्बाई = 12 a

❖ उदाहरण ❖

Ex.14 यदि एक घन की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 8 cm हो, तो इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Sol. चूंकि घन की प्रत्येक भुजा (a) = 8 cm

$\therefore$ इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2 = 6 \times 8^2$ sq. cm

$= 6 \times 64 \text{ cm}^2 = 384 \text{ cm}^2$

पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4a^2 = 4 \times 8^2$ sq. cm

$= 4 \times 64 \text{ cm}^2 = 256 \text{ cm}^2$

Ex.15 एक घनाकार संदूक की प्रत्येक भुजा 10 cm है तथा अन्य दूसरे घनाभ के आकार के संदूक की लम्बाई 12.5 cm, चौड़ाई 10 cm एवं ऊँचाई 8 cm है। **[NCERT]**

(i) तो कौनसे संदूक का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिकतम है एवं कितना अधिक है ?

(ii) तो कौनसे संदूक का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम है तथा कितना कम है ?

Sol.(i) घनीय संदूक के लिए :

प्रत्येक भुजा = 10 cm अर्थात् a = 10 cm

$\therefore$ घनाकार संदूक का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 4a^2 = 4 \times 10^2 \text{ cm}^2 = 400 \text{ cm}^2$ संदूक के

घनाभ के आकर के लिए:

$\ell = 12.5$ cm, b = 10 cm & h = 8 cm

$\therefore$ घनाभ के आकार के संदूक के लिए पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(\ell + b) \times h$

$= 2(12.5 + 10) \times 8 \text{ cm}^2$

$= 2 \times 22.5 \times 8 \text{ cm}^2 = 360 \text{ cm}^2$

स्पष्टतः घनीय आकार के संदूक का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिकतम है, एवं दूसरे संदूक की तुलना में

$400 \text{ cm}^2 - 360 \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$ अधिक है

(ii) घनाकार संदूक का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 6a^2 = 6 \times 10^2$ sq. cm $= 600 \text{ cm}^2$

धनाकार के आकर के संदूक का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(\ell \times b + b \times h + h \times \ell)$

$= 2(12.5 \times 10 + 10 \times 8 + 8 \times 12.5) \text{ cm}^2$

$= 2(125 + 80 + 100) \text{ cm}^2 = 610 \text{ cm}^2$

स्पष्टः घनाकार संदूक का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$610 \text{ cm}^2 - 600 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$ कम है

Ex.16 एक ठोस घन की भुजा 12 cm हो, तो उसका आयतन ज्ञात कीजिए। यदि यह घन 8 समरूप घनों में काटा जाये तो निम्न की गणना कीजिए :

(i) प्रत्येक छोटे घन का आयतन

(ii) प्रत्येक छोटे घन की भुजा

(iii) प्रत्येक छोटे घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

Sol. चूंकि, दिये गये ठोस घन की भुजा = 12 cm.

$\therefore$ ठोस घन का आयतन = (भुजा)^3

$= (12 \text{ cm})^3 = 1728 \text{ cm}^3$

(i) चूंकि दिये गये घन को 8 समरूप घनों में काटा गया है

$\Rightarrow$ 8 छोटे घनों का आयतन

= दिये गये घन का आयतन $= 1728 \text{ cm}^3$

$\Rightarrow$ प्रत्येक छोटे घन का आयतन

$$= \frac{1728 \text{ cm}^3}{8} = 216 \text{ cm}^3$$

(ii) यदि प्रत्येक छोटे घन की भुजा = x cm

(भुजा)^3 = आयतन

$\Rightarrow x^3 = 216 = 6 \times 6 \times 6 = 6^3 \Rightarrow x = 6$ cm

$\therefore$ प्रत्येक छोटे घन की भुजा = 6 cm

(iii) प्रत्येक छोटे घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 6 \times$ (भुजा)^2

$= 6 \times (6 \text{ cm})^2 = 216 \text{ cm}^2$

Ex.17 एक नदी जो 3 m गहरी एवं 40 m चौड़ी है, 2 किमी/घंटा की दर से बह रही है। तो बतलाइये कि समुद्र में प्रतिमिनट कितना पानी गिर रहा है ? **[NCERT]**

Sol. उस पानी का आयतन जो नदी, झील या पाइप से इकाई समय में बह रहा है

= अनुपस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल × पानी की चाल

$x \text{ km/hr} = x \times \frac{5}{18} \text{ m/s}$.

कारण : $1 \text{ km/hr} = \frac{1000\text{m}}{60 \times 60 \text{ sec}} = \frac{5}{18} \text{ m/s}$

चूँकि नदी के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल

= इसकी गहराई × इसकी चौड़ाई

$= 3\text{m} \times 40\text{m} = 120 \text{ m}^2$

एवं नदी में बहते पानी की चाल

$= 2$ km/hr $= 2 \times \frac{5}{18}$ m / s $= \frac{5}{9}$ m / s

$\therefore$ 1 सैकण्ड में बहते पानी का आयतन

= अनुप्रस्थ प्रच्छिेद का क्षेत्रफल × पानी की चाल

$= 120 \times \frac{5}{9} m^3 = \frac{200}{3} m^3$

$\Rightarrow$ 1 मिनट (60 सैकण्ड) में बहते पानी का आयतन

$= \frac{200}{3} \times 60\ m^3$

$= 4000\ m^3$

$\Rightarrow$ समुद्र में एक मिनट में गिरते पानी का आयतन $= 4000\ m^3$

Ex.18 एक घन का आयतन, इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल से आंकिक रूप से बराबर है। तो इसकी भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Sol. माना कि प्रत्येक भुजा की लम्बाई α इकाई है

दिया है : घन का आयतन = घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल [अंकिक रूप से]

$\Rightarrow a^3 = 6a^2$

$\Rightarrow a = 6$

$\therefore$ घन की एक भुजा की लम्बाई = 6 cm

Ex.19 एक ठोस घनाभ का आधार वर्गाकार है एवं ऊँचाई 12 cm है। यदि इसका आयतन 768 cm^3 हो, तो निम्न की गणना कीजिए :

(i) इसके वर्गाकार आधार की भुजा

(ii) पृष्ठीय क्षेत्रफल

Sol.(i) मानकि वर्गाकार आधार की भुजा x cm है

अर्थात्, $\ell = b = x$ cm

$\ell \times b \times h =$ आयतन

$\Rightarrow x \times x \times 12 = 768$ [दी गई ऊँचाई = 12 cm]

$\Rightarrow x^2 = \frac{768}{12} = 64 \Rightarrow x = \sqrt{64}$ cm = 8 cm.

$\therefore$ वर्गाकार आधार की भुजा = 8 cm

(ii) अब, $\ell = 8$ cm, b = 8 cm एवं h = 12 cm

$\therefore$ पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell \times b + b \times h + h \times \ell)$

$= 2(8 \times 8 + 8 \times 12 + 12 \times 8)\ cm^2 = 512\ cm^2$

➤ लम्ब वृत्तीय बेलन

माना कि आधार की त्रिज्या = r एवं ऊँचाई = h

वक्र वृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h + r)$

आयतन $= \pi r^2 h$ जहाँ, $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14

❖ उदाहरण ❖

Ex.20 एक वृत्तीय कुँऐ का आन्तरिक व्यास 2 m है तथा इसकी गहराई 10.5 m है, तो

(i) कुँऐ का आन्तरिक वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ii) इस वक्र पृष्ठ क्षेत्र में 35 रूपये प्रति वर्गमीटर की दर से प्लास्टर करने का खर्चा ज्ञात कीजिए।

Sol. दिया है : त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times 2$ m = 1m अर्थात्, r = 1 m

एवं गहराई = 10.5 m अर्थात् h = 10.5 m

(i) कुँऐं का आन्तरिक वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 1 \times 10.5\ m^2 = 66\ m^2$

(ii) प्लास्टर कराने का खर्चा

= प्लास्टर योग्य क्षेत्रफल × दर

= 66 × ₹ 35 = ₹ 2,310

Ex.21 पानी गरम करने की एक मशीन में एक बेलनाकार पाइप लगा हुआ है। जिसकी लम्बाई 28 m है तथा व्यास 5 cm है, तो इस मशीन में कुल विकिर्णित पृष्ठ ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

Sol. दिया है : बेलनाकार पाइप की लम्बाई = 28 m

अर्थात्, h = 2800 cm एवं

इसकी त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times$ व्यास $= \frac{1}{2} \times 5$ cm = 2.5 cm.

