बहुपद

2
CHAPTER

CONTENTS (सूची)

- परिचय
- अचर व चर
- बीजीय व्यंजक
- गुणज व गुणांक
- बहुपद, घात एवं प्रकार
- बहुपद के मूल व मान
- मूलों का ज्यामितीय अर्थ
- बहुपद का विभाजन
- शेषफल प्रमेय व गुणज प्रमेय
- अनुप्रयोग
- बीजगणितीय सर्वसमिका, गुणनखण्ड
- गुणनखण्ड के प्रकार

➤ परिचय

बीजगणित, गणित की वह शाखा है जहाँ संख्याओं से संबंध व्यवहार होता है।

➤ अचर व चर

बीजगणित में, दो तरह के चिन्ह क्रमशः अचर व चर प्रयोग में लाते है।

❖ **अचर :**

यह, वह प्रतीक है जहाँ मान हमेशा समान रहता है, चाहे कैसी भी स्थिति हो।

उदाहरणतया: $5, -9, \frac{3}{8}, \pi, \frac{7}{15}$, आदि

❖ **चर :**

यह वह प्रतीक है जहाँ मान स्थिति के अनुसार बदलता है

उदाहरणतया : $x, y, z, ax, a + x, 5y, -7x$, आदि

➤ बीजीय व्यंजक

(a) वह बीजीय प्रसार जिसके पदों को (+) व (–) चिन्ह के द्वारा पृथक करते है, बीजीय व्यंजक कहलाता है। उदाहरण : $3x + 5y, 7y - 2x, 2x - ay + az$, आदि।

(b) एक बीजीय व्यंजक जिसके भागों को '+' या '–' के द्वारा पृथक करते है, पद कहलाता है।

उदाहरणतया :

बीजीय व्यंजक	पदों की संख्या	पद
(i) $-32x$	1	$-32x$
(ii) $2x + 3y$	2	$2x$ तथा $3y$
(iii) $ax - 5y + cz$	3	$ax, -5y$ तथा cz
(iv) $\frac{3}{x} + \frac{y}{7} - \frac{xy}{8} + 9$	4	$\frac{3}{x}, \frac{y}{7}, -\frac{xy}{8}$

तथा 9 और इसी प्रकार

बीजीय व्यंजको के प्रकार :

(i) एक पदीय (Monomial) : एक बीजीय व्यंजक जो एक पद से बना हो, एक पदीय व्यंजक कहलाता है।

उदाहरणतया $8y, -7xy, 4x^2, abx$, आदि 'मोनो' मतलब 'एक'

(ii) द्विपदीय व्यंजक (Binomial) : एक बीजीय व्यंजक, जो केवल दो पद से बना हो द्विपदीय व्यंजक कहलाता है। उदाहरणतयाः $8x + 3y$, $8x + 3$, $8 + 3y$, $a + bz$, $9 - 4y$, $2x^2 - 4z$, $6y^2 - 5y$, आदि

(iii) त्रिपदीय व्यंजक (Trinomial) : एक बीजीय व्यंजक जो तीन पदों से मिलकर बना हो त्रिपदीय व्यंजक कहलाता है।

उदाहरणतया $ax - 5y + 8z$, $3x^2 + 4x + 7$, $9y^2 - 3y + 2x$, आदि।

(iv) बहुपदीय व्यजंक (Multimonial) : यदि एक बीजीय व्यंजक दो या दो से अधिक पदों से मिलकर बना हो, बहुपदीय व्यंजक कहलाता है।

➤ गुणज व गुणांक

◈ गुणज :

चर व अचर के संग्रह से बना पद गुणज कहलाता है।

उदाहरणतया :

(i) $7x$ के गुणज 7, x व 7x है, जहाँ 7 अचर गुणज है (numerical) व x एक चर गुणज है (literal)

(ii) $-5x^2y$, में -5 एक संख्यात्मक गुणज है व x, y, xy, x^2, x^2y एक शाब्दिक गुणज है।

◈ गुणांक :

एक पद का कोई गुणज, शेष पद का गुणांक कहलाता है।

उदाहरणतया :

(i) **7x** में ; 7 , x का गुणांक है।

(ii) **$-5x^2y$ में ;** 5, $-x^2y$; का गुणांक ; -5 , x^2y का गुणांक है।

उदा. 1 गुणांक लिखो :

(i) $3x^3 - 5x^2 + 7$ में x^2 का

(ii) 8xyz में xy का

(iii) $2y^2 - 6y + 2$ में $-y$ का

(iv) $3x + 7$ में x^0 का

हल. (i) -5 (ii) 8z (iii) 6

(iv) चूंकि $x^0 = 1$, इसलिए

$3x + 7 = 3x + 7x^0$

अतः x^0 का गुणांक 7 है।

➤ बहुपद की परिभाषा

बहुपद एक बीजीय व्यंजक है जिसमें प्रत्येक चर की घात एक पूर्ण संख्या {0, 1 ...} होती है।

उदाहरणतया :

$3x^2 - y^5 + 8z$ में चर x की घात पद $3x^2$ is 2 है पद $- y^5$ में चर y की घात 5 व पद 8z में चर z की घात 1 ($z = z^1$) है। इसलिये बीजीय व्यंजक $3x^2 - y^5 + 8z$ एक बहुपद है

◈ एक चर में बहुपद :

बीजीय व्यंजक जैसे $8x$, $7x + 3$, $4y - 3$, $8x^2 + 5$, $6 - z^2$, $x^2 - 5x + 6$, $3y^2 + 8y + 9$ आदि केवल एक चर (शाब्दिक) से मिलकर बने है अतः यह एक चर में बहुपद कहलाते है।

◈ दो और अधिक चरों में बहुपद :

एक बीजीय व्यंजक जिसके पद दो और अधिक चरों से इस प्रकार बने हो कि प्रत्येक चर की घात एक पूर्ण संख्या हो, दो और अधिक चरों वाले बहुपद कहलाते है।

उदाहरणतया :

(a) बहुपद $3x^2 - 6xy + 8y^2$ दो चर x व y में है।

(b) बहुपद $x + xy^3 - 8x^2yz - 15$ तीन चर क्रमशः x, y व z. में है।

➤ बहुपद की घात

एक बहुपद के पद की अधिकतम घाताँक को बहुपद की घात कहते है।

उदाहरणतया :

(a) बहुपद $5x^2 - 8x^7 + 3x$:

(i) पद $5x^2$ की घात = 2

(ii) पद $-8x^7$ की घात = 7

(iii) पद 3x की घात = 1

अतः अधिकतम घात 7 है जिसे बहुपद $5x^2 - 8x^7 + 3x$ की घात कहेंगे।

(b) निम्न बहुपद की घात होगी :

(i) $4y^3 - 3y + 8$ की 3 (ii) $7p + 2$ की 1($p = p^1$)

(iii) $2m - 7m^8 + m^{13}$ की 13 एवं इसी प्रकार

❖ **उदाहरण** ❖

उदा.2 निम्न में से कौनसा बीजीय व्यंजक एक बहुपद है

(i) $3x^2 - 5x$ (ii) $x + \frac{1}{x}$

(iii) $\sqrt{y} - 8$ (iv) $z^5 - \sqrt[3]{z} + 8$

हल. (i) $3x^2 - 5x = 3x^2 - 5x^1$

यह बहुपद है।

(ii) $x + \frac{1}{x} = x^1 + x^{-1}$

यह बहुपद नहीं है।

(iii) $\sqrt{y} - 8 = y^{1/2} - 8$

इस प्रकार प्रथम पद ($\sqrt{y}$) की घात $\frac{1}{2}$ है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है अतः यह बहुपद नहीं है।

(iv) $z^5 - \sqrt[3]{z} + 8 = z^5 - z^{1/3} + 8$

इस प्रकार बहुपद के दूसरे पद की घात 1/3, है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है अतः यह बहुपद नहीं है।

उदा.3 बहुपदों की घात ज्ञात कीजिए :

(i) $5x - 6x^3 + 8x^7 + 6x^2$

(ii) $2y^{12} + 3y^{10} - y^{15} + y + 3$

(iii) x

(iv) 8

हल. (i) चूंकि बहुपद के अधिकतम घात वाले पद $8x^7$ पद की घात 7 है

∴ बहुपद की घात 7 होगी।

(ii) चर की अधिकतम घात 15 है

⇒ घात = 15.

(iii) $x = x^1$ ⇒ घात 1 है।

(iv) $8 = 8x^0$ ⇒ घात = 0

➢ बहुपद के प्रकार

(i) चर बहुपद :

बहुपद जिसकी घात शून्य हो।

उदाहरण 20, –8, –1, 1, 5, 7, π, आदि

(ii) रेखीय बहुपद :

बहुपद जिसकी घात 1 हो।

उदाहरण $-8x$, $3x$, x, $x + \sqrt{2}$, $\sqrt{3}x - 2$, $5y - \frac{3}{2}$, $\frac{5}{7}z + 1$ आदि

(iii) द्विघात बहुपद :

बहुपद जिसकी घात 2 हो,

उदाहरण $6x^2$, y^2, $\frac{2}{5}z^2$, $x^2 - 3x$, $x^2 - 3$, $8 - 3y^2$, $5x^2 + 3x + 2$, $7 - 2z + z^2$, आदि

(iv) घनीय पद :

बहुपद जिसकी घात 3 हो,

उदाहरण $15y^3$, x^3, $8z^3$, $x^3 - 5x^2$, $3y^2 + y^3$,

$\sqrt{2} + 3z - 2z^2 + 6z^3$, $7y - 2 - 12y^3$, आदि

➢ बहुपद का मान

एक बहुपद के लिए $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$.

तो x = 3 पर इसका मान ज्ञात करो।

x की जगह 3 रखने पर

तो $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ का $x = 3$ पर मान होगा

$f(3) = 3 \times 3^2 - 4 \times 3 + 2$

$= 27 - 12 + 2 = 17.$

इसी तरह बहुपद

$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ का मान

(i) $x = -2$ पर $f(-2) = 3(-2)^2 - 4(-2) + 2$

$= 12 + 8 + 2 = 22$

(ii) $x = 0$ पर $f(0) = 3(0)^2 - 4(0) + 2$

$= 0 - 0 + 2 = 2$

(iii) $x = \frac{1}{2}$ पर $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 2$

$= \frac{3}{4} - 2 + 2 = \frac{3}{4}$

उदा.4 बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का मान होगा:

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$

हल. माना $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

(i) $x = 0$ पर, $p(0) = 5 \times 0 - 4 \times (0)^2 + 3$

$= 0 - 0 + 3 = 3$

(ii) $x = -1$ पर, $p(-1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3$

$= -5 - 4 + 3 = -6$

➤ बहुपद के शून्य(मूल)

यदि $x = a$ के लिए बहुपद $p(x)$ का मान 0 हो अर्थात् $p(a) = 0$; तब $x = a$ बहुपद $p(x)$ का शून्य (मूल) होता है।

उदाहरण के लिए :

(i) बहुपद $p(x) = x - 2$; $p(2) = 2 - 2 = 0$

$\therefore$ $x = 2$ या सामान्यतया 2 बहुपद

$p(x) = x - 2$ का शून्य है।

(ii) बहुपद $g(u) = u^2 - 5u + 6$ के लिए

$g(3) = (3)^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

$\therefore$ 3 बहुपद $g(u)$ का शून्य है।

$= u^2 - 5u + 6.$

एवं, $g(2) = (2)^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$\therefore$ 2 बहुपद $g(u) = u^2 - 5u + 6$ का शून्य है।

(a) प्रत्येक रेखीय बहुपद एक और केवल एक शून्य रखता है।

(b) एक बहुपद एक से अधिक शून्य रखता है।

(c) यदि बहुपद की घात n; हो तो अधिकतम शून्यों की संख्या भी n होगी।

उदाहरणतया :

यदि बहुपद की घात 5 है, तो बहुपद लगभग 5 शून्य रखता है, यदि बहुपद की घात 8; है तो वह अधिकतम 8 शून्य रख सकता है।

(d) एक बहुपद का शून्य आवश्यक नहीं कि शून्य 0 हो।

उदाहरण : यदि $f(x) = x^2 - 4$,

तब $f(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

यहाँ बहुपद $f(x) = x^2 - 4$ का शून्य 2 है, जो कि स्वंय नहीं है।

(e) 0 बहुपद का शून्य हो सकता है।

उदाहरण : यदि $f(x) = x^2 - x$,

तब $f(0) = 0^2 - 0 = 0$

यहाँ 0 बहुपद $f(x) = x^2 - x$ का शून्य है

❖ उदाहरण ❖

उदा.5 सत्यापन करो कि बहुपद के संगत प्रदर्शित संख्या बहुपद की शून्य है। :

(i) $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

(iii) $p(x) = x^2, x = 0$

(iv) $p(x) = \ell x + m, x = -\frac{m}{\ell}$

(v) $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

हल. (i) $p(x) = 3x + 1$

$\Rightarrow p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times -\frac{1}{3} + 1 = -1 + 1 = 0$

$\therefore$ $x = -\frac{1}{3}$ बहुपद $p(x) = 3x + 1$ का शून्य है

(ii) $p(x) = (x + 1)(x - 2)$

$\Rightarrow$ $p(-1) = (-1 + 1)(-1 - 2) = 0 \times -3 = 0$

एवं $p(2) = (2 + 1)(2 - 2) = 3 \times 0 = 0$

$\therefore$ $x = -1$ व $x = 2$ दिये गये बहुपद का शून्य है।

(iii) $p(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad p(0) = 0^2 = 0$

$\therefore$ $x = 0$ बहुपद का शून्य है।

(iv) $p(x) = \ell x + m \quad \Rightarrow \quad p\left(-\frac{m}{\ell}\right) = \ell\left(-\frac{m}{\ell}\right) + m$

$= -m + m = 0$

$\therefore$ $x = -\frac{m}{\ell}$ दिये बहुपद का शून्य है।

(v) $p(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1$

$= 1 + 1 = 2 \neq 0$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$ दिये गये बहुपद का शून्य नहीं है।

उदा.6 निम्न बहुपदों के शून्य ज्ञात करो :

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = 2x + 5$

(iii) $p(x) = 3x - 2$

हल. बहुपद $p(x)$ के शून्य ज्ञात करने के लिए, बहुपदीय समीकरण को शून्य के बराबर रखने पर $p(x) = 0$

(i) बहुपद $p(x) = x + 5$ के शून्य के लिए

$p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -5$

$\therefore$ $x = -5$ बहुपद $p(x) = x + 5$ का शून्य है।

(ii) $p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 5 = 0$

$\Rightarrow$ $2x = -5$ व $x = \frac{-5}{2}$

$\therefore$ $x = -\frac{-5}{2}$ बहुपद $p(x) = 2x + 5$ का शून्य है।

(iii) $p(x) = 0 \Rightarrow \quad 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow$ $3x = 2$ व $x = \frac{2}{3}$.

