संख्या पद्धति

1
CHAPTER

CONTENTS (सूची)

- संख्या पद्धति
- परिमेय संख्याओं का दशमलव संख्याओं में निरूपण
- दशमलव संख्याओं को परिमेय संख्याओं में बदलना
- अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना
- करणी या करणी चिन्ह
- घातों के लिये कुछ नियम

➢ संख्या पद्धति

◈ **प्राकृत संख्याएँ (Natural Numbers) :**

वे सरल संख्याऐं जो गिनने में काम आती है जैसे 1, 2, 3, 4....... को प्राकृत संख्याऐं कहते है।

◈ **पूर्ण संख्याएँ (Whole numbers) :**

यदि प्राकृत संख्याओं में शून्य को भी शामिल कर लिया जाये, जैसे 0,1, 2, 3, 4... तो ऐसी संख्याओं के समुच्चय को, पूर्ण संख्याओं का समुच्चय कहते है तथा इन्हें W = {0, 1, 2, 3, 4....} से प्रदर्शित करते है

◈ **पूर्णांक (Integers) :**

सभी प्राकृत संख्याऐं तथा उनकी ऋणात्मक संख्याऐं एवं शून्य को मिलाकर बनने वाला संख्याओं का समुच्चय पूर्णांक संख्याऐं कहलाती है। पूर्णांक संख्याओं के समुच्चय को Z = {....–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,....} से प्रदर्शित करते हैं।

◈ **परिमेय संख्याएँ (Rational Number) :**

(i) परिमेय संख्याऐं वे संख्याऐं हैं जिन्हे $\frac{p}{q}$ रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p तथा q दोनों पूर्णांक है तथा $q \neq 0$.

(ii) एक परिमेय संख्या वह संख्या है जिसका दशमलव भाग परिमित (सांत) या अपरिमित (असांत) हो परन्तु दशमलव के पश्चात् एक या अधिक अंको की पुनरावृत्ति होती है।

(iii) एक परिमेय संख्या धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकती है।

◈ **सम्मिश्र संख्याएँ (Complex numbers) :**

सम्मिश्र संख्याऐं, काल्पनिक संख्याऐं होती है जिन्हें a + ib रूप में लिखा जाता है, जहाँ a तथा b वास्तविक संख्याऐं हैं एवं $i = \sqrt{-1}$ होता है, जो कि काल्पनिक संख्या है।

◈ **गुणनखण्ड (Factors) :**

एक संख्या दूसरी संख्या का एक गुणनखण्ड होती है, यदि पूर्व वाली संख्या, बाद वाली संख्या को पूर्णतया विभाजित करती तथा शेषफल शून्य आता है, जैसे 3 व 5 क्रमशः 12 व 25 के गुणनखण्ड हैं।

◈ **गुणज (Multiples) :**

गुणज वह संख्या है, जो दूसरी संख्या से पूर्णतया विभाजित होती है जैसे 36 के गुणज 2, 3, 4, 9 व 12 हैं।

◈ **सम संख्याएँ (Even Numbers) :**

वे पूर्णांक संख्याऐं जो 2 की गुणज हों, सम संख्याऐं कहलाती है, जैसे 2,4, 6, 8.............. सम संख्याऐं हैं।

- **विषम संख्याएँ (Odd numbers) :**

  वे पूर्णांक संख्याऐं जो 2 की गुणज नहीं हैं, विषम संख्याऐं कहलाती है।

- **अभाज्य तथा भाज्य संख्याऐं (Prime and composite Numbers) :**

  वे प्राकृत संख्याऐं जो 1 व स्वंय के अलावा अन्य किसी भी संख्या से विभाजित नहीं हो सकती हैं, वे अभाज्य संख्याऐं कहलाती है। ध्यान दें कि 1 अभाज्य संख्या नहीं है, जबकि 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 .... अभाज्य संख्याऐं हैं और वे संख्याऐं जो अभाज्य नहीं है, भाज्य संख्याऐं कहलाती हैं।

- **वास्तविक संख्या का निरपेक्ष मान (या मापांक)**

  (The Absolute Value (or modulus) of a real Number) :

  यदि a कोई वास्तविक संख्या है जिसके मापाँक a को $|a|$ से निरूपित किया जाता है जहाँ $|a|$ सदैव धनात्मक या शून्य है। इसका तात्पर्य यह है कि 'a' का धनात्मक मान है, चाहे a धनात्मक या ऋणात्मक हो। $|3| = 3$ एवं $|0| = 0$

  अतः $|a| = a$; यदि $a = 0$ या $a > 0$ (i.e.) $a \geq 0$

  $|-3| = 3 = -(-3)$ अतः $|a| = -a$ जबकि $a < 0$

  अतः $|a| = a$, यदि $a > 0$; $|a| = -a$, यदि $a < 0$

- **अपरिमेय संख्याएँ (Irrational number) :**

  (i) वे वास्तविक संख्याऐं अपरिमेय है यदि और केवल यदि इनका दशमलव निरूपण अपरिमित एवं अपुनरावृत्त (असांत, अनावर्ती) हो जैसे $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π................ आदि

  (ii) परिमेय एवं अपरिमेय संख्याऐं मिलकर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय बनाती हैं