$\therefore$ मशीन में कुल विकिर्णित पृष्ठ

= पाइप का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 2.5 \times 2800\ cm^2 = 44000\ cm^2$

प्रश्न से यह स्पष्ट नहीं होता कि कैसा बेलनाकार पाईप प्रयोग में लिया है। मशीन का विकिर्णन पृष्ठ

= पाइप का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r (r + h) = 2 \times \frac{22}{7} \times 2.5\ (2.5 + 2800)\ cm^2$

$= 44039.29\ cm^2$

Ex.22 ज्ञात कीजिए :

(i) एक बेलनाकार पेट्रोल स्टोरेज टेंकर का पार्श्व या वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 4.2 m तथा ऊँचाई 4.5 m है

(ii) कितना स्टील वास्तव में काम में आता है। यदि बंद टेंकर को बनाते समय $\frac{1}{12}$ भाग खराब हो जाती है ? **[NCERT]**

Sol.(i) दिया है : $r = \frac{4.2}{2} m = 2.1\ m$ एवं $h = 4.5\ m$

$\therefore$ टेंकर का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 4.5\ m^2 = 59.4\ m^2$

(ii) माना कि वास्तव में प्रयुक्त स्टील $x\ m^2$ है।

सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r (h + r) = 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1\ (4.5 + 2.1)$

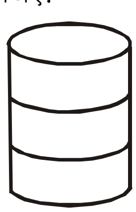
$= 87.12$

$\therefore\ x - \frac{1}{12}x = 87.12 \Rightarrow \frac{11}{12}x = 87.12$

$\Rightarrow x = 87.12 \times \frac{12}{11} = 95.04\ m^2$

$\therefore$ स्टील का वास्तव में प्रयुक्त क्षेत्रफल $= 95.04\ m^2$

Ex.23 एक प्रकाशीय फेम चित्रानुसार दर्शाई गई है, जिसे एक चमकदार कपड़े से ढ़का गया है। इस फ्रेम के आधार का व्यास 20 cm तथा ऊँचाई 30 cm है। इसको मोड़ने हेतु फ्रेम के ऊपरी तले व निचले तले के मध्य 2.5 cm का मार्जिन रखा है। तो प्रकाशीय फ्रेम को ढकने हेतु कितने कपड़े की आवश्यकता होगी, ज्ञात कीजिए? **[NCERT]**



Sol. दिया है : प्रकाशीय फ्रेम की ऊँचाई = 30 cm.

$\because$ इसे मोड़ने हेतु ऊपरी व निचले तले में 2.5 cm का मार्जिन है। बेलनाकार रूप में प्रयुक्त कपड़े की ऊँचाई $= (30 + 2.5 + 2.5)\ cm = 35\ cm$

$\therefore$ कपड़े के लिए जो बेलनाकार रूप में है जिसकी ऊँचाई 35cm तथा त्रिज्या $\frac{20}{2} cm = 10\ cm.$

अर्थात् $h = 35\ cm$ एवं $r = 10\ cm$

$\therefore$ प्रकाशीय फ्रेम को ढकने हेतु अभीष्ठ कपड़े का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 35\ cm^2$

$= 2200\ cm^2$

Ex.24 एक बेलन के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में अनुपात 5 : 3 हो, तो इसकी ऊँचाई व व्यास के मध्य अनुपात ज्ञात कीजिए -

Sol. अभीष्ट अनुपात $= \frac{\text{ऊँचाई}}{\text{व्यास}} = \frac{h}{d} = \frac{h}{2r}$

दिये गये कथन के अनुसार :

$\frac{2\pi r(h + r)}{2\pi rh} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{h + r}{h} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow 5h = 3h + 3r$

अर्थात्, $2h = 3r \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{3}{2}$

तथा $\frac{h}{2r} = \frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{4} = 3 : 4$

Ex.25 एक तरल पेय दो विभिन्न आकार के दो पैक में उपलब्ध है : **[NCERT]**

(i) एक टिन के डिब्बे जिसका आधार आयताकार है एवं जिसकी लम्बाई 5 cm व चौड़ाई 4 cm एवं ऊँचाई 15 cm है, तथा

(ii) एक बेलनाकार प्लास्टिक डिब्बा जिसका वृत्तीय आधार का व्यास 7 cm व ऊँचाई 10 cm है ?

Sol.(i) टिन के डिब्बे में तरल पेय का आयतन

= टिन के डिब्बे का आयतन

= इसकी लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= 5\ cm \times 4\ cm \times 15\ cm = 300\ cm^3$

(ii) बेलनाकार प्लास्टिक डिब्बे में तरल पेय का आयतन

$= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 10\ cm$

$[\because r = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{7}{2} \text{ cm}]$

$= 385 \text{ cm}^3$

स्पष्टत:, प्लास्टिक डिब्बे की क्षमता सर्वाधिक है एवं तुलनात्मक रूप से $385 \text{ cm}^3 - 300 \text{ cm}^3 = 85 \text{ cm}^3$ अधिक है।

Ex.26 एक बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि 132 cm है तथा इसकी ऊँचाई 25 cm है तो इसमें कितने लीटर पानी भरा जा सकता है? ($1000\text{cm}^3 = 1\ell$)

Sol. माना बेलनाकार बर्तन के आधार की त्रिज्या r cm है

$\therefore\ 2\pi r = 132 \qquad [\because \text{परिधि} = 2\pi r]$

$\Rightarrow\ 2 \times \frac{22}{7} \times r = 132$

$\Rightarrow\ r = \frac{132 \times 7}{2 \times 22} \text{cm} = 21 \text{ cm}$

अब त्रिज्या (r) = 21 cm तथा ऊँचाई (h) = 25 cm

$\Rightarrow$ बेलनाकार बर्तन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 25 \text{ cm}^2$

$= 34560 \text{ cm}^3$

$\therefore$ बर्तन में भरे जा सकने वाले पानी का आयतन

= बर्तन का आयतन $= 34560 \text{ cm}^3$

$= \frac{34560}{1000} \ell \qquad [\because 1000 \text{ cm}^3 = 1\ell]$

$= 34.650\ \ell$

Ex.27 एक अस्पताल में प्रतिदिन मरीजों को तरल पदार्थ (सूप) एक बेलनाकार कटोरी जिसका व्यास 7 cm है, में दिया जाता है। यदि कटोरी में सूप को 4 cm ऊँचाई तक भरा जाता हो तो बतलाइये कि 250 मरीजों का प्रतिदिन अस्पताल में कितना सूप बनता है? **[NCERT]**

Sol. बेलनाकार कटोरी की त्रिज्या $= \frac{7}{2}$ cm अर्थात्, $r = \frac{7}{2}$ cm

एवं कटोरी में भरे गये सूप की ऊँचाई h = 4 cm

$\therefore$ 1 मरीज को दिया जाने वाला सूप का आयतन

$= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 4 \text{ cm}^3 = 154 \text{ cm}^3.$

$\Rightarrow$ 250 मरीजों हेतु दिया जाने वाले सूप का आयतन

$= 250 \times 154 \text{ cm}^3 = 38500 \text{ cm}^3$

Ex.28 यदि एक बेलन का पार्श्व पृष्ठ 94.2 cm^2 हो एवं इसकी ऊँचाई 5 cm, हो, तो ज्ञात कीजिए :

(i) इसके आधार की त्रिज्या

(ii) इसका आयतन ($\pi = 3.14$ लें)

Sol. दिया है $2\pi rh = 94.2 \text{ cm}^2$ एवं h = 5 cm

(i) $2\pi rh = 94.2 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow\ 2 \times 3.14 \times r \times 5 = 94.2$

$\Rightarrow\ r = \frac{94.2}{2 \times 3.14 \times 5} \text{cm} = 3 \text{ cm}$

(ii) बेलनाकार प्लास्टिक डिब्बे में तरल पेय का आयतन

$= \pi r^2 h$

$= 3.14 \times 3 \times 3 \times 5 \text{ cm}^2 = 141.3 \text{ cm}^3$

➤ खोखला बेलन

माना कि बाह्य त्रिज्या = R, अन्तः त्रिज्या = r, ऊँचाई = h. तब

बाह्य वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi Rh$

अन्तः वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $= \pi R^2 - \pi r^2$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi (R^2 - r^2)$

आयतन $= \pi(R^2 - r^2)h$

❖ उदाहरण ❖

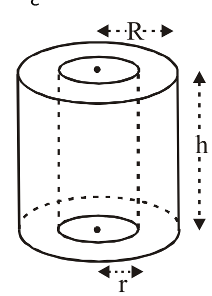
Ex.29 एक खोखले बेलन की लम्बाई (ऊँचाई) 35 cm है तथा इसके अन्तः व्यास व बाह्य व्यास क्रमशः 8 cm व 8.8 cm है, तो निम्न की गणना कीजिए :

(i) बाह्य वक्र का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) अन्तः वक्र का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) अनुप्रस्थ-काट का क्षेत्रफल

(iv) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल



Sol. बेलन की ऊँचाई h = 35 cm

अन्तः त्रिज्या $r = \frac{8}{2} \text{cm} = 4 \text{ cm}$

बाह्य त्रिज्या $R = \frac{8.8}{2}$ cm = 4.4 cm

(i) बाह्य वक्र का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi Rh$

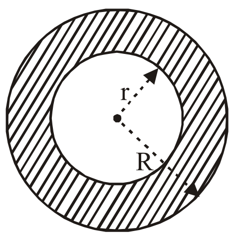
$= 2 \times \frac{22}{7} \times 4.4 \times 35 cm^2 = 968\ cm^2$

(ii) अन्तः वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 4 \times 35 cm^2$

$= 880\ cm^2$

(iii) खोखले बेलन का अनुप्रस्थ-काट उस वलय के समान है, जिसकी बाह्य त्रिज्या R = 4.4 cm एवं अन्तः त्रिज्या r = 4 cm हो



$\therefore$ अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = $\pi R^2 - \pi r^2$

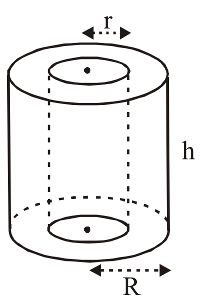
$= \pi(R^2 - r^2) = \frac{22}{7}(4.4^2 - 4^2)\, cm^2$

$= \frac{22}{7}(4.4 + 4)(4.4 - 4)\, cm^2$

$= \frac{22}{7} \times 8.4 \times 0.4\, cm^2$

$= 10.56\ cm^2$

Ex.30 एक खोखले बेलनाकार पाइप जिसकी लम्बाई 50 cm बाह्य व्यास 12 cm एवं अन्तः व्यास 9 cm है, का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