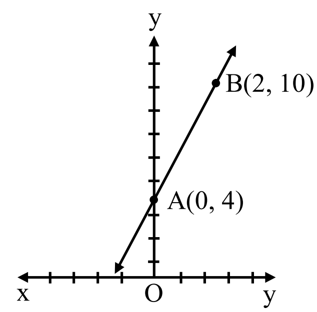
$\therefore$ $x = \frac{2}{3}$, $p(x) = 3x - 2$ का शून्य है।

➢ एक बहुपद के शून्य की ज्यामितीय व्याख्या

माना रेखीय बहुपद $ax + b$ है तथा $y = ax + b$ का ग्राफ एक सरल रेखा है।

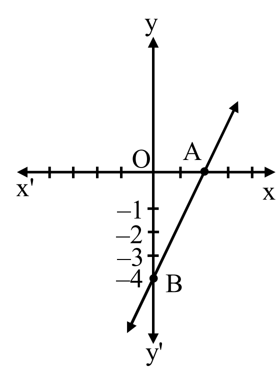
उदाहरण के लिए : $y = 3x + 4$ का ग्राफ एक सरल रेखा है जो (0, 4) व (2, 10) से होकर गुजरती है।

x	0	2
y = 3x + 4	4	10
बिन्दु	A	B



(i) $y = 2x - 4$ का ग्राफ x-अक्ष को $x = 2$ पर प्रतिच्छेद करता है तो $2x - 4$ का शून्य 2 है। इस प्रकार बहुपद $2x - 4$ का शून्य x-अक्ष का वह बिंदु है जहाँ $y = 2x - 4$, x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

x	2	0
y = 2x – 4	0	– 4
बिन्दु	A	B



(ii) रेखीय बहुपद की व्यापक समीकरण $ax + b$ होती है, तथा ग्राफ $y = ax + b$ का ग्राफ एक रेखा है जो x-अक्ष को $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ पर काटती है।

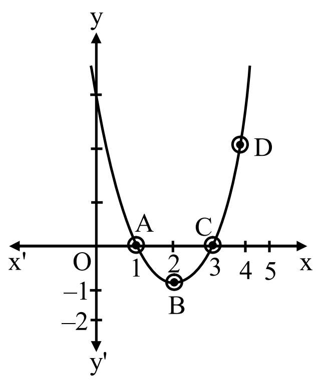
बहुपद $ax + b$ का शून्य x-अक्ष पर स्थित वह बिंदु है जहाँ x-अक्ष को काटता है।

(iii) द्विघात बहुपद x^2-4x+3 पर विचार करें, बहुपद x^2-4x+3 का ग्राफ x-अक्ष के बिंदु (1, 0) व (3, 0) पर काटता है। अतः बहुपद के शून्य x-अक्ष पर स्थित वह बिंदु होंगे जहाँ

x-अक्ष को काटता है।

x	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 4x + 3$	0	−1	0	3	8
बिन्दु	A	B	C	D	E

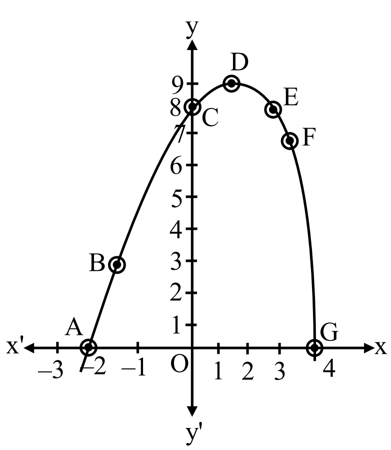
द्विघात व्यंजक के वक्र की आकृति ∪ होती है और इसे परवलय कहा जाता है।



(iv) अब बहुपद $-x^2 + 2x + 8$ पर ध्यान देते है जिसका ग्राफ x-अक्ष को बिन्दु (4, 0) (−2, 0) पर काटता है।

तो बहुपद $-x^2 + 2x + 8$ के शून्य x-अक्ष पर स्थित वह बिंदु होगा जहाँ वक्र x अक्ष को काटेगा। बहुपद की आकृति ∩ होगी व इसे परवलय कहते है।

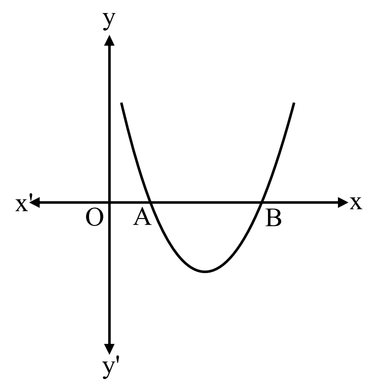
x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0	5	8	9	8	7	0
बिन्दु	A	B	C	D	E	F	G



द्विघात व्यंजक $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्य x-अक्ष पर स्थित वह बिंदु है जहाँ वक्र $y = ax^2 + bx + c$; x-अक्ष को काटता है। यहाँ $y = ax^2 + bx + c$ के तीन तरह के ग्राफ है।

Case I :

वक्र $y = ax^2 + bx + c$ का ग्राफ x-अक्ष को दो बिन्दु A व B पर काटता है। तो बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्य x-अक्ष पर स्थित बिंदु A व B के x-निर्देशांक होंगे।

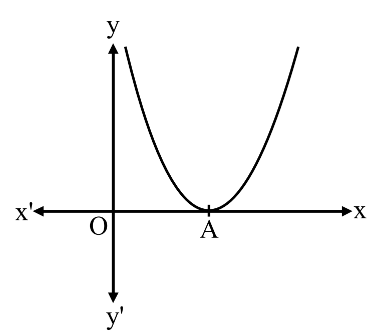


प्रतिबन्ध : $b^2 - 4ac > 0$ व $a > 0$

उदाहरण के लिए : द्विघात बहुपद $x^2 - 7x + 12$ का ग्राफ $y = x^2 - 7x + 12$ x-अक्ष को दो भिन्न बिन्दु (3, 0) तथा (4, 0) पर काटता है अतः बहुपद के शून्य 3 व 4 है।

Case II :

यहाँ ग्राफ x-अक्ष को केवल एक बिन्दु पर काटता है अर्थात् दो संपाती बिन्दुओं पर A व B अध्यारोपित हो जायेंगे व एक बिन्दु A बन जायेगा। तो बहुपद का शून्य x-अक्ष का बिन्दु A का x-निर्देशांक होगा।



प्रतिबन्ध : $b^2 - 4ac = 0$ व $a > 0$

उदाहरणतया : $y = (x - 1)^2$

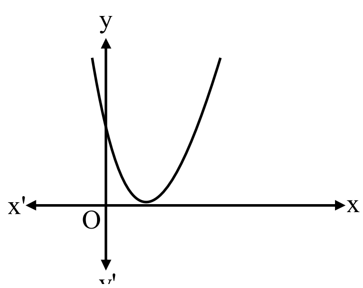
$y = (x - 1)^2$ का ग्राफ वक्र x-अक्ष को एक बिन्दु (1, 0) पर काटेगा तो बहुपद का शून्य x-अक्ष के साथ प्रतिच्छेदी बिन्दु होगा।

Case III :

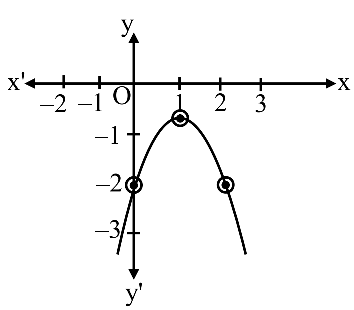
यदि द्विघात समीकरण का वक्र x-अक्ष को नहीं काटे या ग्राफ x-अक्ष के ऊपर पूरी तरह हो या x-अक्ष के नीचे तो द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ कोई शून्य नहीं रखता।

उदाहरणतया : $y = x^2 - 2x + 4$

$y = x^2 - 2x + 4$ का वक्र x-अक्ष को नहीं काटता है और x-अक्ष के ऊपर होता है तो $x^2 - 2x + 4$ कोई शून्य नहीं रखता।



यदि $y = -x^2 + 2x - 2$ बहुपद $y = -x^2 + 2x - 2$ का ग्राफ x-अक्ष को नहीं काटता है व x-अक्ष के नीचे है। तब बहुपद $-x^2 + 2x - 2$ कोई शून्य नहीं रखता।



टिप्पणी : यदि एक बहुपद की घात दो है तो वह अधिक से अधिक दो शून्य रखती है।

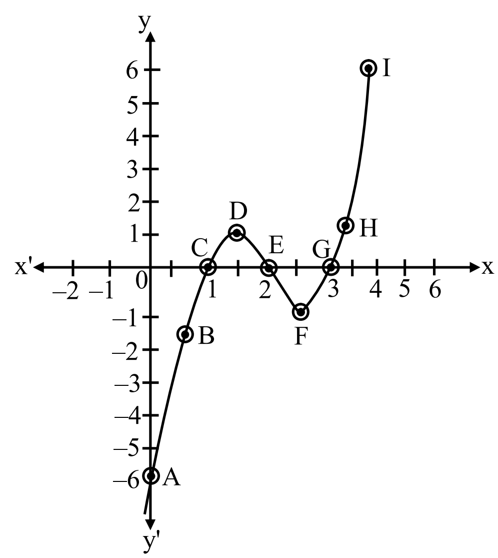
घनीय बहुपद : एक घनीय बहुपद के शून्य ज्यामितीय व्याख्या द्वारा ज्ञात करना

माना एक घनीय बहुपद $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	− 6	−1.875	0	0.375	0	− 0.375	0	1.875	6
बिन्दु	A	B	C	D	E	F	G	H	I

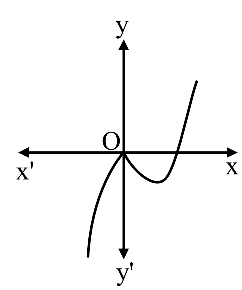
Case 1 :

घनीय समीकरण का वक्र x-अक्ष को तीन बिन्दु क्रमशः (1, 0), (2, 0) (3, 0) पर काटता है। दिये बहुपद के शून्य x-अक्ष पर स्थित उन बिन्दु के भुज होंगे जहाँ वह x-अक्ष को प्रतिच्छेद करते है।



Case 2 :

घनीय समीकरण $x^3 - x^2$, x-अक्ष को बिन्दु (0, 0) व (1,0) पर प्रतिच्छेद करते हैं, बहुपद $x^3 - x^2$ के शून्य x-अक्ष पर स्थित उन बिन्दु के भुज होंगे जहाँ वक्र x-अक्ष को काटते है।

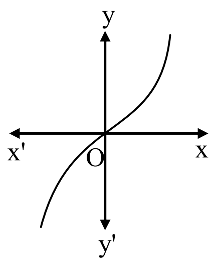


अतः घनीय के शून्य 0 व 1 है।

Case 3 :

$y = x^3$

यह घनीय बहुपद एक शून्य रखता है।

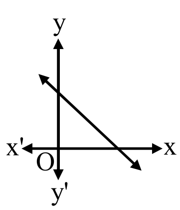


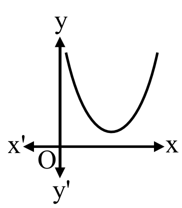
संक्षिप्तीकरण : घनीय समीकरण 1 या 2 या 3 शून्य रखता है। या बहुपद जिसकी घात 3 हो वह अधिकतम तीन शून्य रख सकता है।

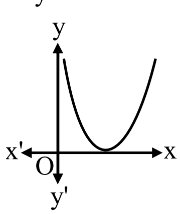
टिप्पणी : सामान्यतया, बहुपद की घात n हो जिसका ग्राफ $y = p(x)$, x-अक्ष के अधिकतम n बिंदुओं से गुजरता है। अतः एक बहुपद $p(x)$ की घात n हो तो वह अधिकतम n शून्य रखेगा।

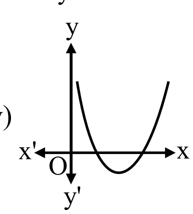
❖ उदाहरण ❖

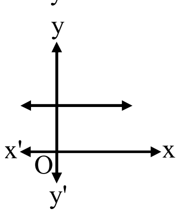
उदा.7 निम्न में से कौन सा वक्र रेखीय या द्विघातीय बहुपद के संगत है व बहुपद के शून्यों की संख्या भी बताओं।

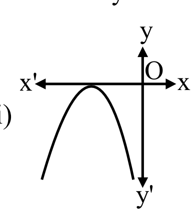
(i)


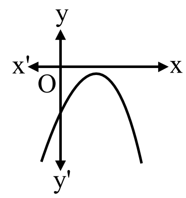
(ii)


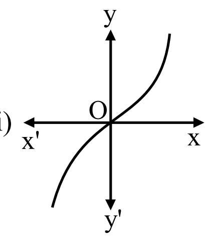
(iii)


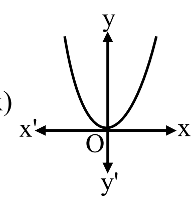
(iv)


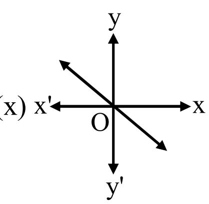
(v)