  (iii) यदि a व b दो वास्तविक संख्याऐं हो, तब (i) $a > b$ या (ii) $a = b$ या (iii) $a < b$

  (iv) अपरिमेय संख्या का ऋणात्मक भी अपरिमेय संख्या होती है।

  (v) परिमेय संख्या एवं अपरिमेय संख्या का योग सदैव अपरिमेय होता है

  (vi) अशून्य परिमेय संख्या का अपरिमेय संख्या से गुणनफल सदैव अपरिमेय संख्या होती है।

  (vii) दो अपरिमेय संख्याओं का योग सदैव अपरिमेय संख्या नहीं होता।

  (viii) दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव अपरिमेय संख्या नहीं होती।

- **परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers) :**

  $3, 4, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{7}, 2.7, 3.923, 1.42\overline{7}, 1.2343434,$ आदि

- **अपरिमेय संख्याऐं (Irrational Numbers) :**

  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \pi, 1.327185$…………

- **काल्पनिक संख्याऐं (Imaginary Numbers :**

  $\sqrt{-2}, \sqrt{-49}, 3i, \left(\frac{5}{7} + \frac{\sqrt{-3}}{8}\right),$ ………..

नोट:- $\pi = 3.14159265358979$…………. जबकि $\frac{22}{7} = 3.1428571428$…………

$\therefore\ \pi \neq \frac{22}{7}$ परन्तु गणना हेतु $\pi \approx \frac{22}{7}$.

❖ **उदाहरण** ❖

उदा.1 क्या शून्य परिमेय संख्या है? क्या आप इसे $\frac{p}{q}$ लिख सकते हैं, जहाँ p व q पूर्णांक हैं एवं $q \neq 0$?

हल. हाँ, शून्य परिमेय संख्या है। इसे हम $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ प्रकार से लिख सकते हैं, जहाँ हर का मान $q \neq 0$ होता है तथा यह ऋणात्मक भी हो सकता है।

उदा.2 $\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{5}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्याऐं ज्ञात कीजिए

हल. r व s के मध्य एक परिमेय संख्या $\frac{r+s}{2}$ होती है।

$\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{5}$ के मध्य परिमेय संख्या

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right) = \frac{7}{10}$$

$\frac{3}{5}$ व $\frac{7}{10}$ के मध्य परिमेय संख्या

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{10}\right) = \frac{13}{20}$$

इसी प्रकार $\frac{5}{8}, \frac{27}{40}, \frac{31}{40}$ वे परिमेय संख्याऐं हैं, जो $\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{5}$ के मध्य हैं।

अतः $\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{5}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्याऐं $\frac{5}{8}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{31}{40}, \frac{27}{40}$ हैं।

उदा.3 3 तथा 4 के मध्य छः परिमेय संख्याऐं ज्ञात कीजिए।

हल. इस प्रश्न को हम दो तरीकों से हल कर सकते हैं

विधि 1 :

r तथा s के मध्य परिमेय संख्या $\frac{r+s}{2}$ होती है।

अतः 3 तथा 4 के मध्य परिमेय संख्या

$$= \frac{1}{2}(3+4) = \frac{7}{2}$$

अब 3 तथा $\frac{7}{2}$ के मध्य परिमेय संख्या

$$= \frac{1}{2}\,\frac{6+7}{2} = \frac{13}{4}$$

इसी प्रकार प्रक्रिया को आगे बढ़ाते हुये हम तीन और परिमेय संख्याऐं जो 3 व 4 के मध्य आती हैं ज्ञात कर लेंगे।

अतः 3 व 4 के मध्य छः परिमेय संख्याऐं $\frac{15}{8}, \frac{13}{4}, \frac{27}{8}, \frac{7}{2}, \frac{29}{8}, \frac{15}{4}$ हैं।

विधि 2 :

चूंकि हमें 3 व 4 के मध्य छः संख्याऐं चाहिये जो परिमेय संख्याऐं हो तथा जिनका हर 6 + 1 हो अर्थात् $3 = \frac{21}{7}$ एवं $4 = \frac{28}{7}$

फिर हम यह जाँच करेंगे कि $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}$ व $\frac{27}{7}$ ये सभी 3 के 4 के मध्य में आते हैं। इस प्रकार 3 व 4 के मध्य छः संख्याऐं $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}$, व $\frac{27}{7}$ हैं।

उदा.4 क्या निम्नलिखित कथन सत्य या असत्य हैं? अपने उत्तर को कारण सहित बताइये।

(i) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्ण संख्या होती हैं।

(ii) प्रत्येक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या होती हैं।

(iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्ण संख्या होती हैं।

हल. (i) सत्य, क्योंकि प्राकृत संख्या का प्रारम्भ 1 से ∞ तक है तथा पूर्ण संख्या की शूरूआत 0 से ∞ होती है।

(ii) असत्य, क्योंकि ऋणात्मक पूर्णांक, पूर्ण संख्या नहीं होती हैं।

(iii) असत्य, क्योंकि परिमेय संख्या ऐसी है कि $\frac{1}{2}$ पूर्ण संख्या नहीं है।

उदा.5 3 व 5 के मध्य 3 अपरिमेय संख्याऐं ज्ञात कीजिए।

हल. $\because$ 3 व 5 दोनों परिमेय हैं

अपरिमेय संख्याऐं हैं 3.127190385……………

3.212325272930………

3.969129852937…………

उदा.6 4 व 5 के मध्य दो परिमेय तथा दो अपरिमेय संख्याऐं ज्ञात करो।

हल. परिमेय संख्याऐं $\frac{4+5}{2}=4.5$

व $\frac{4.5+4}{2}=\frac{8.5}{2}=4.25$

अपरिमेय संख्याऐं 4.12316908.........