Sol. दिया है : ऊँचाई (h) = 50 cm,

बाह्य त्रिज्या (R) = 6 cm एवं अन्तः त्रिजया (r) = 4.5 cm

$\because$ खोखले बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बाह्य वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + अन्तः वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

$= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi (R^2 - r^2)$

$= 2\pi (R + r)h + 2\pi(R + r)(R - r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (6 + 4.5) \times 50$

$+ 2 \times \frac{22}{7} \times (6 + 4.5)(6 - 4.5)\ cm^2$

$= \frac{44}{7} \times 10.5 \times 50 + \frac{44}{7} \times 10.5 \times 1.5 cm^2$

$= 3300\ cm^2 + 99\ cm^2 = 3399\ cm^2$

Ex.31 एक बेलनाकार लकड़ी के पाइप का अन्तः व्यास 24 cm हो एवं इसका बाह्य व्यास 28 cm हो तथा पाइप की लम्बाई 35 cm हो, तो पाइप का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि 1 cm^3 लकड़ी का द्रव्यमान 0.6 g हो

Sol. चूँकि अन्तः व्यास = 24 cm

$\Rightarrow$ अन्तः त्रिज्या (r) = $\frac{24}{2}$ cm = 12 cm

चूंकि बाह्य व्यास = 28 cm

$\Rightarrow$ बाह्य त्रिज्या (R) = $\frac{28}{2}$ cm = 14 cm

एवं दी गई ऊँचाई (h) = 35 cm

$\therefore$ पाइप की लकड़ी का आयतन = $\pi(R^2 - r^2)h$

$= \frac{22}{7}(14^2 - 12^2) \times 35\ cm^3 = 5720\ cm^3$

चूँकि 1 cm^3 लकड़ी का द्रव्यमान = 0.6 gm

$\Rightarrow$ 5720 cm^3 लकड़ी का द्रव्यमान = 0.6 × 5720 gm

$\therefore$ पाइप का द्रव्यमान = लकड़ी का द्रव्यमान

= 3432 gm = 3.432 kg

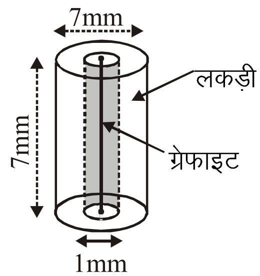
Ex.32 एक लीड पेन्सिल लकड़ी के एक बेलनाकार ठोस बेलनाकार ग्रेफाइट भर कर बनाई गई है। पेन्सिल का व्यास 7 mm है तथा ग्रेफाइट का व्यास 1 mm है। यदि पेन्सिल की लम्बाई 14 cm हो, तो लकड़ी का आयतन तथा ग्रेफाइट का आयतन ज्ञात कीजिए।

Sol. स्पष्टतः लकड़ी के भाग हेतु जो खोखले बेलन के रूप में है :

बाह्य त्रिज्या (R) = $\frac{7}{2}$ mm = 3.5 mm = 0.35 cm

अन्तः त्रिज्या (r) = $\frac{1}{2}$ mm = 0.5 mm = 0.05 cm

एवं ऊँचाई (लम्बाई) = 14 cm.



$\therefore$ लकड़ी का आयतन $= \pi(R^2 - r^2)h$

$= \frac{22}{7} \times [(0.35)^2 - (0.05)^2] \times 14 \text{ cm}^3$

$= \frac{22}{7} \times 0.12 \times 14 \text{ cm}^3 = 5.28 \text{ cm}^3$

एवं ग्रेफाइट का आयतन $= \pi r^2h$

$= \frac{22}{7} \times (0.05)^2 \times 14 \text{ cm}^3 = 0.11 \text{ cm}^3$

Ex.33 एक खोखले बेलन की अन्तः त्रिज्या 8 cm है तथा इसकी दीवारों की मोटाई 2 cm है, यदि इसकी लम्बाई 42 cm है। तो बेलन में लगे पदार्थ का आयतन ज्ञात कीजिए।

Sol. चूंकि, अन्तः त्रिज्या = 8 cm $\Rightarrow r = 8$ cm,

बेलन की दीवार की मोटाई = 2 cm.

$\therefore$ इसकी बाह्य त्रिज्या = 8 cm + 2 cm = 10 cm

अर्थात्, R = 10 cm.

एवं बेलन की लम्बाई (ऊँचाई) = 42 cm

अर्थात्, h = 42 cm.

$\therefore$ खोखले बेलन में प्रयुक्त पदार्थ का आयतन

$= \pi(R^2 - r^2)h = \frac{22}{7}[(10)^2 - (8)^2] \times 42 \text{ cm}^3$

$= \frac{22}{7} \times 36 \times 42 \text{ cm}^3 = 4752 \text{ cm}^3$

Ex.34 दो लम्ब-वृत्तीय बेलनों की त्रिज्याओं में अनुपात 3 : 4 है, तथा उनकी ऊँचाईयों में अनुपात 6 : 5 है, तो उनके वक्रीय (पार्श्व) पृष्ठ क्षेत्रफलों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol. यदि दो बेलनों की त्रिज्याऐं r_1 व r_2, हो,

तब $r_1 = 3x$ एवं $r_2 = 4x$ इसी तरह से; यदि दो बेलनो की ऊँचाइयाँ h_1 व h_2 हो, माना $h_1 = 6y$ एवं $h_2 = 5y$

तब उनके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में अनुपात

$= \frac{2\pi r_1 h_1}{2\pi r_2 h_2} = \frac{2\pi \times 3x \times 6y}{2\pi \times 4x \times 5y} = \frac{9}{10} = 9 : 10$

➤ लम्ब वृत्तीय शंकु

मानाकि ℓ, h व r एक शंकु की क्रमशः तिर्यक ऊँचाई, ऊँचाई एंव त्रिज्या हो, तब

$\ell^2 = h^2 + r^2$

आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वक्रीय (पार्श्व) पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r\ell$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(\ell + r)$

आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

❖ उदाहरण ❖

Ex.35 एक शंकु की ऊँचाई 48 cm है तथा इसके आधार की त्रिज्या 36 cm है, तो शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लें)

Sol. दिया है : h = 48 cm एवं r = 36 cm.

$\therefore \ell^2 = h^2 + r^2$

$\Rightarrow \ell^2 = 48^2 + 36^2 = 2304 + 1296 = 3600$

$\Rightarrow \ell = \sqrt{3600}$ cm = 60 cm

$\therefore$ वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r\ell$

$= 3.14 \times 36 \times 60 \text{ cm}^2 = 6782.4 \text{ cm}^2$

एवं शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi r\ell + \pi r^2 = \pi r(\ell + r)$

$= 3.14 \times 36 \times (60 + 36)\text{cm}^2$

$= 10851.84 \text{ cm}^2$

Ex.36 एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 2200 cm^2 हो, तथा इसकी तिर्यक ऊँचाई 50 cm हो तो निम्न की गणना कीजिए :

(i) आधार की त्रिज्या

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) शंकु की ऊँचाई

Sol. (i) दिया है: $\pi r\ell = 2200 \text{ cm}^2$ तथा $\ell = 50$ cm

$\Rightarrow \frac{22}{7} \times r \times 50 = 2200$

i.e., $r = \frac{2200 \times 7}{22 \times 50}$ cm = 14 cm

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r\ell(\ell + r)$

$= \frac{22}{7} cm \times 14 \times (50 + 14)\ cm^2$

$= 2816\ cm^2$

(iii) $\ell^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - r^2$

$= 50^2 - 14^2 = 2500 - 196 = 2304$

$\therefore\ h = \sqrt{2304}\ cm = 48\ cm$

Ex.37 एक शंकु आकार के टेन्ट (तम्बू) की ऊँचाई 10 m व इसके आधार की त्रिज्या 24 m हो, तब निम्न की गणना कीजिए। **[NCERT]**

(i) टेन्ट (तम्बू) की तिर्यक ऊँचाई

(ii) टेन्ट (तम्बू) बनाने में लगे केनवास का कुल मूल्य ज्ञात करो जबकि 1 m^2 केनवास की कीमत 70 रूपये है।

Sol. (i) दिया है : $h = 10$ m एवं $r = 24$ m

$\therefore\ \ell^2 = h^2 + r^2$

$\Rightarrow\ \ell^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676$

$\Rightarrow\ \ell = \sqrt{676}\ m = 26\ m$

(ii) आवश्यक केनवास का क्षेत्रफल

= टेन्ट (तम्बू) का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

$= \pi r \ell = \frac{22}{7} \times 24 \times 26 m = \frac{13728}{7} m^2$

$\because$ 1 m^2 केनवास की कीमत 70 रूपये है

$\therefore$ केनवास पर कुल खर्चा

$= \frac{13728}{7} \times Rs.70 =$ ₹ 1,37,280

Ex.38 एक शंक्वाकार तम्बू जिसकी ऊँचाई 8 m व आधार की त्रिज्या 6m है, को बनाने में 3 m चौड़े कितने लम्बे तिरपाल की आवश्यकता होगी ? मानलो कि कपड़े (तिरपाल) की अतिरिक्त लम्बाई जो सिलाई करने व काटने पर खराब होती है, लगभग 20 cm ($\pi = 3.14$ लें) है। **[NCERT]**