(vi)


(vii)


(viii)


(ix)


(x)


हल. (i) वक्र सरल रेखा है अतः वक्र एक रेखीय बहुपद है। शून्य की संख्या 1 है अतः वक्र x-अक्ष को केवल एक बिन्दु पर काटता है।

(ii) वक्र परवलय है इसलिए वक्र द्विघातीय बहुपद है। शून्यों की संख्या 0 है क्योंकि वक्र x-अक्ष को प्रतिच्छेद नहीं करता है।

(iii) यहाँ बहुपद द्विघातीय है अतः वक्र परवलय है। शून्यों की संख्या 1 है क्योंकि वक्र x-अक्ष को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है (दो सम्पाती बिन्दु)

(iv) यहाँ बहुपद द्विघातीय है अतः वक्र परवलय है। शून्यों की संख्या 2 है क्योंकि वक्र x-अक्ष को दो बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है।

(v) बहुपद रेखीय है क्योंकि उसका वक्र सरल रेखा है व शून्य की संख्या 0 है क्योंकि वक्र x-अक्ष को किसी भी बिन्दु पर प्रतिच्छेद नहीं करता है।

(vi) बहुपद द्विघातीय है क्योंकि इसका वक्र परवलय है। शून्यों की संख्या 1 है क्योंकि वक्र x-अक्ष को केवल एक बिन्दु (दो सम्पाती बिन्दु) पर प्रतिच्छेद करता है।

❖ उदाहरण ❖

उदा.8 $3x^3 + 16x^2 + 21x + 20$ को $x + 4$ से विभाजित कीजिए।

हल.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2+4x+5 \\ \hline x+4 & 3x^3+16x^2+21x+20 \\ & 3x^3+12x^2 \\ & -\quad - \\ \hline & 4x^2+21x+20 \\ & 4x^2+16x \\ & -\quad - \\ \hline & 5x+20 \\ & 5x+20 \\ & -\quad - \\ \hline & 0 \end{array}$$

भागफल का प्रथम पद $q(x)=\frac{3x^3}{x}=3x^2$

भागफल का द्वितीय पद $q(x)=\frac{4x^2}{x}=4x$

भागफल का तृतीय पद $q(x)=\frac{5x}{x}=5$

भागफल $= 3x^2 + 4x + 5$

शेषफल $= 0$

उदा.9 विभाजन नियम प्रयोग से भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए। जबकि p(x) को g(x) से विभाजित किया जाता हैं, जहाँ :

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

हल. हम जानते है,

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ व $g(x) = x^2 - 2$

$$\begin{array}{r|l} & x-3 \\ \hline x^2-2 & x^3-3x^2+5x-3 \\ & x^3 \qquad -2x \\ & - \qquad + \\ \hline & -3x^2+7x-3 \\ & -3x^2 \qquad +6 \\ & + \qquad - \\ \hline & 7x-9 \end{array}$$

भागफल का प्रथम पद $\frac{x^3}{x^2}=x$

भागफल का द्वितीय पद $\frac{-3x^2}{x^2}=-3$

हम इसे यहाँ रोकते है।

क्योंकि $(7x - 9)$ की घात $< (x^2 - 2)$ की घात

भागफल $= x - 3$, शेषफल $= 7x - 9$

इसलिये,

भागफल × भाजक + शेषफल

$= (x - 3)(x^2 - 2) + 7x - 9$

$= x^3 - 2x - 3x^2 + 6 + 7x - 9$

$= x^3 - 3x^2 + 5x - 3 =$ भाज्य

इस प्रकार विभाजन नियम सत्यापित हुआ।

उदा.10 विभाजन नियम प्रयोग से p(x) को g(x) से विभाजन होने पर भागफल व शेषफल ज्ञात करो

$p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

हल. हम जानते है,

$p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x-3 \\ \hline x^2-x+1 & x^4-3x^2+4x+5 \\ & x^4-x^3+x^2 \\ & -\ +\ - \\ \hline & x^3-4x^2+4x+5 \\ & x^3-x^2+x \\ & -\ +\ - \\ \hline & -3x^2+3x+5 \\ & -3x^2+3x-3 \\ & +\ -\ + \\ \hline & 8 \end{array}$$

हम इसे यहाँ रोकते है क्योंकि

(8) की घात $< (x^2 - x + 1)$ की घात

तो भागफल $= x^2 + x - 3$ शेषफल $= 8$

इसलिए

भागफल × भाजक + शेषफल

$= (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1) + 8$

$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x - 3x^2 + 3x - 3 + 8$

$= x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ = भाज्य

यहाँ विभाजन विधि सिद्ध हुई।

उदा.11 विभाजन नियम प्रयोग कर सिद्ध करो कि प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का गुणनखण्ड है। जहाँ प्रथम व द्वितीय बहुपद क्रमशः

$t^2 - 3;\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ हैं

हल. हम $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ को $t^2 - 3$ से विभाजित करेंगे

$$\begin{array}{r|l} & 2t^2+3t+4 \\ \hline t^2-3 & 2t^4+3t^3-2t^2-9t-12 \\ & 2t^4 \qquad -6t^2 \\ & - \qquad + \\ \hline & 3t^3+4t^2+9t-12 \\ & 3t^3 \qquad -9t \\ & - \qquad + \\ \hline & 4t^2 \qquad -12 \\ & 4t^2 \qquad -12 \\ & - \qquad + \\ \hline & 0 \end{array}$$

यहाँ शेषफल 0, है तो $t^2 - 3$

$2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12.$

$2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

$= (2t^2 + 3t + 4)(t^2 - 3)$

उदा.12 विभाजन नियम प्रयोग कर सिद्ध करो कि प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का गुणनखण्ड है। जहाँ प्रथम व द्वितीय बहुपद क्रमशः

$x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ है

हल. हम $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ को $x^2 + 3x + 1$ से विभाजित करेंगे

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 4x + 2 \\
\hline
x^2 - 3x + 1 & 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2 \\
 & 3x^4 + 9x^3 + 3x^2 \\
 & - \quad - \quad - \\
\hline
 & -4x^3 - 10x^2 + 2x + 2 \\
 & -4x^3 - 12x^2 - 4x \\
 & + \quad + \quad + \\
\hline
 & 2x^2 + 6x + 2 \\
 & 2x^2 + 6x^2 + 2 \\
 & - \quad - \quad - \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

इस प्रकार शेषफल शून्य है।

इस प्रकार, $x^2 + 3x + 1$ व्यंजक

$3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ का गुणनखण्ड है।

जाँच करने पर

$3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

$= (3x^2 - 4x + 2)(x^2 + 3x + 1) + 0$

$= 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2 =$ भाज्य

➤ शेषफल प्रमेय तथा गुणनखण्ड प्रमेय

शेषफल प्रमेय : मानाकि $p(x)$ कोई बहुपद है जिसकी घात एक के बराबर या बड़ी है तथा a कोई वास्तविक संख्या है। यदि $p(x)$ को रेखीय बहुपद $x - a$ से विभाजित किया जाता है, तब शेषफल $p(a)$ है।

उपपत्ति : मानाकि $p(x)$ कोई ऐसा बहुपद है जिसकी घात 1 के तुल्य या अधिक है। मान लो कि जब $p(x)$ को $x - a$ से विभाजित किया जाता है, तो भागफल $q(x)$ है तथा शेषफल $r(x)$ है अर्थात् $p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$

चूँकि $x - a$ की घात 1 है तथा $r(x)$ की घात $x - a$ की घात से कम है एवं $r(x)$ की घात शून्य है, तात्पर्य यह है कि $r(x)$ अचर है मानकि r है।

इस प्रकार x का प्रत्येक मान $r(x) = r$.

इस प्रकार $p(x) = (x - a)\, q(x) + r$

विशेषत : यदि $x = a$ तब समीकरण

$p(a) = (a - a)\, q(a) + r$

$= r,$

जिससे प्रमेय सिद्ध होती है।

उदा.13 जब $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $x - 1$ से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल. यहाँ $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ एवं $x - 1$ का शून्य 1 है।

अतः $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$

$= 2$

इस प्रकार शेषफल प्रमेय द्वारा 2 शेषफल है, जबकि $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $x - 1$ से विभाजित किया जाता है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

(i) बहुपद $p(x)$ को $x - a$ के द्वारा भाग देने पर शेषफल प्राप्त होता है। जो $p(a)$ के बराबर होता है।

(ii) यदि बहुपद $p(x)$ को $(x + a)$ के द्वारा भाग दें तो शेषफल $p(x)$ का $x = -a$ पर मान के तुल्य होता है।

(iii) यदि बहुपद $p(x)$ को $(ax - b)$ के द्वारा भाग दे तो शेषफल $p(x)$ का $x = b/a$ पर मान होता है।

(iv) यदि बहुपद $p(x)$ को $(b - ax)$ के द्वारा भाग दे तो शेषफल $p(x)$ का $x = b/a$ पर मान होता है।

(v) $(x - a)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड है यदि $p(a) = 0$ हो

(vi) $(x + a)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड है यदि $p(-a) = 0$ हों

(vii) $(ax - b)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड है यदि $p\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ हो।

(viii) (x–a) (x–b) बहुपद p(x) का एक गुणनखण्ड है यदि $p(a) = 0$ एवं $p(b) = 0$

❖ उदाहरण ❖

उदा.14 शेषफल ज्ञात करो जब व्यंजक $4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ में निम्न के द्वारा भाग दें तो

(a) $x - 1$ (b) $x + 2$ (c) $x + \frac{1}{2}$

हल. माना $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$

(a) जब p(x) में (x–1) के द्वारा भाग देते हैं तो शेषफल प्रमेय के द्वारा, अभीष्ट शेषफल = p(1) होगा

$p(1) = 4(1)^3 - 3(1)^2 + 2(1) - 4$

$= 4 \times 1 - 3 \times 1 + 2 \times 1 - 4$

$= 4 - 3 + 2 - 4 = -1$

(b) जब p(x) में (x + 2) के द्वारा भाग देते है तो शेषफल प्रमेय के अनुसार शेषफल p (–2) के बराबर होता है

$p(-2) = 4(-2)^3 - 3(-2)^2 + 2(-2) - 4$

$= 4 \times (-8) - 3 \times 4 - 4 - 4$

$= -32 - 12 - 8 = -52$

(c) जब p(x) में $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ के द्वारा भाग देते है तो शेषफल प्रमेय के अनुसार शेषफल

$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 4$

$= 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right) - 3 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} - 4$

$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 - 4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 5$

$= \frac{-2-3-20}{4} = \frac{-25}{4}$

उदा.15 शेषफल ज्ञात करो जब बहुपद

$p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ को $x - 1$ के द्वारा भाग दिया जाये।

हल. शेषफल प्रमेय के अनुसार शेषफल p(1) के समान प्राप्त होता है।

अब, $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$

$\Rightarrow p(1) = (1)^4 - 3\times1^2 + 2 \times 1 + 1$

$= 1 - 3 + 2 + 1 = 1$

अतः अभीष्ट शेषफल = p(1) = 1

उदा.16 बहुपद $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x + 2$ को जब x + 2 के द्वारा भाग देते है तो शेषफल ज्ञात करो

हल. हम जानते है कि, x + 2 = x – (–2) तो शेषफल प्रमेय के अनुसार जब f(x) को (x–(–2)) के द्वारा विभाजित किया जाये तो शेषफल f(–2) के समान होगा

अब, $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x + 2$

$\Rightarrow f(-2) = 2(-2)^4 - 6(-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) + 2$

$\Rightarrow f(-2) = 2\times16 - 6 \times -8 + 2 \times 4 + 2 + 2$

$\Rightarrow f(-2) = 32 + 48 + 8 + 2 + 2 = 92$

अतः अभीष्ट शेषफल = 92

उदा.17 शेषफल ज्ञात करो जब

$p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 3$ को $g(x) = x - \frac{1}{2}$ के द्वारा विभाजित किया जाऐं

हल. शेषफल प्रमेय के अनुसार जब p(x) को $g(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)$ से विभाजित किया जाता है तो शेषफल $p\left(\frac{1}{2}\right)$ प्राप्त होता है।

अब, $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 3$

$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 14\left(\frac{1}{2}\right) - 3$

$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} - \frac{12}{4} + \frac{14}{2} - 3$

$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 3 + 7 - 3$

$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

अतः अभीष्ट शेषफल = $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

उदा.18 यदि बहुपदों $ax^3 + 4x^2 + 3x - 4$ व $x^3 - 4x + a$ को $(x-3)$ के विभाजित करने पर समान शेषफल आता है तो 'a' का मान ज्ञात करो ?