4.562381032........

➢ परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

उदा.7 दीर्घ भागफल विधि से $\frac{7}{8}$ को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए।

हल. हम जानते हैं कि

```
8) 7.000 (0.875
   64
   60
   56
     40
     40
      0
```

$\therefore \quad \frac{7}{8}=0.875$

उदा.8 दीर्घ भागफल विधि से $\frac{35}{16}$ को दशमलव रूप में परिवर्त कीजिए।

हल. हम जानते हैं कि

```
16) 35.0000 (2.1875
    32
     30
     16
     140
     128
     120
     112
      80
      80
       0
```

$\therefore \quad \frac{35}{16}=2.1875$

उदा.9 $\frac{2157}{625}$ को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए।

हल. हम जानते हैं कि

```
625) 2154.0000 (3.4512
     1875
      2820
      2500
       3200
       3125
        750
        625
        1250
        1250
           0
```

$\therefore \quad \frac{2157}{625}=3.4512$

उदा.10 दीर्घ भागफल विधि द्वारा $\frac{-17}{8}$ को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए।

हल. $\frac{-17}{8}$ को दशमलव रूप में बदलने के लिए, सबसे पहले $\frac{17}{8}$ को दशमलव रूप में बदलें तथा $\frac{-17}{8}$ के दशमलव रूप को ऋणात्मक में लिखने पर $\frac{17}{8}$ का दशमलव रूप प्राप्त होता हैं।

हम जानते हैं कि

```
8) 17.000 (2.125
   16
   10
    8
    20
    16
    40
    40
     0
```

$\therefore \quad \frac{-17}{8}=-2.125$

उदा.11 $\frac{8}{3}$ को दशमलव रूप में प्रदर्शित कीजिए।

हल. दीर्घ भागफल विधि द्वारा, हम जानते है कि

```
3) 8.0000 (2.6666
   6
   20
   18
   20
   18
   20
   18
   20
   18
    2
```

$\therefore \quad \frac{8}{3} = 2.6666 \ ... = 2.\overline{6}$

उदा.12 $\frac{2}{11}$ को दशमलवाँश के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल. दीर्घ भागफल विधि द्वारा, हम जानते है कि

```
11) 2.00 (0.181818
    1 1
     90
     88
     20
     11
     90
     88
     20
     11
     90
     88
      2
```

$\therefore \quad \frac{2}{11} = 0.181818 \ ..... = 0.\overline{18}$

उदा.13 $\frac{-16}{45}$ को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए।

हल. दीर्घ भागफल विधि द्वारा, हम जानते है कि

```
45) 160 (0.3555
    135
     250
     225
     250
     225
     250
     225
      25
```

$\therefore \quad \frac{16}{45} = 0.3555 \ .... = 0.3\overline{5}$

अतः $\frac{-16}{45} = -\,0.3\overline{5}$

उदा.14 $\frac{22}{7}$ को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए।

हल. दीर्घ भागफल विधि द्वारा, हम जानते है कि

```
7) 22 (3.142857142857
   21
    10
     7
    30
    28
    20
    14
     60
     56
     40
     35
      50
      49
       10
        7
       30
       28
        20
        14
        60
        56
        40
        35
         50
         49
          1
```

$\therefore \quad \frac{22}{7} = 3.142857142857 \ ..... = 3..\overline{142857}$

इस प्रकार परिमेय संख्याओं का भागफल दशमलव विस्तार देता है एवं यह विस्तार दो प्रकार से निरूपित किया जाता है

(A) परिमित (शेषफल = 0) (सांत दशमलव संख्या)

उदा. $\frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \frac{7}{4}$,.........क्रमशः 1.2, 1.6, 1.75 है, इस प्रकार ये परिमित एवं अनआवर्ती हैं।

(B) अपरिमित (असांत) आवर्ती (पुनरावृत्त)

(शेषफल $\neq 0$, परन्तु भाज्यक के तुल्य)

उदा. $\frac{10}{3} = 3.333$ ……….. or $3.\overline{3}$

$\frac{1}{7} = 0.1428514285$……….or $0.\overline{142857}$

$\frac{2320}{99} = 23.434343$……..or $23.\overline{43}$

ये विस्तार अभी खत्म नहीं हुआ है परन्तु अंको की पुनरावृत्ति लगाकर हो रही है इसलिए हम एक रेखा उन अंको पर लगाते है जिसे बार ($\overline{a}$) कहते हैं।

इस प्रकार हम कह सकते है कि परिमेय संख्याऐं या तो परिमित, अनआवर्ती या अपरिमित आवर्ती होती हैं।

➤ दशमलव संख्याओं को $\frac{m}{n}$ रूप की परिमेय संख्याओं में परिवर्तित करना

स्थिति I : जब दशमलव संख्या परिमित प्रकार की है।

नियम :