Sol. तम्बू के लिए: $h = 8$ m एवं $r = 6$ m

$\ell^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 8^2 + 6^2$

$= 64 + 36 = 100$ एवं $\ell = \sqrt{100}\ m = 10m$

तम्बू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r \ell$

$= 3.14 \times 6 \times 10\ m^2 = 188.4\ m^2$

$\Rightarrow$ प्रयुक्त तिरपाल का क्षेत्रफल $= 188.4\ m^2$

$\Rightarrow$ तरपाल की लम्बाई $\times$ चौडाई $= 188.4\ m^2$

$\Rightarrow$ तिरपाल की लम्बाई $\times 3\ m = 188.4\ m^2$

$\Rightarrow$ तिरपाल की लम्बाई $= \frac{188.4}{3} m = 62.8m$

$\because$ तिरपाल की अतिरिक्त लम्बाई जिसकी जरूरत है

$= 20\ cm = 0.2\ m$

$\therefore$ तिरपाल की कुल लम्बाई

$= 62.8\ m + 0.2\ m = 63\ m$

Ex.39 एक बस अड्डे की शेष सड़क पर 50 खोखले शंकु जो पुर्ननिर्मित (recycled) कोर्ड बोर्ड से बने है, लगाये जाते है। प्रत्येक शंकु के आधार का व्यास 1 m है तथा उसकी ऊँचाई 12 per m^2 है । यदि प्रत्येक शंकु के बाहरी तरफ को ही रंग कराना हो, तो इन सभी शंकुओं पर रंग कराने का खर्चा ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ तथा $\sqrt{1.04} = 1.02$ लें)

[NCERT]

Sol. प्रत्येक शंकु के लिए

$r = \frac{40}{2}$ cm = 20 cm = 0.2 m एवं h = 1 m

$\therefore\ \ell^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = (1)^2 + (0.2)^2$

$= 1 + 0.04 = 1.04$

$\Rightarrow\ \ell = \sqrt{1.04}\ m = 1.02\ m$

प्रत्येक शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r \ell$

$= 3.14 \times 0.2 \times 1.02\ m^2 = 0.64056\ m^2$

$\Rightarrow$ 50 शकुओं का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 50 \times 0.64056\ m^2$

$= 30.028\ m^2 =$ रंग कराने हेतु क्षेत्रफल

$\because$ रंग 12 ₹ प्रति वर्ग मी की दर से कराना है

$\therefore$ 50 शंकुओं के बाहरी तरफ रंग कराने का खर्चा

$= 30.028 \times$ ₹ 12 = ₹ 384.34

Ex.40 एक शंकु की त्रिज्या एवं तिर्यक ऊँचाई में अनुपात 3 : 5 है। यदि इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 2310 cm^2 हो, तो इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Sol. दिया है : $r : \ell = 3 : 5$

$\Rightarrow$ यदि $r = 3x$ cm, $\ell = 5x$ cm

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r \ell \Rightarrow \frac{22}{7} \times 3x \times 5x = 2310$

$\Rightarrow\ x^2 = \frac{2310 \times 7}{22 \times 3 \times 5} = 49 \Rightarrow\ x = 7$

$\therefore \quad r = 3x = 3 \times 7 \text{ cm} = 21 \text{ cm}$

एवं $\ell = 5x = 5 \times 7 \text{ cm} = 35 \text{ cm}$,

$\ell^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = 35^2 - 21^2 = 1225 - 441 = 784$

$\therefore$ ऊँचाई (h) = $\sqrt{784}\text{cm} = 28 \text{ cm}$

Ex.41 एक सर्कस का तम्बू बेलनाकार रूप में है, जिसकी ऊँचाई 8 m है तथा जो समान त्रिज्या 28 m के एक शंकु से घिरा हुआ है। यदि तम्बू की कुल ऊँचाई 13 m हो, तो निम्न की गणना कीजिए।

(i) तम्बू का कुल अन्तः वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) इसके अन्तःपृष्ठ को 3.50 प्रति वर्ग मीटर की दर से पेन्ट कराने का खर्चा

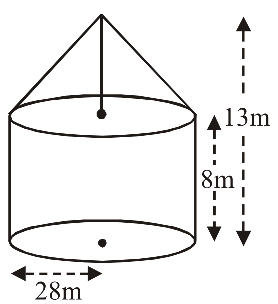
Sol. दिये गये कथन के अनुसार, सर्कस का तम्बू निम्न चित्रानुसार होगा:

(i) बेलनाकार भाग के लिए :

r = 28 एवं h = 8 m

$\therefore$ वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 28 \times 8 \text{ m}^2 = 1408 \text{ m}^2$



घनाकार भाग के लिए :

r = 28 m तथा h = 13 m – 8 m = 5 m

$\therefore \quad \ell^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 5^2 + 28^2 = 809$

$\Rightarrow \quad \ell = \sqrt{809} \text{ m} = 28.4 \text{ m}$

$\therefore$ वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r\ell$

$= \frac{22}{7} \times 28 \times 28.4 \text{ m}^2 = 2499.2 \text{ m}^2$

$\therefore$तम्बू का कुल अन्तः वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलनाकार भाग का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल + घनाकार भाग का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

$1408 \text{ m}^2 + 2499.2 \text{ m}^2 = 3907.2 \text{ m}^2$

(ii) अन्तः पृष्ठ को पेन्ट करने का खर्चा

= 3907.2 × ₹ 3.50 = ₹ 13675.20

Ex.42 एक शंकु की ऊँचाई 30 cm है तथा इसका आयतन 3140 cm^3 है, मानलो $\pi = 3.14$ तो निम्न की गणना कीजिए।

(i) आधार की त्रिज्या (ii) आधार का क्षेत्रफल

Sol. (i) दिया है : h = 30 cm एवं आयतन = 3140 cm^3

आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\Rightarrow \quad 3140 = \frac{1}{3} \times 3.14 \times r^2 \times 30$

$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{3140 \times 3}{3.14 \times 30} = 100$ एवं r = 10cm

(ii) आधार का क्षेत्रफल = πr^2

$= 3.14 \times 10^2 \text{ cm}^2 = 314 \text{ cm}^2$

विकल्पत :

$\frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = आयतन

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × 30 = 3140

$\Rightarrow$ आधार का क्षेत्रफल = $\frac{3140 \times 3}{30} \text{cm}^2$

$= 314 \text{ cm}^2$

Ex.43 एक समकोण त्रिभुज ABC की भुजाऐं 5 cm, 12 cm एवं 13 cm हो, तो **[NCERT]**

(i) ΔABC को भुजा 12 cm के सापेक्ष घुमाने पर बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

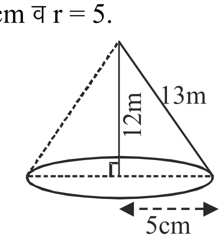
(ii) ΔABC को भुजा 5 cm के सापेक्ष घुमाने पर बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

(iii) पद (i) व पद (ii) में बने ठोसों के आयतन के मध्य अन्तर की गणना कीजिए।

Sol. $\because 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ 13 cm भुजा के सम्मुख कोण समकोण है

(i) जब Δ को भुजा 12 cm के सापेक्ष घुमाने पर शंकु निर्मित होता है:

h = 12 cm व r = 5.



$\therefore$ ठोस का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 12 \text{ cm}^3$

$= 314.29 \text{ cm}^3$

(ii) जब Δ को भुजा 5 cm के सापेक्ष घुमाया जाता है, तो बनी आकृति घनाकार है :

$h = 5$ cm, व $r = 12$ cm.

$\therefore$ ठोस का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12 \times 12 \times 5 \text{ cm}^3$

$= 754.29 \text{ cm}^3$

(iii) अभीष्ठ अन्तर

$= 754.29 \text{ cm}^3 - 314.29 \text{ cm}^3$

$= 440 \text{ cm}^3$

Ex.44 एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 9856 cm^3 है। यदि आधार का व्यास 28 cm हो, तो निम्न की गणना कीजिए।

(i) शंकु की ऊँचाई

(ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई

(iii) शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

Sol. दिया है : शंकु का आयतन $= 9856 \text{ cm}^3$

एवं त्रिज्या (r) $= \frac{28}{2}$ cm $= 14$cm

(i) आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 9856$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{2} \times 14 \times 14 \times h$

$\Rightarrow \quad h = \frac{9856 \times 3 \times 7}{22 \times 14 \times 14}$ cm $= 48$ cm

(ii) $\ell^2 = h^2 + r^2 \quad \Rightarrow \ell^2 = 48^2 + 14^2$

$= 2304 + 196 = 2500$

$\Rightarrow \ell = \sqrt{2500}$ cm $= 50$ cm

$\therefore$ तिर्यक ऊँचाई $= 50$ cm

(iii) वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r \ell$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 50 \text{ cm}^2 = 2200 \text{ cm}^2$

Ex.45 गेंहू का ढेर (heap) शंकु के आकार में है, जिसका व्यास 10.5 m है तथा ऊँचाई 3 m है, तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए। यदि गेंहू के इस ढेर को बारिश से बचाने हेतू केनवास से इसे ढका जाता हो, तो आवश्यक केनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Sol. शंकु आकार के ढेर हेतु :

त्रिज्या (r) $= \frac{10.5}{2}$ m $= 5.25$ m

एवं ऊँचाई (h) = 3m

$\therefore$ आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 3 \text{ m}^3 = 86.625 \text{ m}^3$

अब, $\ell^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = (3)^2 + (5.25)^2$

$= 9 + 27.5625 = 36.5625$

$\Rightarrow \ell = \sqrt{36.5625}$ m $= 6.047$ m

$\therefore$ आवश्यक केनवास का क्षेत्रफल

= घनाकार ढेर का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi r \ell = \frac{22}{7} \times 5.25 \times 6.047 \text{m}^2$

$= 99.7755 \text{ m}^2$

Ex.46 एक बेलन व एक शंकु के आधार का क्षेत्रफल समान है, परन्तु बेलन का आयतन, शंकु के आयतन का दुगुना है। तो उनकी ऊँचाईयों के मध्य अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol. चूंकि बेलन व शंकु के आधार का क्षेत्रफल एक समान है।

$\Rightarrow$ उनकी त्रिज्या समान है (एक समान)

माना कि उनके आधार की त्रिज्या r है तथा उनकी ऊँचाइयाँ क्रमशः h_1 व h_2 है।

स्पष्टतः, बेलन का आयतन $= \pi r^2 h_1$

एवं शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$

दिया है :

बेलन का आयतन $= 2 \times$ शंकु का आयतन

$\Rightarrow \pi r^2 h_1 = 2 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$

$\Rightarrow \; h_1 = \frac{2}{3} h_2$

$\Rightarrow \; \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3}$

अर्थात् $h_1 : h_2 = 2 : 3$

➤ गोला एवं अर्धगोला

मानाकि गोले की त्रिज्या = r

पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

अर्धगोले का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

अर्धगोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$.