हल. माना $p(x) = ax^3 + 4x^2 + 3x - 4$ व $q(x) = x^3 - 4x + a$ दिये गये बहुपद है तो जब p(x) व q(x) को (x–3) के द्वारा विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्रमशः p(3) व q(3) प्राप्त होता है

दी गई शर्त के अनुसार,

$p(3) = q(3)$

$\Rightarrow a \times 3^3 + 4\times3^2 + 3\times 3 - 4 = 3^3 - 4\times3 + a$

$\Rightarrow 27a + 36 + 9 - 4 = 27 - 12 + a$

$\Rightarrow 26a + 26 = 0$

$\Rightarrow 26a = -26$

$\Rightarrow a = -1$

उदा.19 माना R_1 व R_2 वे शेषफल है जब बहुपद $x^3 + 2x^2 - 5ax - 7$ व $x^3 + ax^2 - 12x + 6$ को क्रमशः $x + 1$ व $x - 2$ के द्वारा विभाजित किया जाता है यदि $2R_1 + R_2 = 6$ हो तो a का मान ज्ञात करो

हल. माना $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5ax - 7$ व

$q(x) = x^3 + ax^2 - 12x + 6$ दिये गये बहुपद है

अब, R_1 = वह शेषफल जब p(x), x + 1 के द्वारा विभाजित हो।

$\Rightarrow R_1 = p(-1)$

$\Rightarrow R_1 = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5a \times -1 - 7$

$[\because p(x) = x^3 + 2x^2 - 5ax - 7]$

$\Rightarrow R_1 = -1 + 2 + 5a - 7$

$\Rightarrow R_1 = 5a - 6$

और, R_2 = शेषफल है जब q(x), x – 2 द्वारा विभाजित हो

$\Rightarrow R_1 = q(2)$

$\Rightarrow R_2 = (2)^3 + a \times 2^2 - 12\times 2 + 6$

$[\because q(x) = x^3 + ax^2 - 12x - 6]$

$\Rightarrow R_2 = 8 + 4a - 24 + 6$

$\Rightarrow R_2 = 4a - 10$

R_1 व R_2 का मान समीकरण $2R_1 + R_2 = 6$ में रखने पर

$2(5a - 6) + (4a - 10) = 6$

$\Rightarrow 10a - 12 + 4a - 10 = 6$

$\Rightarrow 14a - 22 = 6$

$\Rightarrow 14a = 28$

$\Rightarrow a = 2$

➤ गुणनखण्ड प्रमेय

गुणनखण्ड प्रमेय :

यदि p(x) घात $n \geq 1$ का एक बहुपद है तथा a कोई वास्तविक संख्या हो, तब (i) x – a ; p(x) का एक गुणनखण्ड होता है यदि p(a) = 0 एवं (ii) p(a) = 0, यदि x – a , p(x) का गुणनखण्ड है।

उपपत्ति : शेषफल प्रमेय द्वारा

$p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a).$

(i) यदि p(a) = 0 तब p(x) = (x – a) q(x) जो दर्शाता है कि x – a , p(x) गुणनखण्ड है।

(ii) चूंकि x – a, p(x) का गुणनखण्ड है, जहाँ p(x) = (x – a) g(x) के लिए समान बहुपद g(x) है। इस अवस्था में p(a) = (a – a) g(a) = 0.

उदा.20 बतलाइये कि क्या x + 2, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ तथा 2x + 4 का गुणनखण्ड है।

हल. x + 2 का शून्य –2 है एवं मानाकि

$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ तथा $s(x) = 2x + 4$

तब $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6$

$= 0$

अतः गुणनखण्ड प्रमेय से x + 2, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ का एक गुणनखण्ड है।

पुनः $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

इस प्रकार x + 2 भी 2x + 4 का एक गुणनखण्ड है।

गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग करना :

पद 1 : $(x + a)$, बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि $p(-a) = 0$

पद 2 : $(ax-b)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि

$p(b/a) = 0$

पद 3 : $ax + b$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि

$p(-b/a) = 0$

पद 4 : $(x - a)\ (x - b)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि $p(a) = 0$ व $p(b) = 0$ हो।

❖ उदाहरण ❖

उदा.21 गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग कर बताइये कि $x - 1$ निम्न व्यंजकों का गुणनखण्ड है–

(a) $x^3 + 8x^2 - 7x - 2$

(b) $2\sqrt{2}\ x^3 + 5\sqrt{2}\ x^2 - 7\sqrt{2}$

(c) $8x^4 + 12x^3 - 18x + 14$

हल.(a) माना $p(x) = x^3 + 8x^2 - 7x - 2$

गुणनखण्ड होगा यदि $(x-1)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि $p(1) = 0$

$p\ (1) = (1)^3 + 8(1)^2 - 7(1) - 2$

$= 1 + 8 - 7 - 2$

$= 9 - 9 = 0$

इस प्रकार $(x - 1)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड है।

(b) माना $p(x) = 2\sqrt{2}\ x^3 + 5\sqrt{2}\ x^2 - 7\sqrt{2}$

गुणनखण्ड प्रमेय के अनुसार $(x-1)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा केवल जब $p(1) = 0$ हो।

$p(1) = 2\sqrt{2}\ (1)^3 + 5\sqrt{2}\ (1)^2 - 7\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$

$= 7\sqrt{2}\ - 7\sqrt{2}\ = 0$

इस प्रकार $(x-1)$,$p(x)$ का गुणनखण्ड है।

(c) माना $p(x) = 8x^4 + 12x^3 - 18\ x + 14$

गुणनखण्ड प्रमेय के अनुसार $(x-1)$,$p(x)$ का गुणनखण्ड होगा $p(1) = 0$

$p(1) = 8(1)^4 + 12(1)^3 - 18(1) +14$

$= 8 + 12 - 18 + 14$

$= 34 - 18 = 16 \quad 0.$

इस प्रकार $(x-1)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

उदा.22 निम्न व्यंजक का गुणनखण्ड कीजिए दिया गया है कि $x^3 + 13\ x^2 + 32\ x + 20$ का $(x+2)$ एक गुणनखण्ड है

हल. माना $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32\ x + 20$

$= (x+2)$,$p(x)$ का गुणनखण्ड है।

$p(x) = (x+2)\ (x^2 + 11\ x + 10)$

$= (x + 2)\ (x^2 + 10\ x + x + 10)$

$= (x+2)\ (x + 10)\ (x + 1)$

उदा.23 गुणनखण्ड कीजिए $x^3 - 23\ x^2 + 142\ x - 120$

हल. यदि $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142\ x - 120$

$p(x)$ का अचर पद $- 120$ है।

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm10, \pm12\ ....\pm120$

$P(1) = 1 - 23 + 142 - 120 = 0$

$\Rightarrow\ x - 1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड है। को

$p(x)$, $(x-1)$ के द्वारा विभाजित करने पर हम अन्य गुणनखण्ड प्राप्त कर सकते है।

$p(x) = (x- 1)\ (x^2-22x + 120)$

$= (x- 1)\ (x^2-10x - 12x + 120)$

$= (x- 1)\ [x(x-10) - 12(x-10))$

$= (x- 1)\ (x-10)\ (x- 12)$

उदा.24 सिद्ध करो कि $(x - 3)$ व्यंजक $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ का गुणनखण्ड है

हल. यदि $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ दिया गया बहुपद है गुणनखण्ड प्रमेय के द्वारा $(x - a)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि $p(a) = 0$ हो, इसलिए $x - 3$ को $p(x)$ का गुणनखण्ड सिद्ध करने के लिए यह आवश्यक है कि

$p(3) = 0.$ हो, अब

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

$\Rightarrow\ p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 4 \times 3 - 12$

$= 27 - 27 + 12 - 12 = 0$

इस प्रकार, $(x - 3)$ का गुणनखण्ड है

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12.$

उदा.25 सिद्ध करो कि $(x - 1)$, बहुपद $x^{10} - 1$ व $x^{11} - 1$ का गुणनखण्ड है।

हल. माना $f(x) = x^{10} - 1$ व $g(x) = x^{11} - 1.$

$(x - 1)$ को $f(x)$ व $g(x)$ का गुणनखण्ड सिद्ध करने के लिए यह आवश्यक है कि

$f(1) = 0$ व $g(1) = 0.$

अब, $f(x) = x^{10} - 1$ व $g(x) = x^{11} - 1$

$\Rightarrow f(1) = 1^{10} - 1 = 0$ व $g(1) = 1^{11} - 1 = 0$

$\Rightarrow (x - 1), f(x)$ व $g(x)$ का गुणनखण्ड है।

उदा.26 सिद्ध करो कि $x + 1$ व $2x - 3$ व्यंजक $2x^3 - 9x^2 + x + 12$ का गुणनखण्ड है।

हल. माना $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$ दिया गया बहुपद है $x + 1$ व $2x - 3$ व्यंजक $p(x)$, का गुणनखण्ड है तो, $p(-1)$ व $p(3/2)$ दोनों ही शून्य के समान होंगे।

अब, $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$

$\Rightarrow p(-1) = 2 \times (-1)^3 - 9 \times (-1)^2 + (-1) + 12$

व, $p\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} + 12$

$\Rightarrow p(-1) = -2 - 9 -1 + 12$ अब

$p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{54}{8} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + 12$

$\Rightarrow p(-1) = -12 + 12$ अब

$p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{54-162+12+96}{8}$

$\Rightarrow p(-1) = 0$ अब $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

इस प्रकार $(x + 1)$ व $(3x - 2)$ दिये गये बहुपद के गुणनखण्ड है।

उदा.27 यदि $x + 3$, व्यंजक $3x^2 + kx + 6$ का गुणनखण्ड है तो, k का मान होगा

उदा. यदि $p(x) = 3x^2 + kx + 6$ दिया गया बहुपद है तो $(x + 3)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा

$\Rightarrow p(-3) = 0$

$\Rightarrow 3(-3)^2 + k \times (-3) + 6 = 0$

$\Rightarrow 27 - 3k + 6 = 0$

$\Rightarrow 33 - 3k = 0 \Rightarrow k = 11$

इस प्रकार, $x + 3$ व्यंजक $3x^2 + kx + 6$ का गुणनखण्ड होगा यदि $k = 11$

उदा.28 यदि $x + 2$ व्यंजक $ax^3 + bx^2 + x - 6$ का गुणनखण्ड है, व जब $(x - 2)$ से विभाजित करते है तो शेषफल 4 आता है, तो a व b का मान होगा

हल. माना $p(x) = ax^3 + bx^2 + x - 6$ दिया गया बहुपद है तब $(x + 2)$,$p(x)$ का गुणनखण्ड होगा

$\Rightarrow p(-2) = 0$ $[x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2]$

$\Rightarrow a(-2)^3 + b(-2)^2 + (-2) - 6 = 0$

$\Rightarrow -8a + 4b - 2 - 6 = 0 \Rightarrow -8a + 4b = 8$

$\Rightarrow -2a + b = 2$ ....(i)

यह दिया गया है कि जब $p(x)$ को $(x - 2)$ के द्वारा विभाजित करते है तो शेषफल 4 आता है। इसलिए

$p(2) = 4$ $[x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2]$

$\Rightarrow a(2)^3 + b(2)^2 + 2 - 6 = 4$

$\Rightarrow 8a + 4b - 4 = 4 \Rightarrow 8a + 4b = 8$

$\Rightarrow 2a + b = 2$ ....(ii)

समी (i) व समीकरण (ii) को जोडने पर

$2b = 4 \Rightarrow b = 2$

$b = 2$ समीकरण (i) में रखने पर

$-2a + 2 = 2 \Rightarrow -2a = 0 \Rightarrow a = 0.$

इस प्रकार, $a = 0$ व $b = 2$ होगा।

उदा.29 यदि $x - 2$ व $x - \frac{1}{2}$ व्यंजक $px^2 + 5x + r$ के गुणनखण्ड हो तो सिद्ध कीजिए $p = r$ है।

हल. माना $f(x) = px^2 + 5x + r$ दिया गया बहुपद है और $x - 2$ व $x - \frac{1}{2}$; $f(x)$ के गुणनखण्ड है तो

$f(2) = 0$ व $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\left[\because x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ व } x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow\ p \times 2^2 + 5 \times 2 + r = 0$ व

$p\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \frac{1}{2} + r = 0$

$\Rightarrow\ 4p + 10 + r = 0$ व $\frac{p}{4} + \frac{5}{2} + r = 0$

$\Rightarrow\ 4p + r = -10$ व $\frac{p + 4r + 10}{4} = 0$

$\Rightarrow\ 4p + r = -10$ व $p + 4r + 10 = 0$

$\Rightarrow\ 4p + r = -10$ व $p + 4r = -10$

$\Rightarrow\ 4p + r = p + 4r$

[$\because$ RHS दोनों समीकरणों के समान हैं]

$\Rightarrow\ 3p = 3r \quad \Rightarrow\ p = r$

उदा.30 यदि $x^2 - 1$ व्यंजक $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, का गुणनखण्ड हो तो सिद्ध करो कि

$a + c + e = b + d = 0$

हल. माना $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ दिया गया बहुपद है। तब $(x^2 - 1)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड है।

$\Rightarrow$ $(x - 1)(x + 1)$ भी बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा।

$\Rightarrow$ $(x - 1)$ व $(x + 1)$ भी बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा।

$\Rightarrow\ p(1) = 0$ व $p(-1) = 0$

$[\, x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ व $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1]$

$\Rightarrow a + b + c + d + e = 0$ व $a - b + c - d + e = 0$

दोनों समीकरणों को जोड़ने व घटाने पर हमें

$2(a + c + e) = 0$ व $2(b + d) = 0$

$\Rightarrow\ a + c + e = 0$ व $b + d = 0$

$\Rightarrow\ a + c + e = b + d = 0$

उदा.31 गुणनखण्ड प्रमेय के अनुसार सिद्ध करो कि

$a - b,\ b - c$ व $c - a$ व्यजंक

$a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ के गुणनखण्ड होंगे।

हल. गुणनखण्ड प्रमेय के अनुसार $a - b$ दिये गये व्यंजक का गुणनखण्ड है तो $a = b$ व्यंजक में रखने पर शून्य आना चाहिये

$a = b$ व्यंजक में प्रतिस्थापित करने पर

$a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

$= b(b^2 - c^2) + b(c^2 - b^2) + c(b^2 - b^2)$

$= b^3 - bc^2 + bc^2 - b^3 + c(b^2 - b^2) = 0$

$\therefore\ (a - b)$ व

$a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$.

इसी प्रकार हम देख सकते है कि $(b - c)$ व $(c - a)$ भी दिये व्यंजक के गुणनखण्ड होंगे।

इस प्रकार, $(a - b)$, $(b - c)$ व $(c - a)$ दिये व्यंजक के गुणनखण्ड है।

➢ बहुपदों के गुणनखण्ड में शेषफल प्रमेय के अनुप्रयोग

(i) बहुपद $p(x)$ को प्राप्त करो।

(ii) बहुपद $p(x)$ में अचर पद के सभी संभव गुणनखण्ड ज्ञात करों। उदाहरणतया बहुपद $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ में अचर पद 6 है व इसके गुणज $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ है।

(iii) मान एक गुणज को a कहेगें व x को दिये बहुपद में a से विस्थापित करेंगे, यदि बहुपद का मान शून्य हो जाता है तो $(x - a)$ बहुपद का गुणनखण्ड होगा।

(iv) बहुपद की घात के समान गुणनखण्ड ज्ञात करो। माना $(x-a), (x-b), (x-c)$.....