पद-1 : परिमेय संख्या प्राप्त कीजिए।

पद-2 : दशमलव भाग में अंको की संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

पद-3 : अंश में से दशमलव बिन्दु को हटाए। हर में 1 लिखे तथा 1 के दायी ओर उतने भी शून्य रख सकते है, जितने की दी गई परिमेय संख्याँ में दशमलव बिन्दु के बाद अंको की संख्या है।

पद-4 : अंश तथा हर में उभयनिष्ठ भाज्यक को ज्ञात कीजिए तथा इसके अंश व हर को उभयनिष्ठ भाजक से विभाजित करने पर परिमेय संख्या को न्यूनतम पद के रुप में व्यक्त कीजिए।

उदा.15 निम्न संख्याओं को $\frac{p}{q}$ रुप में व्यक्त कीजिए

(i) 0.15 (ii) 0.675 (iii) –25.6875

हल. (i) $0.15 = \frac{15}{100}$

$= \frac{15 \div 5}{100 \div 5}$ [अंश तथा हर को उभयनिष्ठ भाज्य 5 से विभाजित करने पर]

$= \frac{3}{20}$

(ii) $0.675 = \frac{675}{1000}$

$= \frac{675 \div 25}{1000 \div 25} \Rightarrow = \frac{27}{40}$

(iii) $-25.6875 = \frac{-256875}{10000}$

$= \frac{-256875 \div 625}{10000 \div 625} = \frac{-411}{16}$

स्थिति II : जब दशमलव अपरिमित आवर्ती प्रकार को प्रदर्शित करता है।

अपरिमित आवर्ती प्रकार की दशमलव संख्या को दशमलवांश में दो तरीके से बदल सकते है।

(i) दशमलव जिसमें दशमलव बिन्दु के बाद सभी अंकों की पुनरावृति होती है। इस प्रकार के दशमलव को शुद्ध पुनरावृति दशमलव कहते है।

उदाहरण : शुद्ध पुनरावृति दशमलव $0.\overline{6}, 0.\overline{16}, 0.\overline{123}$ है।

(ii) दशमलव जिसमें दशमलव बिन्दु के बाद कम से कम एक अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती है। व इसके बाद कुछ अंकों की पुनरावृत्ति होती है। इस प्रकार के दशमलव को मिश्रित पुनरावृत्ति दशमलव कहते है।

उदाहरण : मिश्रित पुनरावृत्ति दशमलव $2.1\bar{6}$, $0.3\bar{5}$, $0.7\overline{85}$ है।

❖ शुद्ध पुनरावृत्ति दशमलव को $\frac{p}{q}$ रुप में परिवर्तित करना-

नियम :

पद-1 : शुद्ध तथा पुनरावृत्ति दशमलव को x के बराबर रखने पर

पद-2 : पुनरावृत्ति अंकों के ऊपर से बार हटाकर संख्या को दशमलव रुप में लिखते है। तथा पुनरावृत्ति अंक को कम से कम दो बार लिखते है।

उदाहरण : यदि $x = 0.\bar{8}$ तो $x = 0.888....$ तथा $x = 0.\overline{14}$, तो $x = 0.141414......$

पद-3 : अंको की संख्या ज्ञात कीजिए जिनके ऊपर बार है।

पद-4 : यदि आवर्ती दशमलव 1 स्थान आवर्तीत होता है तो 10 से गुणा करे, दो स्थान आवर्तीत होता है, तो 100; से गुणा करे, तीन स्थान आवर्तीत होता है; तो 1000 से गुणा करे और इस प्रकार आगे करे।

पद-5 : पद 2 से प्राप्त संख्या को पद 4 से प्राप्त संख्या से घटाने पर।

पद-6 : समीकरण के दोनों तरफ x के गुणांक का भाग देने पर।

पद-7 : परिमेय संख्या को सरलतम रुप में लिखने पर।

❖ उदाहरण ❖

उदा.16 निम्न दशमलव को $\frac{p}{q}$ रुप में व्यक्त कीजिए :

(i) $0.\bar{6}$ (ii) $0.\overline{35}$ (iii) $0.\overline{585}$

हल. (i) माना $x = 0.\bar{6}$

तब, $x = 0.666.......$ ....(i)

यहाँ, हम जानते है कि यहाँ केवल एक अंक की पुनरावृत्ति हो रही है। अतः हम (i) के दोनों तरफ 10 से गुणा करेगें जिसमें हमे मिलेगा

$10x = 6.66....$ ....(ii)

समीकरण (ii) में से समी. (i) को घटाने पर

$10x - x = (6.66.....) - (0.66.....)$

$\Rightarrow 9x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{9}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ इस प्रकार $0.\bar{6} = \frac{2}{3}$

(ii) माना $x = 0.\overline{35}$

$\Rightarrow x = 0.353535....$ ....(i)

यहाँ, हम देख रहे है कि पुनरावृत्ति अंक दशमलव के बाद दो है। अतः यहाँ (i) के दोनों तरफ $10^2 = 100$ से गुणा करेंगे तो मिलेगा

$100x = 35.3535......$ ....(ii)