❖ उदाहरण ❖

Ex.47 उस अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिनकी त्रिज्या 20 cm है। ($\pi = 3.14$ लें)

Sol. अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 3\pi r^2$

$= 3 \times 3.14 \times (20)^2$ cm^2 [दिया है : r = 20 cm]

$= 3768$ cm^2

Ex.48 एक अर्धगोले का सपाट पृष्ठ का क्षेत्रफल 154 cm^2 है, तो इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Sol. दिया है : $\pi r^2 = 154 \Rightarrow \frac{22}{7} r^2 = 154$

$\Rightarrow r^2 = 154 \times \frac{7}{22} = 49 \Rightarrow r = 7$ cm

$\therefore$ इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$

$= 3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\text{cm}^2 = 462\,\text{cm}^2$

वैकल्पिक विधि :

अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$

$= 3 \times 154$ cm^2 [दिया है : $\pi r^2 = 154$]

$= 462$ cm^2

Ex.49 एक गोलीय गुब्बारे की त्रिज्या 10 cm से 15 cm बढ़ती है, जबकि इसमें पम्प से हवा भरी जा रही है, तो दोनों स्थितियों में गुब्बारे का पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol. अभीष्ठ अनुपात

$= \frac{\text{प्रथम स्थिति में गुब्बारे का पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{\text{द्वितीय स्थिति में गुब्बारे का पृष्ठीय क्षेत्रफल}}$

$= \frac{\text{प्रथम स्थिति में } 4\pi r^2}{\text{दूसरी स्थिति में } 4\pi r^2} = \frac{4 \times \pi \times 10 \times 10}{4 \times \pi \times 15 \times 15} = \frac{4}{9}$

$= 4 : 9$

Ex.50 एक अर्धगोलीय काँसे की बनी कटोरी का अन्तः व्यास 10.5 cm है। तो इस पर अन्दर की तरफ 16 रूपये प्रति 100 cm^2 की दर से कलई कराने का खर्चा ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

Sol. $\because$ अन्तः व्यास = 10.5 cm

$\Rightarrow$ अन्तः त्रिज्या (r) = $\frac{10.5}{2}$ cm = 5.25 cm

कलई करने योग्य क्षेत्रफल = कटोरी का अन्तः वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$ cm^2

$= 173.25$ cm^2

$\because$ 100 cm^2 पर कलई कराने का खर्चा = ₹ 16

$\Rightarrow$ 1 cm^2 पर कलई कराने का खर्चा = $\frac{16}{100}$

$\Rightarrow$ 173.25 cm^2 पर कलई कराने का खर्चा

= ₹ $\frac{16}{100} \times 173.25$

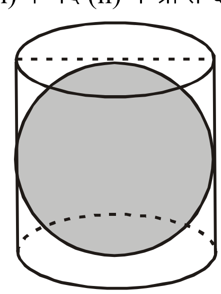
= ₹ 27.72

Ex.51 एक लम्बवृत्तीय बेलन के अन्दर r त्रिज्या का एक गोला चित्रानुसार दर्शाया गया है, तो निम्न की गणना करो। **[NCERT]**

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) पद (i) व पद (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात



Sol. (i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

(ii) चूंकि बेलन की ऊँचाई = गोले का व्यास

$\Rightarrow$ h = 2r

$\therefore$ बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

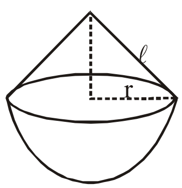
$= 2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

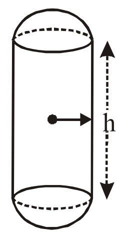
(iii) अभीष्ठ अनुपात $= \dfrac{4\pi r^2}{4\pi r^2} = 1 = 1 : 1$

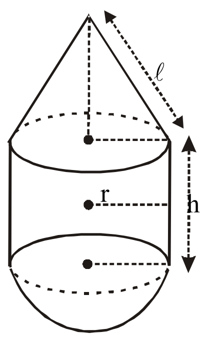
यदि एक बेलन के अन्दर एक गोला ठीक से समाता है, तो गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल सदैव बेलन के वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल के समान होता है।

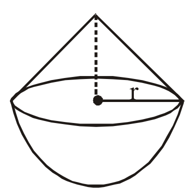
अन्य शब्दों में, यदि एक गोले व एक बेलन की त्रिज्या व ऊँचाई एकसमान हो, तो उनके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल भी समान होते है।

Ex.52 नीचे दिये गये प्रत्येक चित्र का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात कीजिए:

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


Sol. (i) अभीष्ठ पृष्ठीय क्षेत्रफल

= अर्धगोले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2 + \pi r\ell = \pi r\,(2r + \ell)$

(ii) अभीष्ठ पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2 × अर्धगोले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2 \times 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r\,(2r + h)$

(iii) अभीष्ठ पृष्ठीय क्षेत्रफल

= अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r\ell = \pi r\,(2r + 2h + \ell)$

(iv) यदि दिये गये शंकु की तिर्यक ऊँचाई ℓ हो तब

$= \ell^2 = h^2 + r^2 \;\Rightarrow\; \ell = \sqrt{h^2 + r^2}$

एवं अभीष्ठ पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2 + \pi r\ell = \pi r\,(2r + \ell)$

$= \pi r\left(2r + \sqrt{h^2 + r^2}\right)$

Ex.53 एक गोले की त्रिज्या में 25% की वृद्धि होती है, तो इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितना प्रतिशत वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए।

Sol. माना कि मूल त्रिज्या r है

$\Rightarrow$ गोले का मूल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

त्रिज्या में वृद्धि = r + 25% of r

$= r + \dfrac{25}{100}r = \dfrac{5r}{4}$

$\Rightarrow$ पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि

$= 4\pi\left(\dfrac{5r}{4}\right)^2 = \dfrac{25\pi r^2}{4}$

पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि

$= \dfrac{25\pi r^2}{4} - 4\pi r^2 = \dfrac{25\pi r^2 - 16\pi r^2}{4} = \dfrac{9\pi r^2}{4}$

एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि

$= \dfrac{\text{क्षेत्रफल में वृद्धि}}{\text{मूल क्षेत्रफल}} \times 100\%$

$= \dfrac{\frac{9\pi r^2}{4}}{4\pi r^2} \times 100\% = \dfrac{9}{16} \times 100\%$

= 56.25%

वैकल्पिक विधि :

माना कि मूल त्रिज्या = 100

$\Rightarrow$ मूल वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi(100)^2 = 10000\pi$

त्रिज्या में वृद्धि = 100 + 25% of 100 = 125

$\Rightarrow$ वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि $= \pi(125)^2 = 15625\pi$

वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि $= 15625\pi - 10000\pi$

$= 5625\pi$

$\therefore$ वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि

$= \dfrac{\text{वक्र पृष्ठीय क्षैत्रफल में वृद्धि}}{\text{वक्र पृष्ठीय क्षैत्रफल मूल अवस्था में}} \times 100\%$

$= \dfrac{5625\pi}{1000\pi} \times 100\% = 56.25\%$

यदि त्रिज्या में 25% की वृद्धि की जाती है तो व्यास में भी 25% की वृद्धि हो जाती है।

विलोमतः यदि व्यास में 20% की कमी की जाती है, तो त्रिज्या में 20% की कमी हो जाती है।

Ex.54 एक ठोस धातु की गेंद का व्यास 8.4 cm है, तो इसका द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि इसके धातु का घनत्व 6.8 gm प्रति cm^3 है।

Sol. चूंकि, गेंद का व्यास = 8.4 cm

त्रिज्या (r) = $\frac{8.4}{2}$ cm = 4.2 cm

गेंद के धातु का आयतन = गेंद का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2 \text{ cm}^3$

$= 310.464 \text{ cm}^3$

चूंकि, द्रव्यमान = आयतन × घनत्व

∴ गेंद का द्रव्यमान

= 310.464 × 6.8 gm = 2111.1552 gm

= 2.111 kg (लगभग)

Ex.55 चन्द्रमा का व्यास, पृथ्वी के व्यास का लगभग एक चौथाई है। तो चन्द्रमा का आयतन, पृथ्वी के आयतन का कितना गुना है, गणना कीजिए ? **[NCERT]**