(v) माना $p(x) = k\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)$ ..... जहाँ k अचर है।

(vi) x का कोई मान a,b,c ...... के अलावा रखों व k का मान ज्ञात करो।

❖ उदाहरण ❖

उदा.32 गुणनखण्ड कीजिए $x^2 + 4 + 9z^2 + 4x - 6xz - 12z$

हल. तीन वर्गो x^2, $(2)^2$, $(3z)^2$ के कारण सर्वसमिका (vii) का प्रयोग करो।

$A = x^2 + (2)^2 + (3z)^2 + 4x - 6xz - 12z$

हम लिखते है कि अंतिम दो पद ऋणात्मक है व दोनों z से बने है। इस प्रकार हम A को लिख सकते है

$A = x^2 + (2)^2 + (-3z)^2 + 2.2x - 2.x.(-3z) + 2.2(-3z) = (x+2-3z)^2$

$= (x + 2 - 3z)(x + 2 - 3z)$

उदा.33 गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग कर बहुपद

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ के गुणनखण्ड करो।

हल. माना $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

व f(x) में अचर पद – 6 के तुल्य है जिसके गुणनखण्ड ±1, ± 2, ± 3, ± 6 हैं

x = 1 , f(x) में रखने पर

$f(1) = 1^3 - 6\times1^2 + 11\times 1 - 6$

$= 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

$\therefore$ (x– 1) , f(x) का गुणनखण्ड है।

इसी प्रकार, x – 2 व x – 3 भी f(x) का गुणनखण्ड है।

चूंकि f(x) की घात 3 है तो इसके तीन रेखीय गुणनखण्डों से ज्यादा गुणनखण्ड नहीं हो सकते।

माना f(x) = k (x–1) (x– 2) (x – 3). तब,

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = k(x-1)(x-2)(x-3)$

x = 0 दोनों पक्षों में रखने पर

$-6 = k(0-1)(0-2)(0-3)$

$\Rightarrow -6 = -6k \Rightarrow k = 1$

k = 1, f(x) = k (x– 1) (x– 2) (x–3), में रखने पर

f(x) = (x–1) (x– 2) (x – 3)

इस प्रकार, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$

उदा.34 गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग कर, बहुपद $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ के गुणनखण्ड कीजिए

हल. यदि $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

f(x) के अचर पद के गुणनखण्ड अब ±1, ±2, ±3 एवं ± 6

अब,

$f(1) = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 8 - 8 = 0$

$\Rightarrow$ (x – 1) , f(x) का गुणनखण्ड है।

$f(-1) = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 8 - 8 = 0$

$\Rightarrow$ x +1 , f(x) का गुणनखण्ड है

$f(2) = 2^4 + 2^3 - 7\times 2^2 - 2 + 6$

$= 16 + 8 - 28 - 2 + 6 = 0$

$\Rightarrow$ x–2, f(x) का गुणनखण्ड है

$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 7(-2)^2 - (-2) + 6$

$= 16 - 8 - 28 + 2 + 6 = -12 \neq 0$

$\Rightarrow$ x + 2, f(x) का गुणनखण्ड नहीं है।

$f(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 7(-3)^2 - (-3) + 6$

$= 81 - 27 - 63 + 3 + 6 = 90 - 90 = 0$

$\Rightarrow$ x + 3 , f (x) का गुणनखण्ड है।

इस प्रकार f(x) की घात 4 है। तो इसके रेखीय गुणनखण्डों 4 से ज्यादा नहीं होंगें।

इस प्रकार f (x) के गुणनखण्ड (x–1), (x+1), (x–2) व (x+3)

माना f(x) = k (x–1) (x+1) (x–2) (x + 3)

$\Rightarrow x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = k(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$

k = 0 दोनों पक्षों में रखने पर

$6 = k(-1)(1)(-2)(3) \Rightarrow 6 = 6k \Rightarrow k = 1$

k = 1 (i) में रखने पर

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$

उदा.35 गुणनखण्ड कीजिए, $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x - 6$

हल. माना $f(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x - 6$ दिया गया बहुपद है। तो अचर पद – 6 के गुणज क्रमशः

±1, ±2, ±3 व ±6, होगें

$f(-1) = 2(-1)^4 + (-1)^3 - 14(-1)^2 - 19(-1) - 6$

$= 2 - 1 - 14 + 19 - 6 = 21 - 21 = 0$

व,

$f(-2) = 2(-2)^4 + (-2)^3 - 14(-2)^2 - 19(-2) - 6$

$= 32 - 8 - 56 + 38 - 6 = 0$

तो x + 1 व x + 2 , f(x) के गुणनखण्ड

$\Rightarrow$ (x + 1) (x + 2) भी f(x) का गुणनखण्ड

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2$, f(x) का गुणनखण्ड

$f(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x - 6$ में

$x^2 + 3x + 2$ का भाग लगाने से अन्य गुणनखण्ड प्राप्त होंगे।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 5x - 3 \\
\hline
x^2 + 3x + 2 & 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x - 6 \\
 & 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 \\
 & - \quad - \quad - \\
\hline
 & -5x^3 - 18x^2 - 19x - 6 \\
 & -5x^3 - 15x^2 - 10x \\
 & + \quad + \quad + \\
\hline
 & -3x^2 - 9x - 6 \\
 & -3x^2 - 9x - 6 \\
 & + \quad + \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x - 6$

$= (x^2 + 3x + 2)(2x^2 - 5x - 3)$

$= (x + 1)(x + 2)(2x^2 - 5x - 3)$

अब $2x^2 - 5x - 3 = 2x^2 - 6x + x - 3$

$= 2x(x - 3) + 1(x - 3)$

$= (x - 3)(2x + 1)$

इस प्रकार, $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x - 6$

$= (x + 1)(x + 2)(x - 3)(2x + 1)$

उदा.36 गुणनखण्ड कीजिए, $9z^3 - 27z^2 - 100z + 300$, यदि $(3z + 10)$ दिये गये व्यंजक का गुणनखण्ड हो।

हल. व्यंजक $9z^3 - 27z^2 - 100z + 300$ यदि

$3z + 10$ का भाग लगाने से

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3z^2 - 19z + 30 \\
\hline
3z + 10 & 9z^3 - 27z^2 - 100z + 300 \\
 & 9z^3 + 30z^2 \\
 & - \quad - \\
\hline
 & -57z^2 - 100z + 300 \\
 & -57z^2 - 190z \\
 & + \quad + \\
\hline
 & 90z + 300 \\
 & 90z + 300 \\
 & - \quad - \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ 9z^3 - 27z^2 - 100z + 300$

$= (3z + 10)(3z^2 - 19z + 30)$

$= (3z + 10)(3z^2 - 10z - 9z + 30)$

$= (3z + 10)\{(3z^2 - 10z) - (9z - 30)\}$

$= (3z + 10)\{z(3z - 10) - 3(3z - 10)\}$

$= (3z + 10)(3z - 10)(z - 3)$

इस प्रकार, $9z^3 - 27z^2 - 100z + 300$

$= (3z + 10)(3z - 10)(z - 3)$

उदा.37 सरल कीजिए :

$$\frac{4x-2}{x^2-x-2} + \frac{3}{2x^2-7x+6} - \frac{8x+3}{2x^2-x-3}$$

हल. $$\frac{2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{3}{(2x-3)(x-2)} - \frac{8x+3}{(2x-3)(x+1)}$$

हर में गुणनखण्ड का ल.स.प. $(x-2)(x+1)(2x-3)$ है

दी गई व्यंजक का सरलतम रूप

$$\frac{2(2x-1)(2x-3) + 3(x+1) - (8x+3)(x-2)}{(x-2)(x+1)(2x-3)}$$

$$= \frac{2(4x^2-8x+3) + 3(x+1) - (8x^2-13x-6)}{(x-2)(x+1)(2x-3)}$$

$$= \frac{15}{(x-2)(x+1)(2x-3)}$$

उदा.38 सर्वसमिका को स्थापित करो

$$\frac{6x^2+11x-8}{3x-2} = (2x+5) + \frac{2}{3x-2}$$

हल. $3x - 2\ )\ 6x^2 + 11x - 8\ (\ 2x + 5$

$$
\begin{array}{l}
6x^2 - 4x \\
\hline
15x - 8 \\
15x - 10 \\
\hline
2
\end{array}
$$

$$\therefore\ \frac{6x^2+11x-8}{3x-2} = (2x+5) + \frac{2}{3x-2}$$

➤ बीजीय सर्वसमिकाएें

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (-a - b)^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$
$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$
$(-a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$
$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$
$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
यदि $a + b + c = 0$ तब $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

❖ उदाहरण ❖

उदा.39 निम्न में से प्रत्येक को विस्तारित कीजिए :

(i) $(3x - 4y)^2$ (ii) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$

हल. (i) हम जानते है कि

$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4y + (4y)^2$

$= 9x^2 - 24xy + 16y^2$

(ii) हम जानते है कि

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{x}{2} \times \frac{y}{3} + \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{3}xy + \frac{y^2}{9}$$

उदा.40 गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

(ii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$

हल. (i) हम जानते है कि

$(2x + 3y)(2x - 3y)$

$= (2x)^2 - (3y)^2$ [$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ प्रयोग करने पर]

$= (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

(ii) हम जानते है कि

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$$

$$= \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$$

$$= \left\{(x^2)^2-\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\right\}\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$$

$$= \left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right) = (x^4)^2 - \left(\frac{1}{x^4}\right)^2$$

$$= x^8 - \frac{1}{x^8}$$

उदा.41 सर्वसमिका के प्रयोग द्वारा निम्न का मान ज्ञात करो:

(i) 103×97 (ii) 103×103

(iii) $(97)^2$ (iv) $185 \times 185 - 115 \times 115$

हल. (i) हम जानते है कि

$103 \times 97 = (100 + 3)(100 - 3)$

$= (100)^2 - (3)^2 = 10000 - 9 = 9991$

(ii) हम जानते है कि

$103 \times 103 = (103)^2$

$= (100 + 3)^2 = (100)^2 + 2 \times 100 \times 3 + (3)^2$

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

(iii) हम जानते है कि

$(97)^2 = (100 - 3)^2$

$= (100)^2 - 2 \times 100 \times 3 + (3)^2$

$= 10000 - 600 + 9 = 9409$

(iv) हम जानते है कि

$185 \times 185 - 115 \times 115$

$= (185)^2 - (115)^2 = (185 + 115)(185 - 115)$

$= 300 \times 70 = 21000$

उदा.42 यदि $x + \frac{1}{x} = 6$ हो तो $x^4 + \frac{1}{x^4}$ ज्ञात कीजिए

हल. हम जानते है कि

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 34 \Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 = (34)^2$$

$$\Rightarrow (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 2 \times x^2 \times \frac{1}{x^2} = 1156$$

$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 1156 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 1156 - 2$

$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 1154$

उदा.43 यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 27$ तो $x - \frac{1}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल. हम जानते है कि

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 27 - 2$$

$$\left[\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 27 \text{ (दिया है)}\right]$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (\pm 5)^2 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm 5$$

उदा.44 यदि $x + y = 12$ एवं $xy = 32$ तो $x^2 + y^2$ का मान ज्ञात करो

हल. हम जानते है कि

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$\Rightarrow 144 = x^2 + y^2 + 2 \times 32$

[$x + y = 12$ व $xy = 32$ रखने पर]

$\Rightarrow 144 = x^2 + y^2 + 64$

$\Rightarrow 144 - 64 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 80$

उदा. 45 सिद्ध कीजिए :

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

$= [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

हल. हम जानते है कि

L.H.S. $= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

$= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2)$

$+ (c^2 - 2ca + a^2)$ [पदो को पुनः व्यवस्थित करने पर]

$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 =$ R.H.S.