समीकरण (ii) में से समी. (i) को घटाने पर

$100x - x = (35.3535....) - (0.3535....)$

$\Rightarrow 99x = 35$

$\Rightarrow x = \frac{35}{99}$

इस प्रकार, $0.\overline{35}$

(iii) माना $x = 0.\overline{585}$

$\Rightarrow x = 0.585585585...$ ....(i)

यहाँ, हम देख रहे है कि तीन पुनरावृत्ति अंक दशमलव बिन्दु के बाद है। अतः हम (i) के दोनो तरफ 1000 से गुणा करेंगे, तो मिलेगा

$1000x = 585.585585.........$ ....(ii)

समीकरण (ii) में से समी. (i) को घटाने पर

$1000x - x = (585.585585...) - (0.585585585...)$

$1000x - x = 585$

$\Rightarrow 999x = 585$

$\Rightarrow x = \frac{585}{999} = \frac{195}{333} = \frac{65}{111}$

दिए गए उदाहरण से हमें यह पता चलता है कि निम्न नियम शुद्ध पुनरावृत्ति दशमलव को परिमेय संख्या में $\frac{p}{q}$ रुप में परिवर्तित करता है।

उदा.17 निम्न दशमलव संख्याओं को $\frac{p}{q}$ रुप में परिवर्तित कीजिए :

(i) $5.\overline{2}$ (ii) $23.\overline{43}$

हल. (i) माना $x = 5.\overline{2}$

$\Rightarrow x = 5.2222$ ....(i)

(i) के दोनों तरफ 10 से गुणा करने पर, हमे मिलेगा

$10x = 52.222$ ....(ii)

समीकरण (ii) में से समी. (i) को घटाने पर

$10x - x = (52.222...) - (5.222....)$

$\Rightarrow 9x = 47$

$\Rightarrow x = \frac{47}{9}$

(ii) माना $x = 23.\overline{43}$

$\Rightarrow x = 23.434343.....$

(i) के दोनों तरफ 100 से गुणा करने पर

$100x = 2343.4343.......$ ....(ii)

समीकरण (ii) में से समी. (i) को घटाने पर

$100x - x = (2343.4343...) - (23.4343....)$

$\Rightarrow 99x = 2320$

$\Rightarrow x = \frac{2320}{99}$

◈ मिश्रित पुनरावृत्ति दशमलव को $\frac{p}{q}$ रुप में बदलना :-

नियम :

पद-1 : मिश्रित पुनरावृत्ति दशमलव को x के बराबर रखते है।

पद-2 : दशमलव बिन्दु के बाद अंको की संख्या ज्ञात कीजिए जिनके ऊपर बार नहीं है। माना यहाँ पर n अंक है, जिनके ऊपर बार नहीं है।

पद-3 : x के दोनों तरफ 10^n से गुणा करते है ताकि पुनरावृत्ति दशमलव, दशमलव बिन्दु के दायें हाथ की ओर आ जाये।

पद-4 : शुद्ध पुनरावृत्ति दशमलव को $\frac{p}{q}$ रुप में परिवर्तित करने वाली विधि का उपयोग करते हुए x का मान प्राप्त हुआ।

❖ उदाहरण ❖

उदा.18 निम्न को दशमलव रुप में व्यक्त कीजिए–

(i) $0.3\overline{2}$ (ii) $0.12\overline{3}$

हल. (i) माना $x = 0.3\overline{2}$

हमें दिख रहा है कि, दशमलव बिन्दु के बाद दायी तरफ केवल एक अंक है जिसके ऊपर बार है, अतः हम x के दोनों तरफ 10 से गुणा करेगे ताकि केवल पुनरावृत्ति दशमलव, दशमलव बिन्दु के दायी तरफ आये।

$\therefore 10x = 3.\overline{2}$

$\Rightarrow 10x = 3 + 0.\overline{2}$ $\left[\because 0.\overline{2} = \frac{2}{9}\right]$

$\Rightarrow 10x = 3 + \frac{2}{9}$

$\Rightarrow 10x = \frac{9 \times 3 + 2}{9} \Rightarrow 10x = \frac{29}{9}$

$\Rightarrow x = \frac{29}{90}$

(ii) माना $x = 0.12\overline{3}$

हमें दिख रहा है कि, दशमलव बिन्दु के दायी तरफ दो अंक है जिनके ऊपर बार नहीं है। अतः हम x के दोनों तरफ $10^2 = 100$ से गुणा करेगे, ताकि

$\therefore 100x = 12.\overline{3}$

$\Rightarrow 100x = 12 + 0.\overline{3}$

$\Rightarrow 100x = 12 + \frac{3}{9}$

$\Rightarrow 100x = \frac{12 \times 9 + 3}{9}$

$\Rightarrow 100x = \frac{108 + 3}{9}$

$\Rightarrow 100x = \frac{111}{9}$

$$\Rightarrow \ x = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$$

उदा.19 निम्न मिश्रित पुनरावृत्ति दशमलव को $\frac{p}{q}$ रुप में व्यक्त कीजिए

(i) $4.3\overline{2}$

(ii) $15.7\overline{12}$

हल. (i) माना $x = 4.3\overline{2}$

$\Rightarrow 10x = 43.\overline{2}$ [x के दोनों तरफ 10 से गुणा कीजिए]

$$\Rightarrow 10x = 43 + 0.\overline{2}$$

$$\Rightarrow 10x = 43 + \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow 10x = \frac{43 \times 9 + 2}{9}$$

$$\Rightarrow 10x = \frac{387 + 2}{9}$$

$$\Rightarrow 10x = \frac{389}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{389}{90}$$