Sol. दिया है : चन्द्रमा का व्यास $= \frac{1}{4} \times$ पृथ्वी का व्यास

⇒ चन्द्रमा की त्रिज्या = $\frac{1}{4} \times$ पृथ्वी की त्रिज्या

$\Rightarrow R_m = \frac{1}{4} \times R_e$

अब, $\frac{\text{चन्द्रमा का आयतन}}{\text{पृथ्वी का आयतन}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_m^3}{\frac{4}{3}\pi R_e^3}$

$= \frac{R_m^3}{R_e^3} = \frac{\left(\frac{1}{4}R_e\right)^3}{R_e^3} = \frac{1}{64}$

∴ चन्द्रमा का आयतन = $\frac{1}{64}$ पृथ्वी का आयतन

Ex.56 सत्ताईस ठोस लौहे के गोले जिनमें प्रत्येक की त्रिज्या r है एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, को पिघलाकर एक गोला बनाया जाता है जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S′ हो, तो **[NCERT]**

(i) नये गोले की त्रिज्या r′ ज्ञात कीजिए।

(ii) S व S′ का अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol. (i) बड़े ठोस गोले का आयतन

= 24 × प्रत्येक ठोस गोले का आयतन

$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi(r')^3 = 27 \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$\Rightarrow (r')^3 = 27r^3 = (3r)^3$

$\Rightarrow r' = 3r$

(ii) ∵ S = प्रत्येक छोटे गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

एवं, S′ = नये बने गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 4\pi (r')^2 = 4\pi (3r)^2 = 36\pi r^2$

∴ S व S′ = $\frac{S}{S'}$ का अनुपात

$= \frac{4\pi r^2}{36\pi r^2} = \frac{1}{9}$

= 1 : 9

Ex.57 एक अर्धगोलीय टंकी 1 cm मोटी लौहे की चद्दर से बनी है, यदि अन्तः त्रिज्या 1 m हो, तो टंकी को बनाने में प्रयुक्त लौहे की चद्दर का आयतन ज्ञात कीजिए। **[NCERT]**

Sol. चूंकि, अन्तः त्रिज्या (r) = 1 m = 100 cm एवं चद्दर की मोटाई = 1cm

∴ बाह्य त्रिज्या (R) = 100 cm + 1 cm = 101 cm

∴ अर्धगोलीय टंकी को बनाने में प्रयुक्त लौहे का आयतन = इसका बाह्य आयतन – इसका अन्तः आयतन

$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (101^3 - 100^3) \text{ cm}^3$

$= 63487.81 \text{ cm}^3$

Ex.58 एक मकान का झरोखा अर्धगोलाकर है। इसको अन्दर से सफेद पुताई का खर्चा 498.96 रूपये है। यदि सफेद पुताई 2.00 रूपये प्रति मीटर की दर से की जाती हो, तो निम्न की गणना कीजिए। **[NCERT]**

(i) झरोखे के अन्तः पृष्ठ का क्षेत्रफल,

(ii) झरोखे के अन्दर हवा का आयतन

Sol. (i) सफेद-पुताई का खर्चा = सफेद पुताई की दर × झरोखे का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ ₹ 498.96 = ₹ 2 × झरोखे का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ झरोखे का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \frac{498.96}{2} m^2 = 249.48\ m^2$

(ii) माना कि अर्धगोलीय झरोखे की त्रिज्या = r m

$\therefore\ 2\pi r^2 = 249.48$

$\Rightarrow\ 2 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 249.48$

$\Rightarrow\ r^2 = \frac{249.48 \times 7}{2 \times 22} m^2 = 39.69$

$\Rightarrow\ r = 6.3$ m.

$\therefore$ झरोखे के अन्दर हवा का आयतन

$= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 6.3 \times 6.3 \times 6.3\ m^3$

$= 523.908\ m^3$

Ex.59 दो गोलों की त्रिज्याऐं 3 : 2 के अनुपात में है, तो उनके आयतनों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol. दिया है : दो गोलों की त्रिज्याओं में अनुपात = 3 : 2

$\Rightarrow$ यदि एक गोले की त्रिज्या = 3r,

तब दूसरे गोले की त्रिज्या = 2r

अभीष्ट अनुपात = $\frac{\text{एक गोले का आयतन}}{\text{दूसरे गोले का आयतन}}$

$$\frac{\frac{4}{3} \times \pi \times (3r)^3}{\frac{4}{3} \times \pi \times (2r)^3} = \frac{27}{8} = 27 : 8$$

Ex.60 तीन ठोस गोले जिनकी त्रिज्याऐं 1 cm, 6 cm व 8 cm हैं, को पिघलाकर एक गोला बनाया जाता है, तो इस प्रकार बने नये गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Sol. माना कि बने नये गोले की त्रिज्या = R cm.

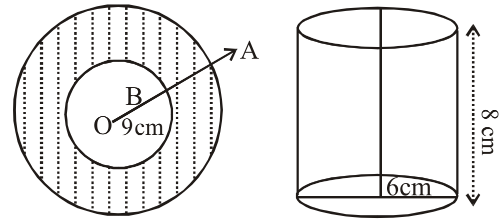
$\therefore\ \frac{4}{3} \times \pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(1)^3 + \frac{4}{3}\pi(6)^3 + \frac{4}{3}\pi(8)^3$.

$R^3 = 1 + 216 + 512$

$R = (729)^{1/3}$

R = 9 cm.

Ex.61 एक सीसे की बनी गोलीय कोश जिसका बाह्य व्यास 18 cm है, को पिघलाकर एक लम्बवृत्तीय बेलन बनाया जाता है, जिसकी ऊँचाई 8 cm तथा व्यास 12 cm है। तो कोश का अन्तः व्यास ज्ञात कीजिए।



Sol. हम जानते हैं कि

लम्बवृत्तीय बेंलन की ऊँचाई = h = 8cm एवं इसके आधार की त्रिज्या = R = 6cm

अतः, इसका आयतन = $\pi R^2 h$

$$\left(\frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 8\right) cm^3 \qquad ....(i)$$

यह दिया गया है कि गोलीय कोश का बाह्य व्यास = 18 cm

$\Rightarrow$ इसकी बाह्य त्रिज्या = $r_1 = \frac{18}{2} = 9$ cm

माना कि इसकी अन्तः त्रिज्या r_2 cm है।

चूंकि गोलीय कोश को पिघलाकर एक लम्ब वृत्तीय बेलन बनाया गया है, इसलिए ठोस गोलीय कोश का आयतन = बेलन का आयतन

$\Rightarrow\ \frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3) = \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 8$

[समीकरण (i) के प्रयोग से]

$\Rightarrow\ \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(9^3 - r_2^3) = \frac{22}{7} \times 36 \times 8$

$\Rightarrow\ \frac{4}{3}(9^3 - r_2^3) = 36 \times 8 \Rightarrow 9^2 - r_2^3 = \frac{108 \times 8}{4}$

$\Rightarrow\ r_2^3 = 9^3 - 108 \times 2 = 729 - 216 \Rightarrow r_2^3 = 513$

$\Rightarrow\ r_2$ = (कोश की अन्तः त्रिज्या) = $\sqrt[3]{513} \cong 8$cm

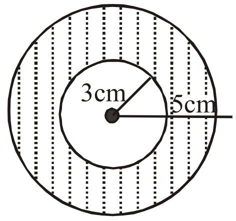
$\Rightarrow$ कोश की अन्तः त्रिज्या = 8 cm × 2 ≅ 16 cm

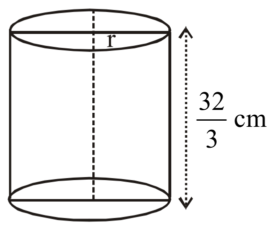
Ex.62 एक धातु के गोलीय कोश की अन्तः पृष्ठ व बाह्य पृष्ठ की त्रिज्याऐं क्रमशः 3 cm व 5 cm है। इन्हे पिघलाकर एक ठोस लम्ब वृत्तीय बेलन बनाया जाता है, जिसकी ऊँचाई $10\frac{2}{3}$ cm है, तो बेलन के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ धातु के गोलीय कोश जिनकी अन्तः त्रिज्या व बाह्य त्रिज्या क्रमशः 3 cm व 5 cm है।

इसलिए, इसका आयतन $= \left[\frac{4}{3}\pi(5^3-3^3)\right]$ cm^3

$$= \left[\frac{4}{3}\pi\times(125-27)\right]\text{cm}^3 = \left(\frac{4}{3}\pi\times 98\right)\text{cm}^3$$





मानाकि r लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या है तथा ऊँचाई $\frac{32}{3}$ cm है।

इसका आयतन $= \pi r^2 h = \left(\pi\times r^2\times\frac{32}{3}\right)$cm^3

हम जानते है कि

गोलीय कोश का आयतन = लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi\times 98 = \pi\times r^2\times\frac{32}{3} \Rightarrow 392 = 32r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{392}{32} = \frac{49}{4} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ cm}$$

अतः लम्ब वृत्तीय बेलन का व्यास

$= 2r = 2\times 3.5$ cm $= 7$ cm

Ex.63 सीसे की बनी एक गोलीय गेंद जिसका व्यास 3 cm है, को पिघलाकर तीन गोलीय गेंदो का निर्माण किया जाता है। इनमें से दो गेंदो के व्यास 1 cm व 1.5 cm हो, तो तीसरी गेंद का व्यास ज्ञात कीजिए।