अतः $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

$= [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

उदा.46 यदि $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ है तो सिद्ध कीजिए $a = b = c$

हल. हम जानते है कि

If $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 2 \times 0$

[2 के द्वारा दोनों पक्षो को गुणा करने पर]

$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2)$

$+ (c^2 - 2ac + a^2) = 0$

$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

$\Rightarrow a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$

[$\therefore$ धनात्मक राशियों का योग शून्य होगा यदि और केवल यदि प्रत्येक राशि शून्य हो]

$\Rightarrow a = b, b = c$ व $c = a$

$\Rightarrow a = b = c$

❖ उदाहरण ❖

उदा.47 निम्न का विस्तार कीजिए :

(i) $(9x + 2y + z)^2$ (ii) $(3x + 2y - z)^2$

(iii) $(x - 2y - 3z)^2$ (iv) $(-x + 2y + z)^2$

हल. सर्वसमिका का प्रयोग करने पर

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(i) हम जानते है कि

$(9x + 2y + z)^2$

$= (9x)^2 + (2y)^2 + z^2 + 2 \times 9x \times 2y$

$+ 2 \times 2y \times z + 2 \times 9x \times z$

$= 81x^2 + 4y^2 + z^2 + 36xy + 4yz + 18xz$

(ii) हम जानते है कि

$(3x + 2y - z)^2$

$= [3x + 2y + (-z)]^2$

$= (3x)^2 + (2y)^2 + (-z)^2 + 2 \times 3x \times 2y$
$+ 2 \times 2y \times (-z) + 2 \times 3x \times (-z)$

$= 9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 4yz - 6xz$

(iii) हम जानते है कि

$(x - 2y - 3z)^2$

$= [x + (-2y) + (-3z)]^2$

$= x^2 + (-2y)^2 + (-3z)^2 + 2 \times x \times (-2y)$
$+ 2 \times (-2y) \times (-3z) + 2 \times (-3z) \times x$

$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6zx$

(iv) हम जानते है कि

$(-x + 2y + z)^2$

$= [(-x) + 2y + z]^2$

$= (-x)^2 + (2y)^2 + z^2 + 2 \times (-x) \times (2y)$
$+ 2 \times 2y \times z + 2 \times (-x) \times z$

$= x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 4yz - 2zx$

उदा.48 यदि $a^2 + b^2 + c^2 = 20$ व $a + b + c = 0$, है तो $ab + bc + ca$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\Rightarrow (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow 0^2 = 20 + 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow -20 = 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow -\frac{20}{2} = \left\{\frac{2(ab+bc+ca)}{2}\right\}$

$\Rightarrow ab + bc + ca = -10$

उदा.49 यदि $a + b + c = 9$ व $ab + bc + ca = 40$, है तो $a^2 + b^2 + c^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow 9^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 40$

$\Rightarrow 81 = a^2 + b^2 + c^2 + 80$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$

उदा.50 यदि $a^2 + b^2 + c^2 = 250$ व $ab + bc + ca = 3$, है तो $a + b + c$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow (a + b + c)^2 = 250 + 2 \times 3$

$\Rightarrow (a + b + c)^2 = 256$

$\Rightarrow (a + b + c)^2 = (\pm 16)^2$

[दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर]

$\Rightarrow a + b + c = \pm 16$

❖ उदाहरण ❖

उदा.51 निम्न को विस्तार करके लिखो :

(i) $(2x + 3y)^3$ (ii) $(3x - 2y)^3$

हल.(i) सर्वसमिका में 2x को a व 3y को b लिखने पर

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, हम जानते है

$(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + (3y)^3 + 3 \times 2x \times 3y \times (2x + 3y)$

$= 8x^3 + 27^3 + 18xy \times 2x + 18xy \times 3y$

$= 8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

(ii) सर्वसमिका में 3x को a व 2y को b लिखने पर $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$, हम जानते है

$(3x - 2y)^3 = (3x)^3 - (2y)^3 - 3 \times 3x \times 2y$
$\times (3x - 2y)$

$= 27x^3 - 8y^3 - 18xy \times (3x - 2y)$

$= 27x^3 - 8y^3 - 54x^2y + 36xy^2$

उदा.52 यदि $x + y = 12$ व $xy = 27$, है तो $x^3 + y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$x + y = 12$ व $xy = 27$ सर्वसमिका में रखने पर

$12^3 = x^3 + y^3 + 3 \times 27 \times 12$

$\Rightarrow 1728 = x^3 + y^3 + 972$

$\Rightarrow x^3 + y^3 = 1728 - 972$

$\Rightarrow x^3 + y^3 = 756$

उदा.53 यदि $x - y = 4$ व $xy = 21$, है तो $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$x - y = 4$ व $xy = 21$, का मान होगा

$4^3 = x^3 - y^3 - 3 \times 21 \times 4$

$\Rightarrow 64 = x^3 - y^3 - 252 \Rightarrow 64 + 252 = x^3 - y^3$

$\Rightarrow x^3 - y^3 = 316$

उदा.54 यदि $x + \frac{1}{x} = 7$, हो तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times x \times \frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$x + \frac{1}{x} = 7$, रखने पर

$$7^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times 7$$

$$\Rightarrow 343 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 21$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 343 - 21 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 322$$

उदा.55 यदि $a + b = 10$ व $a^2 + b^2 = 58$, है तो $a^3 + b^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$a + b = 10$ व $a^2 + b^2 = 58$, रखने पर

$10^2 = 58 + 2ab \Rightarrow 100 = 58 + 2ab$

$\Rightarrow 100 - 58 = 2ab \Rightarrow 42 = 2ab$

$\Rightarrow ab = 21$ इस प्रकार

$a + b = 10$ एवं $ab = 21$ अब,

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$\Rightarrow 10^3 = a^3 + b^3 + 3 \times 21 \times 10$

[$a + b = 10$ एवं $ab = 21$ रखने पर]

$\Rightarrow 1000 = a^3 + b^3 + 630$

$\Rightarrow 1000 - 630 = a^3 + b^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 = 370$

उदा.56 यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, है तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \times x \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2 \left[x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \text{ रखने पर}\right]$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 9 \quad \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

[दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर]

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = 3^3 \text{ [दोनों पक्षों का घन करने पर]}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x+\frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) + 3 \times 3 = 27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 \quad \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

उदा.57 यदि $x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$ है तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 \times x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 2$$

$$\left[x^4 + \frac{1}{x^4} = 47 \text{ रखने पर}\right]$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 47 + 2$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 7^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

[दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर]

अब, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

$$\left[x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \text{ का प्रयोग करने पर}\right]$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3 \quad \text{[घन करने पर]}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times 3 = 27 \left[x + \frac{1}{x} = 3 \text{ रखने पर}\right]$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 \Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

उदा.58 यदि $a + b = 10$ व $ab = 21$, है तो $a^3 + b^3$ का ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 2ab - ab)$

[2ab को दूसरे कोष्ठक में जोड़ने व घटाने पर]

$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$

$= 10 \times (10^2 - 3 \times 21)$

$= 10 \times (100 - 63) = 10 \times 37 = 370.$

उदा.59 यदि $a - b = 4$ व $ab = 45$, है तो $a^3 - b^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 2ab + ab)$

$= (a - b)\{(a - b)^2 + 3ab\}$

$= 4 \times (4^2 + 3 \times 45) = 4 \times (16 + 135)$

$= 4 \times 151 = 604.$

❖ उदाहरण ❖

उदा.60 यदि $a + b + c = 0$, है तो सिद्ध कीजिए

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

हल. हम जानते है कि

$a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$a + b + c = 0$ दांयी तरफ रखने पर

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\Rightarrow \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

उदा.61 निम्न गुणज को ज्ञात करो :

$(x + y + 2z)(x^2 + y^2 + 4z^2 - xy - 2yz - 2zx)$

हल. हम जानते है कि

$(x + y + 2z)(x^2 + y^2 + 4z^2 - xy - 2yz - 2zx)$

$= (x + y + 2z)(x^2 + y^2 + (2z)^2 - x \times y$

$- y \times 2z - 2z \times x)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$,

जहाँ $a = x, b = y, c = 2z$

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= x^3 + y^3 + (2z)^3 - 3 \times x \times y \times 2z$

$= x^3 + y^3 + 8z^3 - 6xyz$

उदा.62 यदि $a + b + c = 6$ व $ab + bc + ca = 11$, है तो $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$

$(a + b + c)\{(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)\}$...(i)

स्पष्टतया हमें $a + b + c$, $a^2 + b^2 + c^2$ व $ab + bc + ca$ के मान की जरूरत है और हमें $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान दिया है अतः हम $a + b + c$ व $ab + bc + ca$ $a^2 + b^2 + c^2$ का मान ज्ञात करते है।

हम जानते है

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\Rightarrow (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow 6^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 11$

[$a + b + c$ व $ab + bc + ca$ का मान रखने पर]

$\Rightarrow 36 = a^2 + b^2 + c^2 + 22$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 36 - 22$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 14$

अब $a + b + c = 6$, $ab + bc + ca = 1$ व $a^2 + b^2 + c^2 = 14$, (i) में रखने पर

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 6 \times (14 - 11)$

$= 6 \times 3 = 18$.

उदा.63 यदि $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = -1$ व $xyz = -1$, है तो $x^3 + y^3 + z^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि :

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 3xy - 3yz - 3zx)$

[$2xy + 2yz + 2zx$ को जोड़ने व घटाने पर]

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)\{(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)\}$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3 \times -1 = 1 \times \{(1)^2 - 3 \times -1\}$

[$x + y + z$, $xy + yz + zx$ का मान रखने पर

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3 = 4$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 4 - 3$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 1$

➤ गुणनखण्ड के प्रकार

◈ प्रकार I : उभयनिष्ठ गुणनखण्डो को निकाल कर गुणनखण्ड करना

उदा.64 निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड करो :

$2x^2 y + 6xy^2 + 10x^2y^2$

हल. $2x^2 y + 6xy^2 + 10x^2y^2 = 2xy(x + 3y + 5xy)$

◈ प्रकार II : पदों का समूह बनाकर गुणनखण्ड करना

उदा.65 निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड करो :

$a^2 - b + ab - a$

हल. $a^2 - b + ab - a$

$= a^2 + ab - b - a = (a^2 + ab) - (b + a)$

$= a(a + b) - (a + b) = (a + b)(a - 1)$

◈ प्रकार III : पूर्ण वर्ग बनाकर गुणनखण्ड करना

उदा.66 निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड करो :

$9x^2 + 12xy + 4y^2$

हल. $9x^2 + 12xy + 4y^2$

$= (3x)^2 + 2 \times (3x) \times (2y) + (2y)^2$

$= (3x + 2y)^2$

उदा.67 निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड करो :

$$\frac{x^2}{y^2} + 2 + \frac{y^2}{x^{2'}}, x \neq 0, y \neq 0$$

हल. $\frac{x^2}{y^2} + 2 + \frac{y^2}{x^{2'}}$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right).\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2$$

उदा.68 निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड करो

$$\left(5x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(5x - \frac{1}{x}\right) + 4, x \neq 0$$

हल. $= \left(5x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(5x - \frac{1}{x}\right) + 4$

$$= \left(5x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \times \left(5x - \frac{1}{x}\right) \times 2 + 2^2$$

$$= \left(5x - \frac{1}{x} + 2\right)^2$$

◈ **प्रकार IV : दो वर्गो के अन्तर द्वारा गुणनखण्ड करना**

उदा.69 गुणनखण्ड कीजिए :

(a) $2x^2y + 6xy^2 + 10x^2y^2$

(b) $2x^4 + 2x^3y + 3xy^2 + 3y^3$

हल. (a) $2x^2y + 6xy^2 + 10x^2y^2$

$= (2xy)(x + 3y + 5xy)$

(b) $2x^4 + 2x^3y + 3xy^2 + 3y^3$

$= (2x^4 + 2x^3y) + (3xy^2 + 3y^3)$

$= (2x^3 + 3y^2)(x + y)$

उदा.70 व्यंजक $4x^2 + 12xy + 9y^2$ का गुणनखण्ड करो

हल. यदि $4x^2 = (2x)^2 = a^2$ व $9y^2 = (3y)^2 = b^2$ जहाँ $a = 2x$ व $b = 3y$ है। तो हम सर्वसमिका (i) का प्रयोग कर दिये गये व्यंजक को $(a + b)^2$ के समान लिख सकते है।

$4x^2 + 12xy + 9y^2$

$= (2x)^2 + 2(x)(3y) + (3y)^2$

$= (2x + 3y)^2$

$= (2x + 3y)(2x + 3y)$

यदि व्यंजक A जिसके 3 पद, किसी व्यंजक का वर्ग हो तो उसे करने के लिए सर्वसमिका (vii) का उपयोग करते है।

उदा.71 निम्न व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $9x^2 - 4y^2$

(ii) $x^3 - x$

हल. (i) $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2$

$= (3x + 2y)(3x - 2y)$

(ii) $x^3 - x = x(x^2 - 1)$

$= x(x-1)(x+1)$

उदा.72 निम्न व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $36x^2 - 12x + 1 - 25y^2$

(ii) $a^2 - \frac{9}{a^2}, a \neq 0$

हल. (i) $36x^2 - 12x + 1 - 25y^2$

$= (6x)^2 - 2 \times 6x \times 1 + 1^2 - (5y)^2$

$= (6x-1)^2 - (5y)^2$

$= \{(6x - 1) - 5y\}\{(6x - 1) + 5y\}$

$= (6x - 1 - 5y)(6x - 1 + 5y)$

$= (6x - 5y - 1)(6x + 5y - 1)$

(ii) $a^2 - \frac{9}{a^2} = (a)^2 - \left(\frac{3}{a}\right)^2$

$= \left(a - \frac{3}{a}\right)\left(a + \frac{3}{a}\right)$

उदा.73 निम्न बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड कीजिए :

$x^4 - 81y^4$

हल. $x^4 - 81y^4 = [(x)^2]^2 - (9y^2)^2$

$= (x^2 - 9y^2)(x^2 + 9y^2)$

$= \{x^2 - (3y)^2\}(x^2 + 9y^2)$

$= (x - 3y)(x + 3y)(x^2 + 9y^2)$

उदा.74 निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड कीजिए:

$x(x+z) - y(y+z)$

हल. $x(x+z) - y(y+z) = (x^2 - y^2) + (xz - yz)$

$= (x-y)(x+y) + z(x-y)$

$= (x-y)\{(x+y) + z\}$

$= (x-y)(x+y+z)$

उदा.75 निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड कीजिए :

$x^4 + x^2 + 1$

हल. $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$

$= (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$

$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

◈ **प्रकार V : दो राशियों के घनों के अन्तर व योग का गुणनखण्ड कीजिए।**

(i) $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(iI) $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

उदा.76 निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड कीजिए :

$a^3 + 27$

हल. $a^3 + 27 = a^3 + 3^3 = (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$

उदा.77 सरल कीजिए : $(x+y)^3 - (x-y)^3 - 6y(x^2 - y^2)$

हल. माना $x + y = a$ व $x - y = b$.