(ii) माना $x = 15.7\overline{12}$. तब,

$$10x = 157.\overline{12}$$

$$\Rightarrow 10x = 157 + 0.\overline{12}$$

$$\Rightarrow 10x = 157 + \frac{12}{99}$$

$$\Rightarrow 10x = 157 + \frac{4}{33}$$

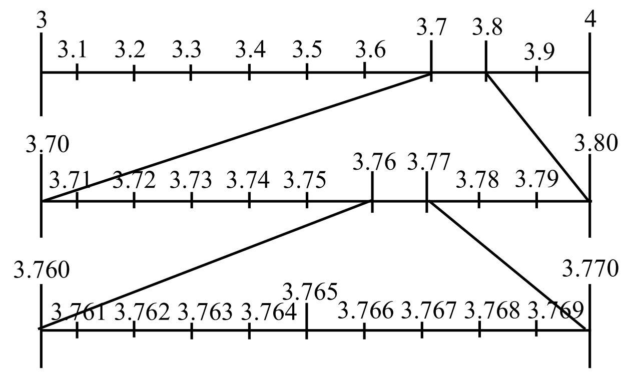
$$\Rightarrow 10x = \frac{157 \times 33 + 4}{33}$$

$$\Rightarrow 10x = \frac{5181 + 4}{33}$$

$$\Rightarrow 10x = \frac{5185}{33} \Rightarrow x = \frac{5185}{330} = \frac{1037}{66}$$

उदा.20 3.765 को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

हल. यह संख्या 3 तथा 4 के मध्य है। 3 तथा 4 के मध्य दूरी को 10 बराबर भाग में बांटिए। तब 3 के दायीं तरफ पहला चिन्ह 3.1 दूसरा चिन्ह 3.2 व इसी क्रम में आगे है। अब, 3.765 , 3.7 व 3.8 के बीच में स्थित है। अब हम 3.7 व 3.8 के बीच के दूरी को 10 बराबर भागों में बांटेगें। तो 3.76, 3.7 के दायीं और छठे चिन्ह पर व 3.77, 7 वें चिन्ह पर होगा। अतः 3.765, 3.76 व 3.77 के बीच में होगा।

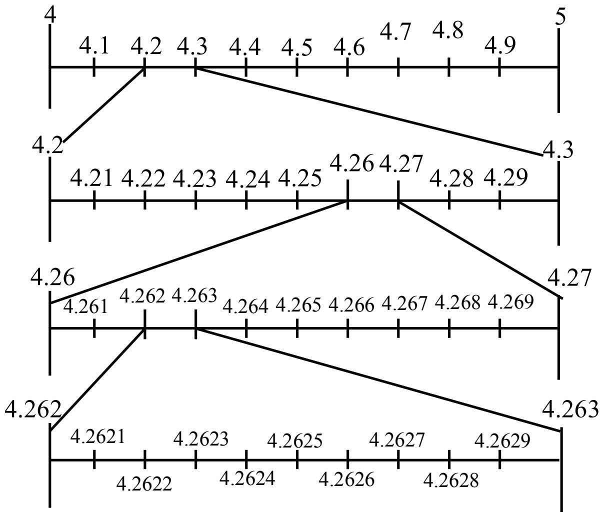


3.765 को चिन्हित करने के लिए सरल सूक्ष्मदर्शी का उपयोग करते है।

उदा.21 संख्या $4.\overline{26}$ को संख्या रेखा पर, दशमलव के चार स्थानों तक प्रदर्शित करो ?

हल. हम जानते है $4.\overline{26} = 4.2626$

यह संख्या 4 व 5 के बीच स्थित है अतः 4 व 5 के बीच की दूरी को 10 बराबर भागों में बांटते है। तब 4 के दायीं और पहला चिन्ह 4.1 , दूसरा चिन्ह 4.2 व इसी क्रम में आगे प्रदर्शित होता है। अब हम 4.2 व 4.3 के बीच की दूरी को 10 बराबर भागों में बांटते है, व 4.2626 , 4.26 व 4.27 के बीच में स्थित है। अब 4.26. व 4.27. के बीच की दूरी को पुनः 10 बराबर भागों में बांटते है तो संख्या 4.2626 संख्या 4.262, व 4.263 के बीच में स्थित है। अब हम 4.262 व 4.263 के मध्य दूरी को 10 बराबर भाग में बांटने पर दांये से छठा चिन्ह, 4.2626 को प्रदर्शित करता है।



उदा.22 दशमलव $0.003\overline{52}$ को $\frac{p}{q}$ रुप में व्यक्त कीजिए।

उदा. माना $x = 0.003\overline{52}$

हम देख रहे है कि, यहाँ दशमलव बिन्दु के बाद दायी तरफ तीन अंक ऐसे है जिन पर बार नहीं है अतः हम x के दोनों तरफ $10^3 = 1000$ से गुणा करेंगे ताकि केवल पुनरावृत्ति दशमलव, दशमलव बिन्दु के दायी तरफ हो।