Sol. दिया गया है कि गोलीय गेंद का व्यास = 3cm

$\Rightarrow$ एवं इसकी त्रिज्या = 1.5 cm = $\frac{3}{2}$ cm

इसका आयतन $= \left[\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]$cm^3

$$= \left(\frac{4}{3}\pi\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\right)\text{cm}^3$$

$$= \frac{108\pi}{24}\text{cm}^3 = \frac{9\pi}{2}\text{cm}^2$$

इस गोलीय गेंद को पिघलाकर तीन छोटी गोलीय गेंद बनाई जाती है। इनमें से किन्ही दो गेंदो के व्यास क्रमशः 1 cm व 1.5 cm है।

अतः दो गोलीय गेंदो का आयतन

$$= \left[\frac{4}{3}\pi\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^3\right\}\right]\text{cm}^3$$

$$= \left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{64}\right)\right]\text{cm}^3$$

$$= \left(\frac{4}{3}\pi\times\frac{35}{64}\right)\text{cm}^3 = \frac{140\pi}{192}\text{cm}^3$$

माना कि r तीसरी छोटी गोलीय गेंद की त्रिज्या है, अतः बड़ी गोलीय गेंद का आयतन – दो छोटी गोलीय गेंदो का आयतनो का योग

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{9\pi}{2} - \frac{140\pi}{192}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}r^3 = \frac{9}{2}-\frac{140}{192} = \frac{864-140}{192} = \frac{724}{192}$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{724\times 3}{4\times 192} = \frac{181}{64} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{181}{64}}\text{ cm}$$

अतः तीसरी गोलीय गेंद का व्यास = 2r

$$= 2\times\frac{\sqrt[3]{181}}{\sqrt[3]{64}} = 2\times\frac{\sqrt[3]{181}}{4} = \frac{\sqrt[3]{181}}{2}\text{ cm}$$

Ex.64 एक बेलनाकार डिब्बा जिसमें आइसक्रीम भरी हुई है, का व्यास एवं ऊँचाई क्रमशः 12cm व 15cm है। संपूर्ण आइसक्रीम को 10 बच्चों में उल्टे शंकु आकार रूप में जिसका ऊपरी भाग अर्धगोलीय है, बनाकर बराबर-बराबर बाँटे जाते है, तो आइसक्रीम का व्यास ज्ञात कीजिए, यदि शंकु आकार भाग की ऊँचाई, आधार के व्यास की दुगुनी है।

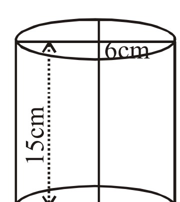
Sol. बेलनाकार डिब्बे की त्रिज्या $= r = \frac{12}{2} = 6$cm

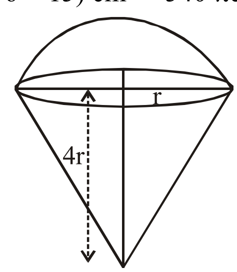
एवं ऊँचाई (h) = 15cm

इसलिए इसका आयतन $= \pi r^2 h$

$= (\pi\times 6^2\times 15)$ cm^3

$= (\pi\times 36\times 15)$ cm^3 $= 540\ \pi$cm^3





मान लो कि आइसक्रीम के अर्धगोलीय भाग की त्रिज्या = आइसक्रीम के शंकु आकार आधार की त्रिज्या = r

अतः आइसक्रीम के शंकु आकार भाग की ऊँचाई = 4r

अतः एक आइसक्रीम का आयतन = अर्धगोलीय भाग का आयतन + शंकु आकार भाग का आयतन

$$= \left(\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \times 4r\right) cm^3$$

$$= \left(\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3\right) cm^3 = (2\pi r^3)\ cm^3$$

10 आइसक्रीम का आयतन

$= (10 \times 2\pi r^3) cm^3 = (20\pi r^3)\ cm^3$

यहाँ 10 आइसक्रीम का आयतन = बेलनाकार डिब्बे का आयतन

$\Rightarrow\ 20\pi r^3 = 540\pi \Rightarrow 20r^3 = 540$

$\Rightarrow\ r^3 = \frac{540}{20} = 27 \Rightarrow r = \sqrt[3]{27} = 3\ cm$

अतः आइसक्रीम का अभीष्ठ व्यास

$= 2r = 2 \times 3 = 6cm$

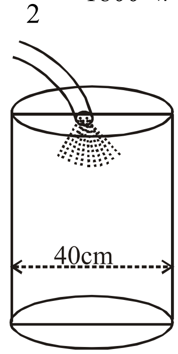
Ex.65 एक वृत्तीय पाइप जिसका अन्तः व्यास 2cm है, से एक बेलनाकार टंकी में पानी 0.7m/sec की दर से गिर रहा है, टंकी के आधार की त्रिज्या 40cm है। तो बतलाइये कि आधे घंटे में पानी का स्तर कितना बढ़ जायेगा ?

Sol. वृत्तीय पाइप से 1 सैकण्ड में निकलने वाले पानी का आयतन = उस बेलन का आयतन जिसके आधार की त्रिज्या 1 cm ($r = \frac{2}{2} = 1$ cm) व ऊँचाई 70 cm (h = 0.7m = 70 cm)

$$= \pi r^2 h = \left(\frac{22}{7} \times 1^2 \times 70\right)\ cm^3 = 220\ cm^3$$

अतः पाइप से बेलनाकार टंकी में 1800 सेकण्ड में निकलने वाले पानी का आयतन

$\left(\frac{1}{2}\text{ घंटा} = \frac{3600}{2} = 1800\text{ सैकण्ड}\right)$



$= (220 \times 1800)\ cm^3 = 396000\ cm^3$

अतः पानी के स्तर में चढ़ाव (1800 सैकण्ड या आधा घंटे में)

= (बेलनाकार टंकी में डाले गये पानी का कुल आयतन/बेलनाकार टंकी के आधार का क्षेत्रफल)

$= \frac{396000\ cm^3}{\pi \times 40^2\ cm^2}$ (बेलनाकार टंकी के आधार की त्रिज्या = 40 cm)

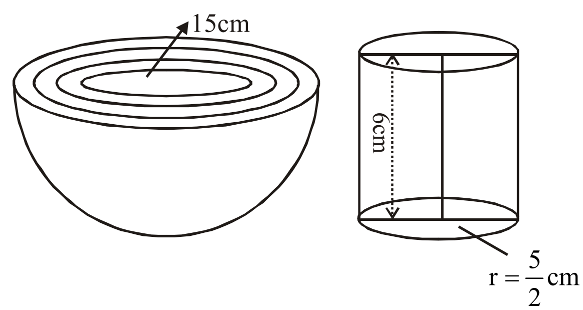
$$= \left(\frac{396000\ cm^3}{\frac{22 \times 1600}{7} cm^2}\right) = \left(\frac{396000 \times 7}{22 \times 1600}\right) cm$$

$= 78.75\ cm \cong 79\ cm$

अतः आधे घंटे में पानी का स्तर 79 cm तक होगा।

Ex.66 एक अर्धगोलीय कटोरी जिसकी अन्तः त्रिज्या 15cm है, तरल पदार्थ से पूर्णतः भरी हुई है। इस तरल पदार्थ को कुछ बेलनाकार बोतलों में जिनके व्यास व ऊँचाइयाँ क्रमशः 5 cm व 6 cm हैं, भरा जाता है तो कटोरी को खाली करने में कितनी ऐसी बोतलों की आवश्यकता होगी ?

Sol. अर्धगोलीय कटोरी की अन्तः त्रिज्या = R = 15 cm.



इसका आयतन $= \frac{2}{3}\pi \times R^3$

$$= \left[\frac{2}{3} \times \pi \times (15)^3\right] cm^3 = \left(\frac{2}{3} \times \pi \times 15 \times 15 \times 15\right) cm^3$$

$= 10 \times 15 \times 15\ \pi cm^3 = 2250\ \pi cm^3$

संपूर्ण तरल पदार्थ का आयतन = $2250\ \pi cm^3$

इस तरल पदार्थ को कुछ बोतलों में जिनके व्यास व ऊँचाई क्रमशः 5 cm व 6 cm हैं, में भरा जाना है।

अतः बेलनाकार बोतल की त्रिज्या = $\frac{5}{2}$ cm एवं ऊँचाई = 6cm

अतः एक बेलनाकार बोतल का आयतन = $\pi r^2 h$

$= \left(\pi \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times 6\right) cm^3 = \left(\frac{75\pi}{2}\right) cm^3$

अतः अर्ध गोलीय कटोरी को खाली करने हेतु आवश्यक बोतलों की अभीष्ट संख्या

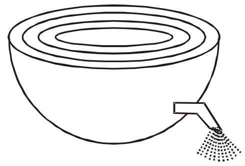
$= \frac{\text{कटोरी में रखे संपूर्ण तरल का आयतन}}{\text{एक बेलनाकार बोतल का आयतन}}$

$= \frac{2250 cm^3}{\frac{75\pi}{2} cm^3} = \frac{2250 \times 2}{75} = 60$

Ex.67 एक अर्धगोलीय टंकी की त्रिज्या $1\frac{3}{4}$ m है, पानी से पूरी तरह भरी हुई है, इसके नीचे की तरफ एक पाइप से 7 लीटर/सेकण्ड की दर से पानी निकाला जा रहा है ताकि टंकी खाली हो जाये, तो टंकी को पूरी तरह से खाली होने में कितना समय लगेगा ?