तब $ab = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ व

$a - b = (x+y) - (x-y) = 2y$

$\therefore \quad (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6y(x^2 - y^2)$

$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)^3$

$= \{(x+y) - (x-y)\}^3 = (2y)^3 = 8y^3$

➤ मध्य पद का विभाजन कर द्विघातीय बहुपद का गुणनखण्ड करना

◈ **प्रकार I : यदि द्विघातीय बहुपद $x^2 + bx + c$ के रूप में हो तो गुणनखण्ड कीजिए।**

(i) यदि हम $x^2 + bx + c$ का गुणनखण्ड करना चाहते है तो हमे संख्या p व q ज्ञात करनी पड़ेगी जो इस प्रकार हों कि $p + q = b$ व $pq = c$ हो।

(ii) p व q को ज्ञात करने के बाद, हम मध्य को इस प्रकार विभाजित करते हैं कि $px + qx$ व पदों को समूह बनाकर गुणज प्राप्त करते है

❖ उदाहरण ❖

उदा.78 निम्न व्यंजक का गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $x^2 + 6x + 8$ (ii) $x^2 + 4x - 21$

हल. (i) $x^2 + 6x + 8$ का गुणनखण्ड करने के लिए हम दो संख्याऐ p व q प्राप्त करते है $p + q = 6$ व $pq = 8$ आ जाये।

अतः $2 + 4 = 6$ व $2 \times 4 = 8$ आ जाये।

हम जानते है कि द्विघात व्यंजक में मध्य पद 6x को $2x + 4x$ में विभक्त करते है ताकि

$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8$

$= (x^2 + 2x) + (4x + 8)$

$= x(x + 2) + 4(x + 2)$

$= (x + 2)(x + 4)$

(ii) $x^2 + 4x - 21$ को गुणनखण्ड करने हम दो संख्याऐ p व q इस तरह ज्ञात करना।

ताकि $p + q = 4$ व $pq = -21$ हो।

अतः $7 + (-3) = 4$ व $7 \times -3 = -21$ है

अब $x^2 + 4x - 21$ के मध्य पद 4x को $7x - 3x$, लिखने पर

$x^2 + 4x - 21 = x^2 + 7x - 3x - 21$

$= (x^2 + 7x) - (3x + 21)$

$= x(x + 7) - 3(x + 7) = (x + 7)(x - 3)$

उदा.79 निम्न द्विघातीय बहुपद का गुणनखण्ड कीजिए:

$x^2 - 21x + 108$

हल. $x^2 - 21x + 108$ का गुणनखण्ड करने के लिए हम दो संख्याऐं ज्ञात करते है जिसका योग − 21 व गुणन 108 हो।

अतः संख्या, $-21 = -12 - 9$ व $-12 \times -9 = 108$

$\therefore \ x^2 - 21x + 108 = x^2 - 12x - 9x + 108$

$= (x^2 - 12x) - (9x - 108)$

$= x(x - 12) - 9(x - 12)$

$= (x-12)(x - 9)$

उदा.80 मध्य पद का विभाजन कर व्यजंक $x^2 + 3\sqrt{3}x + 6$ के गुणनखण्ड कीजिए

हल. व्यंजक $x^2 + 3\sqrt{3}x + 6$ का गुणनखण्ड करने के लिए हम दो संख्या p व q ज्ञात करते है ताकि $p + q = 3\sqrt{3}$ व $pq = 6$ हो

तो, $2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ व $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ होगा

तो हम मध्य पद $3\sqrt{3}x$ को $2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x$ लिखेंगें

$x^2 + 3\sqrt{3}x + 6$

$= x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x + 6$

$= (x^2 + 2\sqrt{3}x) + (\sqrt{3}x + 6)$

$= (x^2 + 2\sqrt{3}x) + (\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \times \sqrt{3})$

$= x(x + 2\sqrt{3}) + \sqrt{3}(x + 2\sqrt{3})$

$= (x + 2\sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

◈ प्रकार II : बहुपद को $x^2 + bx + c$ के रुप में

उदा.81 गुणनखण्ड कीजिए : $(a^2 - 2a)^2 - 23(a^2 - 2a) + 120$.

हल. यदि $a^2 - 2a = x$. तब

$(a^2 - 2a)^2 - 23(a^2 - 2a) + 120$

$= x^2 - 23x + 120$

अब, $x^2 - 23x + 120 = x^2 - 15x - 8x + 120$

$= (x^2 - 15x) - (8x - 120)$

$= x(x - 15) - 8(x - 15)$

$= (x - 15)(x - 8)$

x की जगह $a^2 - 2a$ दोनों पक्षों में रखने पर

$(a^2 - 2a)^2 - 23(a^2 - 2a) + 120$

$= (a^2 - 2a - 15)(a^2 - 2a - 8)$

$= (a^2 - 5a + 3a - 15)(a^2 - 4a + 2a - 8)$

$= \{(a(a - 5) + 3(a - 5)\} \{a(a - 4) + 2(a - 4)\}$

$= \{(a - 5)(a + 3)\} \{(a - 4)(a + 2)\}$

$= (a - 5)(a + 3)(a - 4)(a + 2)$

उदा.82 मध्य पद का विभाजन कर व्यंजक $x^4 - 5x^2 + 4$ का गुणनखण्ड करना :

हल. माना $x^2 = y$. तब, $x^4 - 5x^2 + 4$

$= y^2 - 5y + 4$

अब, $y^2 - 5y + 4$

$= y^2 - 4y - y + 4$

$= (y^2 - 4y) - (y - 4)$

$= y(y - 4) - (y - 4)$

$= (y - 4)(y - 1)$

y को $x^2 - 4x$ की जगह दोनों पक्षों में रखने पर

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 2^2)(x^2 - 1^2)$

$= (x-2)(x+2)(x - 1)(x + 1)$

उदा.83 गुणनखण्ड कीजिए : $(x^2 - 4x)(x^2 - 4x - 1) - 20$

हल. दिया गया व्यंजक

$(x^2 - 4x)(x^2 - 4x - 1) - 20$

$= (x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 20$

यदि $x^2 - 4x = y$. है तो

$(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 20 = y^2 - y - 20$

अब, $y^2 - y - 20$

$= y^2 - 5y + 4y - 20$

$= (y^2 - 5y) + (4y - 20)$

$= y(y - 5) + 4(y - 5)$

$= (y - 5)(y + 4)$

इस प्रकार, $y^2 - y - 20 = (y - 5)(y + 4)$

y को $x^2 - 4x$ की जगह दोनों पक्षों में रखने पर

$(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 20$

$= (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x + 4)$

$= (x^2 - 5x + x - 5)\ (x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2)$

$= \{x\ (x - 5) + (x - 5)\}\ (x - 2)^2$

$= (x - 5)\ (x + 1)\ (x - 2)^2$

◈ **प्रकार III : व्यंजक का गुणनखण्ड करो जो कि द्विघात नहीं है लेकिन मध्य पद के विभाजन द्वारा उसका गुणनखण्ड कीजिए**

उदा.84 यदि $x^2 + px + q = (x + a)\ (x + b)$, तब $x^2 + pxy + qy^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल. हम जानते है कि,

$x^2 + px + q = (x + a)\ (x + b)$

$\Rightarrow\ x^2 + px + q = x^2 + x(a + b) + ab$

x, की समान घातों वाले पदों के गुणांको की तुलना करने पर

$p = a + b$ व $q = ab$

$\therefore\ x^2 + pxy + qy^2 = x^2 + (a + b)xy + aby^2$

$= (x^2 + axy) + (bxy + aby^2)$

$= x(x + ay) + by(x + ay)$

$= (x + ay)\ (x + by)$

उदा.85 निम्न व्यंजक का गुणनखण्ड करो

$x^2y^2 - xy - 72$

हल. व्यंजक $x^2y^2 - xy - 72$ का गुणनखण्ड करने के लिए हम दो संख्याऐं p व q इस प्रकार लेते है कि $p + q = -1$ व $pq = -72$ है

अतः $-9 + 8 = -1$ व $-9 \times 8 = -72$. अतः हम मध्य पद $-xy$ को $x^2y^2 - xy - 72$ as $- 9\ xy + 8\ xy$, so के रुप में लिखेंगे।

$x^2y^2 - xy - 72 = x^2y^2 - 9\ xy + 8\ xy - 72$

$= (x^2\ y^2 - 9xy) + (8xy - 72)$

$= xy\ (xy - 9) + 8\ (xy - 9)$

$= (xy - 9)\ (xy + 8)$

➢ यदि बहुपद $ax^2 + bx + c, a \neq 0, 1$के रुप में है तो गुणनखण्ड करना

◈ **प्रकार I : यदि बहुपद $ax^2 + bx + c$, जहाँ $a \neq 0$, 1 है। उसका गुणनखण्ड करना।**

(i) व्यंजक $ax^2 + bx + c$, का गुणनखण्ड करने के लिए संख्या l व m इस प्रकार लेते है कि $l + m = b$ व $lm = ac$ हो।

(ii) l व m ज्ञात करने के बाद, हम मध्य पद bx को $lx + mx$ के रुप में लिखते है व समूह बनाकर गुणनखण्ड करते है।

❖ उदाहरण ❖

उदा.86 निम्न व्यंजक का गुणनखण्ड करो :

$6x^2 - 5\ x - 6$

हल. दिया गया व्यंजक $ax^2 + bx + c$, के रुप में है, जहाँ $a = 6, b = -5$ तथा $c = -6$

यदि इसका गुणनखण्ड करना है तो हम दो संख्याऐं l व m इस प्रकार लेते हैं कि

$l + m = b =$ अर्थात् $l + m = -5$

व $lm = ac$ अर्थात् $lm = 6 \times -6 = -36$

अब हम -36 के दो गुणनखण्ड ऐसे करेंगे कि उनका योग -5 हो

$-9 + 4 = -5$ व $-9 \times 4 = -36$

$\therefore\ l = -9$ व $m = 4$

अब हम $x^2 - 5x - 6$ के मध्य पद $-5x$ को $-9\ x + 4x$ लिखेंगे

$6x^2 - 5x - 6 = 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= (6x^2 - 9x) + (4x - 6)$

$= 3x\ (2x - 3) + 2(2x - 3) = (2x - 3)\ (3x + 2)$

उदा.87 निम्न व्यंजको का गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $\sqrt{3}\,x^2 + 11x + 6\sqrt{3}$

(ii) $4\sqrt{3}\,x^2 + 5x - 2\sqrt{3}$

(iii) $7\sqrt{2}\,x^2 - 10\,x - 4\sqrt{2}$

हल. (i) दिया गया व्यंजक $ax^2 + bx + c$, के रुप में है जहाँ $a = \sqrt{3}$, $b = 11$ व $c = 6\sqrt{3}$

यदि इनका गुणनखण्ड करना है तो दो संख्याऐं l व m इस प्रकार लेते है कि

$l + m = b = 11$ व $lm = ac = \sqrt{3} \times 6\sqrt{3} = 18$

स्पष्टतया, $9 + 2 = 11$ व $9 \times 2 = 18$

$\therefore\ l = 9$ व $m = 2$

अब, $\sqrt{3}\,x^2 + 11\,x + 6\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}\,x^2 + 9x + 2x + 6\sqrt{3}$

$= (\sqrt{3}\,x^2 + 9x) + (2x + 6\sqrt{3})$

$= (\sqrt{3}\,x^2 + 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}\,x) + (2x + 6\sqrt{3})$

$= \sqrt{3}\,x\,(x + 3\sqrt{3}) + 2(x + 3\sqrt{3})$

$= (\sqrt{3}\,x + 2)\,(x + 3\sqrt{3})$.

इस प्रकार, $\sqrt{3}\,x^2 + 11\,x + 6\sqrt{3}$

$= (\sqrt{3}\,x + 2)\,(x + 3\sqrt{3})$

(ii) यहाँ, $a = 4\sqrt{3}$, $b = 5$ व $c = -2\sqrt{3}$

व्यंजक $4\sqrt{3}\,x^2 + 5x - 2\sqrt{3}$ का गुणनखण्ड करने के लिए हम दो संख्याऐ l व m इस प्रकार लेते है कि $l + m = b = 5$ व

$lm = ac = 4\sqrt{3} \times -2\sqrt{3} = -24$

अतः, $8 + (-3) = 5$ व $8 \times -3 = -24$

$\therefore\ l = 8$ व $m = -3$

अब, $4\sqrt{3}\,x^2 + 5x - 2\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}\,x^2 + 8x - 3x - 2\sqrt{3}$

$= (4\sqrt{3}\,x^2 + 8x) - (3x + 2\sqrt{3})$

$= 4x\,(\sqrt{3}\,x + 2) - \sqrt{3}\,(\sqrt{3}\,x + 2)$

$= (\sqrt{3}\,x + 2)\,(4x - \sqrt{3})$

(iii) यहाँ $7\sqrt{2}\,x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$ व $ax^2 + bx + c$, जहाँ $a = 7\sqrt{2}$, $b = -10$ व $c = -4\sqrt{2}$

व्यंजक $7\sqrt{2}\,x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$ का गुणनखण्ड करने के लिए हम दो संख्याऐ l व m इस प्रकार लेते है कि $l + m = b = -10$ व

$l\,m = ac = 7\sqrt{2} \times -4\sqrt{2} = -56$

अतः $-14+4 = -10$ व $-14 \times 4 = -56$

अतः $l = -14$ व $m = 4$

अब $-10\,x$ मध्य पद $7\sqrt{2}\,x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$ लिखने पर $-14\,x + 4x$ होंगे

$7\sqrt{2}\,x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$

$= 7\sqrt{2}\,x^2 - 14\,x + 4x - 4\sqrt{2}$

$= (7\sqrt{2}\,x^2 - 14x) + (4x - 4\sqrt{2})$

$= (7\sqrt{2}\,x^2 - 7\sqrt{2} \times \sqrt{2}\,x) + (4x - 4\sqrt{2})$

$= 7\sqrt{2}\,x\,(x - \sqrt{2}) + 4(x - \sqrt{2})$

$= (x - \sqrt{2})\,(7\sqrt{2}\,x + 4)$

उदा.88 मध्य पद के विभाजन द्वारा व्यंजक $\frac{1}{3}x^2 - 2x - 9$ का गुणनखण्ड करो :

हल. व्यंजक $\frac{1}{3}x^2 - 2x - 9$ का गुणनखण्ड करने के लिए l व m संख्याऐं इस प्रकार लेते हैं कि

$l + m = -2$ व $\quad l\,m = \frac{1}{3} \times -9 = -3$ हों

अतः $-3 + 1 = -2$ व $-3 \times 1 = -3$

तो $-2x$ मध्य पद को $-3x + x$, लिखने पर

$\frac{1}{3}x^2 - 2x - 9 \quad = \frac{1}{3}x^2 - 3x + x - 9$

$= (\frac{1}{3}x^2 - 3x) + (x - 9) = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{9}{3}x) + (x - 9)$