$\therefore \quad 1000x = 3.\overline{52}$

$\Rightarrow \quad 1000x = 3 + 0.52$

$\Rightarrow \quad 1000x = 3 + \frac{52}{99}$

$\Rightarrow \quad 1000x = \frac{3 \times 99 + 52}{99} \Rightarrow 1000x = \frac{297 + 52}{99}$

$\Rightarrow \quad 1000x = \frac{349}{99} \Rightarrow x = \frac{349}{99000}$

उदा.23 दो अपरिमेय संख्याओं के लिए उदाहरण दीजिए, जिनका गुणा (i) परिमेय संख्या (ii) अपरिमेय संख्या

हल. (i) $\sqrt{27}$ तथा $\sqrt{3}$ का गुणा $\sqrt{81} = 9$ है जो परिमेय

(ii) $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$ का गुणा $\sqrt{6}$ है, जो अपरिमेय संख्या है।

उदा.24 2 तथा 3 के मध्य एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल. यदि a तथा b दो धनात्मक परिमेय संख्या इस प्रकार है कि ab परिमेय संख्या का पूर्ण वर्ग नहीं है, तब $\sqrt{ab}$ अपरिमेय संख्या है, जो a तथा b के मध्य स्थिति होगी। यदि a,b परिमेय संख्या है, तो $\frac{a+b}{2}$ परिमेय संख्या जो इनके मध्य स्थिति होगी।

$\therefore$ 2 तथा 3 के मध्य परिमेय संख्या $\frac{2+3}{2} = 2.5$ है।

2 तथा 3 के मध्य अपरिमेय संख्या है $\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$

उदा.25 2 तथा 2.5 के मध्य दो अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल. यदि दो भिन्न धनात्मक परिमेय संख्याएँ a तथा b इस प्रकार है कि ab परिमेय संख्या का पूर्ण वर्ग नहीं है, तब $\sqrt{ab}$ अपरिमेय संख्या है जो a तथा b के मध्य स्थित है।

$\therefore$ 2 तथा 2.5 के मध्य अपरिमेय संख्या $\sqrt{2 \times 2.5} = \sqrt{5}$ है।

इसी तरह 2 तथा $\sqrt{5}$ के मध्य अपरिमेय संख्या $\sqrt{2 \times \sqrt{5}}$ है।

अतः संख्याएँ $\sqrt{5}$ तथा $\sqrt{2 \times \sqrt{5}}$ है।

उदा.26 $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$ के मध्य दो अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल. हम जानते है कि, यदि a व b दो भिन्न धनात्मक अपरिमेय संख्या है तब $\sqrt{ab}$ अपरिमेय संख्या है

$\therefore$ $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$ के मध्य अपरिमेय संख्या $\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{6}} = 6^{1/4}$ है।

$\sqrt{2}$ तथा $6^{1/4}$ के मध्य अपरिमेय संख्या $\sqrt{\sqrt{2}\times 6^{1/4}} = 2^{1/4}\times 6^{1/8}$ है।

अतः अभीष्ट अपरिमेय संख्या $6^{1/4}$ तथा $2^{1/4}\times 6^{1/8}$ है।

उदा.27 0.12 तथा 0.13 के मध्य दो अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल. माना a = 0.12 तथा b = 0.13 है। हम देख सकते है कि परिमेय संख्या a तथा b इस प्रकार है कि $a < b$
हमने निरीक्षण किया कि संख्या a तथा b में दशमलव के प्रथम स्थान पर 1 है। तथा दशमलव के दूसरे स्थान के लिए a में 2 तथा b में 3 है। अतः हम संख्याओं पर विचार करेंगे -

c = 0.1201001000100001 ......

तथा, d = 0.12101001000100001.......

हम देख सकते है कि अपरिमेय संख्या c तथा d इस प्रकार है कि $a < c < d < b$.

उदा.28 0.232332333233332.... तथा 0.252552555255552...... के मध्य दो परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल. माना a = 0.232332333233332....
तथा b = 0.252552555255552..... है
संख्याऐं c = 0.25 तथा d = 0.2525 है
हम देख सकते है कि, c तथा d दोनों परिमेय संख्याएँ इस प्रकार है कि $a < c < d < b$

Ex.29 संख्याएँ a तथा b के मध्य एक अपरिमेय व एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए :

a = 0.101001000100001....,
b = 0.1001000100001...