Sol. अर्धगोलीय टंकी की त्रिज्या $= 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ m जो पानी से लबालब भरी है, अतः अर्धगोलीय टंकी में संपूर्ण पानी का आयतन

$= \left[\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{7}{4}\right)^3\right] m^3 = \left(\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}\right) m^3$



चूंकि इस टंकी के तले में एक पाइप लगाया गया है, जिससे पानी 7 लीटर/सेकण्ड की दर से टंकी को खाली करने के लिए निकाला जा रहा है।

इसलिए 1 सेकण्ड में निकाले गये पानी का आयतन = 7 लीटर

$= (7 \times 1000) cm^3 = 7000 \ cm^3$

$= \left(\frac{7000}{100 \times 100 \times 100}\right) m^3$

अतः टंकी को पूरी तरह खाली होने में लगा कुल समय

$= \left(\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}\right) \div \left(\frac{7000}{100 \times 100 \times 100}\right)$

$= \left(\frac{22 \times 49}{48} \div \frac{7}{1000}\right)$ सैकण्ड

$= \frac{22 \times 49 \times 1000}{48 \times 7}$ सैकण्ड $= \frac{19250}{12}$ सैकण्ड

$= \left(\frac{19250}{12 \times 60}\right)$ मिनट $= \frac{1925}{72}$ मिनट = 26.73 मिनट

अतः अभीष्ट समय 26.73 मिनट

Ex.68 एक अर्धगोलीय कटोरी जिसकी अन्तःत्रिज्या 9cm है, पूरी तरह से द्रव से भरी हुई है। इस द्रव को बेलनाकार छोटी बोतलों जिनमें प्रत्येक का व्यास 3 cm तथा ऊँचाई 4 cm है तो कटोरी को पूर्णतः खाली करने हेतु ऐसी कितनी बोतलों की आवश्यकता होगी ?

Sol. अर्धगोलीय कटोरी का आयतन

$= \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (9)^3$

(R = अर्धगोलीय कटोरी की अन्तः त्रिज्या = 9 cm)

$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 9 \times 9 \times 9\right) cm^3$

इसलिए कटोरी में द्रव का आयतन

$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 9 \times 9 \times 9\right) cm^3$

एक बोतल का आयतन $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4$

(r = बेलनाकार बोतल की त्रिज्या $= \frac{3}{2}$ cm एवं ऊँचाई (h) = 4 cm)

$= \frac{22}{7} \times \frac{9}{4} \times 4 = \frac{198}{7} cm^3.$

कटोरी को खाली करने हेतु बोतलों की संख्या

$= \frac{\text{कटोरी में द्रव का आय तन}}{\text{एक बोतल का आयतन}}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 9 \times 9 \times 9 \div \frac{198}{7}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 9 \times 9 \times 9 \times \frac{7}{198} = 54$

अतः कटोरी को खोली कराने हेतु आवश्यक बोतलों की संख्या 54 है।

Ex.69 एक झरना जो 30 dm चौड़ा व 12 dm गहरा है, का पानी 10 km किलोमीटर प्रति घंटा की दर से बह रहा है, तो 30 मिनट में इससे कितने क्षेत्रफल में सिंचाई की जा सकती है, यदि 8 cm स्तर का पानी सिंचाई के लिए आवश्यक हो ?

Sol. हम जानते हैं कि

$30 \ dm = \frac{30}{10} m, \ 12 dm = \frac{12}{10} m$

$10 \text{ km} = 10 \times 1000 \text{ m}$

1 घंटे में झरने से बहते पानी का आयतन

$= \frac{30}{10} \times \frac{12}{10} \times 10 \times 1000 = 36000 \text{ m}^3.$

30 मिनट में बहते पानी का आयतन

$= \left(\frac{1}{2}\text{hour}\right) = \frac{36000}{2} = 18000 \text{ m}^3.$

$\frac{1}{2}$ घंटे में सिंचाई होने योग्य क्षेत्रफल

$= \frac{\text{आयतन}}{\text{ऊँचाई}} = \frac{18000\text{m}^3}{8\text{m}}$

$= \left(\frac{18000 \times 100}{8}\right)\text{m}^2 = 225000 \text{ m}^2$

अतः अभीष्ट पानी जो दिये गये स्तर पर सिंचाई हेतु आवश्यक है, 225000 m^2 है।

Ex.70 एक बेलनाकार पाइप जिसका व्यास 5 mm है, से पानी 10 मीटर प्रति मिनट की दर से बह रहा है, तो इससे एक शंकु आकार बर्तन जिसके आधार का व्यास 40 cm व गहराई 24 cm है, को भरने में कितना समय लगेगा?

Sol. पाइप का व्यास = 5mm

$\Rightarrow$ त्रिज्या $= \frac{5}{2} \text{ mm} = \frac{5}{10 \times 2} \text{ cm}$

एवं $10\text{m} = (10 \times 100) \text{ cm}$

1 मिनट में बेलनाकार पाइप से बहने वाले पानी का आयतन

$= \left[\frac{22}{7} \times \left(\frac{5}{10 \times 2}\right)^2 \times 10 \times 100\right] \text{cm}^3$

$= \left[\frac{22}{7} \times \frac{5 \times 5}{20 \times 20} \times 1000\right] \text{cm}^3 = \frac{1375}{7} \text{ cm}^3$

शंकुआकार बर्तन जिसकी त्रिज्या

20 cm $\left(\frac{40}{2} = 20\text{cm}\right)$ एवं गहराई 24 cm है, का

आयतन $= \left[\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (20)^2 \times 24\right] \text{cm}^3$

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 24\right) \text{cm}^3$

शंकुआकार बर्तन को भरने में लगा समय

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 24\right) \div \frac{1375}{7}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{20 \times 20 \times 24 \times 7}{1375}$

$= \frac{1478400}{28875} = 51.2$ मिनट

अतः आवश्यक लगा समय 51.2 मिनट

Ex.71 एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाऐं 3 cm व 4 cm हैं, को कर्ण के सापेक्ष घुमाया गया है, इस प्रकार निर्मित दोहरा शंकुआकार चित्र का आयतन ज्ञात कीजिए।

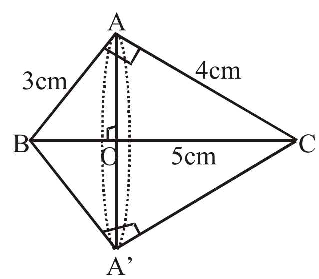
Sol. समकोण त्रिभुज BAC, जो A पर समकोण है, का कर्ण BC, A $= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5\text{cm}$ चूंकि त्रिभुज को कर्ण के सापेक्ष घुमाया गया है इसलिए AO, निर्मित दोहरे शंकुओं का उभयनिष्ठ आधार है। शंकु BAA' की ऊँचाई BO है तथा तिर्यक ऊँचाई 3cm है, शंकु CAA' की ऊँचाई CO है तथा इसकी तिर्यक ऊँचाई 4cm है।

समकोण त्रिभुज AOB व BAC में, हम जानते हैं कि

So, $\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)

$\angle BOA = \angle BAC = 90^\circ$

इस प्रकार AA – समता नियम से, हम जानते हैं कि



$\Delta AOB \sim \Delta BAC$

$\frac{AO}{AC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AO}{4} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow AO = \frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5} \text{ cm}$

एवं $\frac{BO}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{BO}{3} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow BO = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5} \text{ cm}$

अब $CO = BC - BO = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5} \text{ cm.}$

शंकु BAA' का आयतन

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (AO)^2 \times BO$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{9504}{875} \text{ cm}^3$$

शंकु CAA' = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ का आयतन

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (AO)^2 \times CO$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{16}{5}$$

$$= \frac{16896}{875} \text{ cm}^3$$

अतः इस प्रकार निर्मित दोहरे शंकु का आयतन

$$= \frac{9504}{875} + \frac{16896}{875} = \frac{26400}{875}$$

$$= \frac{1056}{35} = 30\frac{6}{35} \text{ cm}^3$$

अतः अभीष्ट आयतन $30\frac{6}{35}$ cm^3 है।

याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई क्रमशः ℓ, b व h हैं, तब -

(i) घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\ (\ell b + bh + \ell h)$ वर्ग इकाई

(ii) घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = ℓbh घन इकाई

(iii) घनाभ का विकर्ण $= \sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$ इकाई

(iv) कमरे की चार दीवारी का क्षेत्रफल $= 2\ (\ell + b)\ h$ वर्ग इकाई

2. यदि एक घन की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 'a' इकाई हो, तब -

(i) घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2$ वर्ग इकाई

(ii) घन का आयतन $= a^3$ घन इकाई

(iii) घन का विकर्ण $= \sqrt{3}\ a$ इकाई

3. यदि एक लम्बवृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या एवं ऊँचाई क्रमशः r व h हो, तब -

(i) प्रत्येक सिरे का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

(ii) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\ (h + r)$ वर्ग इकाई

(iv) आयतन $= \pi r^2 h$ = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

4. यदि एक खोखले लम्ब वृत्तीय बेलन की बाह्य त्रिज्या व अन्तः त्रिज्या क्रमशः R व r हों, तब -

(i) प्रत्येक सिरे का क्षेत्रफल $= \pi(R^2 - r^2)$

(ii) खोखले बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi\ (R + r)\ h$

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi\ (R + r)\ (R + h - r)$

(iv) पदार्थ का आयतन $= \pi h\ (R^2 - r^2)$

5. यदि एक लम्बवृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या, ऊँचाई एवं तिर्यक ऊँचाई क्रमशः r, h व ℓ हों, तब -

(i) $\ell^2 = r^2 + h^2$

(ii) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r\ell$

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r^2 + \pi r\ell$

(iv) आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

6. एक गोला जिसकी त्रिज्या r है, तब

(i) पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

(ii) आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$