$= (x-9)\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$

◈ प्रकार II : त्रिपद व्यंजक जो कि द्विघातीय नहीं है परन्तु मध्य पद के विभाजन द्वारा गुणनखण्ड करना

उदा.89 निम्न त्रिपद का माध्य पद के विभाजन द्वारा गुणनखण्ड करना:

$8a^3 - 2a^2b - 15\ ab^2$

हल. यहाँ $a^3 \times ab^2 = (a^2b)^2$ है अतः प्रथम व अंतिम पद के चरों का गुणन मध्य पद के चर के वर्ग के समान है अतः दिये त्रिपद को गुणनखण्ड करने के लिए, मध्य पद का विभाजन करने पर ताकि

$-2a^2b$ as $-12a^2b + 10\ a^2b$, ताकि

$8a^3 - 2a^2b - 15\ ab^2$

$= 8a^3 - 12a^2b + 10\ a^2b - 15\ ab^2$

$= 4a^2(2a - 3b) + 5\ ab\ (2a - 3b)$

$= (2a - 3b)\ (4a^2 + 5ab)$

$= (2a - 3b)\ a\ (4a + 5b)$

$= a\ (2a - 3\ b)\ (4a + 5b)$

◈ Type III : त्रिपद व्यंजक को द्विघात व्यंजक में बदलकर गुणनखण्ड करना-

उदा. 90 मध्य पद के विभाजन द्वारा निम्न व्यंजक का गुणनखण्ड करना :

(i) $9(x - 2y)^2 - 4(x - 2y) - 13$

(ii) $2(x + y)^2 - 9(x + y) - 5$

(iii) $8(a + 1)^2 + 2(a + 1)\ (b + 2) - 15(b + 2)^2$

हल. (i) दिया गया व्यंजक है

$9(x - 2y)^2 - 4(x - 2y) - 13.$

$x - 2y = a$, रखने पर

$9(x - 2y)^2 - 4(x - 2y) - 13 = 9a^2 - 4a - 13$

अब, $9a^2 - 4a - 13 = 9a^2 - 13a + 9a - 13$

$= (9a^2 - 13a) + (9a - 13)$

$= a(9a - 13) + (9a - 13)$

$= (a + 1)\ (9a - 13)$

a की जगह $x - 2y$ दोनों पक्षों में रखने पर

$9(x - 2y)^2 - 4(x - 2y) - 13$

$= (x - 2y + 1)\ \{9(x - 2y) - 13\}$

$= (x - 2y + 1)\ (9x - 18y - 13)$

(ii) दिया गया व्यजंक है

$2(x + y)^2 - 9(x + y) - 5$

व्यजंक में $x + y$ को a रखने पर

$2(x + y)^2 - 9(x + y) - 5 = 2a^2 - 9a - 5$

अब, $2a^2 - 9a - 5 = 2a^2 - 10a + a - 5$

$= (2a^2 - 10a) + (a - 5)$

$= 2a(a - 5) + (a - 5)$

$= (a - 5)\ (2a + 1)$

a की जगह $x + y$ दोनों पक्षों में रखने पर

$2(x + y)^2 - 9(x + y) - 5$

$= (x + y - 5)\ \{2(x + y) + 1\}$

$= (x + y - 5)\ (2x + 2y + 1).$

(iii) दिया गया त्रिपद है।

$8(a + 1)^2 + 2(a + 1)\ (b + 2) - 15(b + 2)^2$

$a + 1 = x$ व $b + 2 = y$ रखने पर

$8(a + 1)^2 + 2(a + 1)\ (b + 2) - 15(b + 2)^2$

$= 8x^2 + 2xy - 15y^2$

$= 8x^2 + 12xy - 10xy - 15y^2$

$= 4x(2x + 3y) - 5y(2x + 3y)$

$= (2x + 3y)\ (4x - 5y)$

x by $a + 1$ व y by $b + 2$, रखने पर

$8(a + 1)^2 + 2(a + 1)\ (b + 2) - 15(b + 2)^2$

$= \{2(a + 1) + 3(b + 2)\}\ \{4(a + 1) - 5(b + 2)\}$

$= (2a + 3b + 8)\ (4a - 5b - 6)$

➤ गणितीय व्यंजक $a^3 + b^3 + c^3$, जब $a + b + c = 0$ के रुप में हो तो गुणनखण्ड करना

❖ उदाहरण ❖

उदा.91 गुणनखण्ड कीजिए :

$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

हल. माना $x - y = a$, $y - z = b$ व $z - x = c$, तब

$a + b + c = x - y + y - z + z - x = 0$

$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$\Rightarrow (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$

उदा.92 गुणनखण्ड कीजिए :

$(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3$

हल. हम जानते है,

माना $x = a^2-b^2$, $y = b^2-c^2$ व $z = c^2-a^2$ तब,

$x + y + z = a^2-b^2 + b^2-c^2 + c^2-a^2 = 0$

$\therefore \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

$\Rightarrow \quad (a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3$

$= 3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$

$= 3(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)$

$= 3(a+b)(b+c)(c+a)(a-b)(b-c)(c-a)$

उदा.93 सरल कीजिए

$$\frac{(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}$$

हल. हम जानते है,

$(a^2-b^2) + (b^2-c^2) + (c^2-a^2) = 0$

$\therefore \quad (a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3$

$= 3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$

$= 3(a-b)(a+b)(b-c)(b+c)(c-a)(c+a)$

इसी प्रकार,

$(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$

$\Rightarrow (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

$$\therefore \quad \frac{(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}$$

$$= \frac{3(a-b)(a+b)(b-c)(b+c)(c-a)(c+a)}{3(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$= (a+b)(b+c)(c+a)$

उदा.94 $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$ का मान ज्ञात कीजिए जब $x = 2y + 6$

हल. हम जानते है कि, $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$

$= x^3 + (-2y)^3 + (-6)^3 - 3(x)(-2y)(-6)$

$= (x - 2y - 6)(x^2 + 4y^2 + 36 + 2xy - 12y + 6x)$

$= 0 \times (x^2 + 4y^2 + 36 + 2xy - 12y + 6x)$

$[\because x = 2y + 6 \Rightarrow x - 2y - 6 = 0]$

$= 0$

➤ $x^3 \pm y^3$ का गुणनखण्ड करना

गणितीय व्यंजक यदि दो घनों के योग व अंतर से बना हो तो हम निम्न सर्वसमिका का प्रयोग कर उनका गुणनखण्ड करते है।

(i) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

(ii) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

❖ उदाहरण ❖

उदा.95 गुणनखण्ड करो $27x^3 + 64y^3$

हल. $27x^3 + 64y^3 = (3x)^3 + (4y)^3$

$= (3x + 4y)\{(3x)^2 - (3x)(4y) + (4y)^2\}$,

$= (3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)$

उदा.96 गुणनखण्ड करो $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 8$

हल. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 8 = (a+b)^3 - 2^3$

$= \{(a+b) - 2\}\{(a+b)^2 + (a+b).2 + 2^2\}$

$= (a + b - 2)(a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b + 4)$

उदा.97 गुणनखण्ड करो : $a^3 - 0.216$

हल. हम जानते है, $a^3 - 0.216 = a^3 - (0.6)^3$

$= (a - 0.6)[a^2 + 0.6a + (0.6)^2]$

$= (a - 0.6)(a^2 + 0.6a + 0.36)$

उदा.98 गुणनखण्ड करो :

(i) $(x+1)^3 - (x-1)^3$ (ii) $8(x+y)^3 - 27(x-y)^3$

हल.

(i) $(x+1)^3 - (x-1)^3$

$= \{(x+1) - (x-1)\}\{(x+1)^2 + (x+1)(x-1) + (x-1)^2\}$

$= \{(x+1-x+1)\}\{(x^2+2x+1) + (x^2-1) + (x^2-2x+1)\}$

$= 2(x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 + x^2 - 2x + 1)$

$= 2(3x^2 + 1)$

(ii) हम जानते है $8(x+y)^3 - 27(x-y)^3$

$= \{2(x+y)\}^3 - \{3(x-y)\}^3$

$= \{2(x+y) - 3(x-y)\}[\{2(x+y)\}^2 - 2(x+y) \times 3(x-y) + \{3(x-y)\}^2]$

$= (2x + 2y - 3x + 3y)\{2(x^2 + 2xy + y^2) - 6(x^2 - y^2) + 3(x^2 - 2xy + y^2)\}$

$= (-x + 5y)(2x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x^2 + 6y^2$
$+ 3x^2 - 6xy + 3y^2)$
$= (-x + 5y)(-x^2 - 2xy + 11y^2)$

उदा.99 गुणनखण्ड करो :

(i) $x^6 - y^6$ (ii) $x^{12} - y^{12}$

हल. (i) हम जानते है, $x^6 - y^6$

$= (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2-y^2)\{(x^2)^2 + x^2 \times y^2 + (y^2)^2\}$

$= (x^2-y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$= (x-y)(x+y)\{(x^4+2x^2y^2+ y^4) - x^2y^2\}$

$= (x-y)(x+y)\{(x^2+y^2)^2 - (xy)^2\}$

$= (x+y)(x-y)\{(x^2+y^2-xy)(x^2 +y^2 + xy)\}$

$= (x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2 +xy+y^2)$

(ii) $x^{12} - y^{12} = (x^4)^3 - (y^4)^3$

$= (x^4-y^4)\{(x^4)^2 + x^4 \times y^4 + (y^4)^2\}$

$= (x^2)^2-(y^2)^2)\}(x^8 + x^4y^4 + y^8)$

$= (x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^8+2x^4y^4+ y^8 - x^4y^4)$

$= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)\{(x^4+y^4)^2 - (x^2y^2)^2\}$

$= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)\{(x^4+y^4-x^2y^2)$
$(x^4+y^4 + x^2y^2\}$

$= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)$
$\{(x^4+y^4 + 2x^2y^2)-x^2y^2)\}$

$= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)$
$\{(x^2+y^2)^2 - (xy)^2\}$

$= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)$
$(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$

$= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)$
$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

उदा.100 सिद्ध करो कि :

$$\frac{0.87\times0.87\times0.87+0.13\times0.13\times0.13}{0.87\times0.87-0.87\times0.13+0.13\times0.13} = 1$$

हल. हम जानते है

$$\frac{0.87\times0.87\times0.87+0.13\times0.13\times0.13}{0.87\times0.87-0.87\times0.13+0.13\times0.13}$$

$$= \frac{(0.87)^3+(0.13)^3}{(0.87)^2-0.87\times0.13+(0.13)^2}$$

$$= \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} \text{ जहाँ } a = 0.87 \text{ व } b= 0.13$$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a^2-ab+b^2)}$$

$= a + b = (0.87 + 0.13) = 1$

➤ व्यंजक $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का गुणनखण्ड करना

(i) गणितीय व्यंजक $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ के रुप में हो और उसका गुणनखण्ड करना हो तो हम निम्न सर्वसमिका का प्रयोग करते है

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x+y+z)(x^2+y^2 +z^2-xy - yz - zx)$

(ii) यदि $x + y + z = 0$, है तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

❖ उदाहरण ❖

उदा.101 गुणनखण्ड कीजिए : $8x^3 + 27y^3+ z^3 - 18\,xyz$

हल. हम जानते है,

$8x^3 + 27y^3+ z^3 - 18\,xyz$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + z^3 - 3 \times 2x \times 3\,y + z$

$= (2x + 3y + z)\{(2x)^2 + (3y)^2 + z^2 - 2x \times 3y$
$-3y \times z - z \times 2x\}$

$= (2x + 3y + z)\{(4x^2 + 9y^2 + z^2 - 6xy - 3yz - 2zx\}$

उदा.102 गुणनखण्ड कीजिए :

$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$

हल. हम जानते है,

$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$= \{(a+b) + (b+c) + (c+a)\}$

$\times\{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 - (a+b)(b+c)$
$- (b+c)(c+a) - (c+a)(a+b)\}$

$= (2a+2b + 2c)\{(a^2 + 2ab + b^2) + (b^2 + 2bc+c^2)$

$+ (c^2 + 2ca + a^2) - (ab + ac+b^2 + bc)$

$- (bc + ba + c^2 + ca) - (ca + cb + a^2 + ab)\}$

$= 2(a+b+c)\ (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc$

$+ 2ca - ab - ac - b^2 - bc - bc - ba - c^2 - ca$

$- ca - cb - a^2 - ab)$

$= 2(a+b+c)\ (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

उदा.103 व्यंजक $a^3 - b^3 + 1 + 3ab$ को गुणनखण्ड में बदलो

हल. $a^3 - b^3 + 1 + 3ab$

$= a^3 + (-b)^3 + 1^3 - 3\ (a)(-b)\ (1)$

$= (a-b+1)\ (a^2 + b^2 + 1 + ab - a + b)$

$= (a-b+1)\ (a^2 + b^2 + ab - a + b + 1)$

उदा.104 गुणनखण्ड करो :

$2\sqrt{2}\ a^3 + 8b^3 - 27c^3 + 18\sqrt{2}\ abc$

हल. $2\sqrt{2}\ a^3 + 8b^3 - 27c^3 + 18\sqrt{2}\ abc$

$= (\sqrt{2}\ a)^3 + (2b)^3 - (3c)^3 - 3(\sqrt{2}\ a)(2b)\ (-3c)$

$= (\sqrt{2}\ a + 2b - 3c)\ (2a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2\sqrt{2}\ ab$

$+ 6bc + 3\sqrt{2}\ ac)$

उदा.105 सिद्ध करो कि :

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= \frac{1}{2}\ (a+b+c)\ \{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

हल. हम जानते है कि,

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)\ (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\ (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab$

$- 2bc - 2ca)$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\ \{(a^2 - 2ab + b^2) +$

$(b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\ \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$