हल. चूंकि a तथा b लिए दशमलवांश अपरिमित तथा अनआवर्ती प्रदर्शित करता है। अतः a तथा b अपरिमेय संख्याएँ है।

हमने प्रेक्षित किया के दशमलव के प्रथम दो स्थानों पर a तथा b के अंक समान होगें। परंतु दशमलव के तृतीय स्थान पर a के लिए अंक 1 जबकि b के लिए 0 है, $\therefore$ $a > b$

a तथा b के मध्य परिमेय संख्या लिखिए : जैसे कि ऊपर दिया गया है कि दशमलव बिन्दु के बाद प्रथम दो अंक a तथा b के समान है। परंतु तृतीय स्थान पर a के लिए अंक 1 तथा b के लिए 0 अंक है। अतः यदि हम संख्या c पर विचार करे जो दी गई है

c = 0.101

तब, c एक परिमेय संख्या है जो परिमित दशमलव को प्रदर्शित करती है।

चूंकि तृतीय स्थान पर b शून्य अंक देता है तथा c , 1 अंक रखता है।

$\therefore$ $b < c$

हमने यह भी प्रेक्षित किया कि $c < a$ क्योंकि दशमलव के तृतीय स्थान के बाद प्रत्येक स्थान पर c के लिए शून्य होगा जबकि छठे स्थान के लिए a 1 अंक को प्रदर्शित करता है।

इसलिए परिमेय संख्या c इस प्रकार है कि $b < c < a$

a तथा b के मध्य अपरिमेय संख्या d पर विचार कीजिए जो दी गई है

d = 0.1002000100001......

हमे देख सकते है कि अपरिमेय संख्या d के लिए दशमलव अपरिमित तथा अनआवर्ती को प्रदर्शित करता हैं।

हमने प्रेक्षित किया की दशमलव के प्रथम तीन स्थानों के लिए b तथा d समान अंक को प्रदर्शित करता है परंतु चौथे स्थान पर d तथा a; 2 देगा जबकि b केवल 1 देगा

$\therefore$ $d > b$

a तथा d, की तुलना करने पर हमें प्राप्त हुआ $a > d$

इसलिए अपरिमेय संख्या d इस प्रकार है कि $b < d < a$

उदा.30 संख्या $a = 0.1111..... = 0.\overline{1}$ तथा $b = 0.1101$ के मध्य एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल. हम देख सकते है कि a तथा b दो परिमेय संख्याएँ है, चूंकि a आवर्ती दशमलव है तथा b परिमित दशमलव है। हमने प्रेक्षित किया कि दशमलव के तृतीय स्थान पर a के लिए। जबकि b के लिए शून्य आएगा।

$\therefore \quad a > b$

दी गई संख्या c पर विचार कीजिए

$c = 0.111101001000100001.....$

स्पष्टतः कि c एक अपरिमेय संख्या है जिसके लिए दशमलव अनआवर्ती तथा अपरिमित प्रदर्शित किया गया है। हम देखते है कि b तथा c के दशमलव के प्रथम दो स्थानों पर समान अंक आता है। परंतु तृतीय स्थान में b के लिए शून्य जबकि

$\therefore \quad b < c$

c तथा a के दशमलव के प्रथम चार स्थानों पर समान अंक आएगा परंतु पाँचवे स्थान में c के लिए शून्य तथा a के लिए 1 आएगा।

$\therefore \qquad c < a$

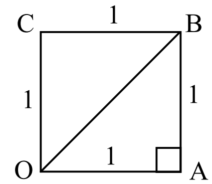
अर्थात्, $\quad b < c < a$

इसलिए, a तथा b के मध्य c वांछित परिमेय संख्या है

➤ संख्या रेखा पर अपरिमेय संख्या को प्रदर्शित करना

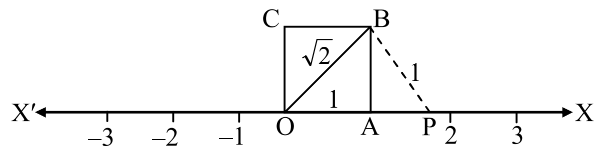
◈ **$\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$ को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना :**

इस विधि को ग्रीक ने खोज था। इकाई वर्ग OABC पर विचार करने पर, जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 1 इकाई है। तब पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करने पर संख्या रेखा पर इस वर्ग को स्थानान्तरित कीजिए



$OB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

शीर्ष O शून्य के साथ सम्पाती देखने के लिये



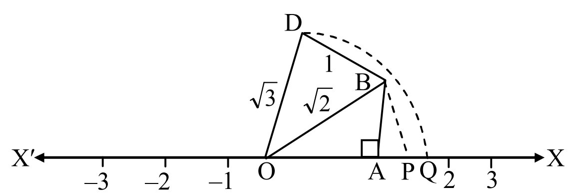
O को केन्द्र तथा OB को त्रिज्या लेते हुए चाप खीचें जो OX को P पर मिलता है। तब

$OB = OP = \sqrt{2}$ इकाई

तब, बिन्दु $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

अब $BD \perp OB$ इस प्रकार खींचे कि BD = 1 इकाई हो व OD को मिलाने पर, तब

$OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$ इकाई



O को केन्द्र तथा OD को त्रिज्या लेते हुए चाप खीचे जो Q को OX पर मिलता है। तब

$OQ = OD = \sqrt{3}$ इकाई

तब बिन्दु Q , $\sqrt{3}$ को प्रदर्शित करता है जो वास्तविक रेखा पर है।

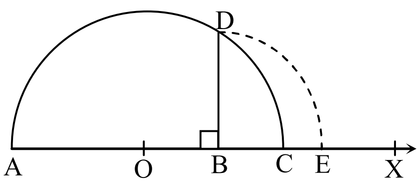
नोट : इस तरह से, हम $\sqrt{n}$ को किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए $\sqrt{n-1}$ के बाद प्रदर्शित कर सकते है।

◈ **धनात्मक वास्तविक संख्या के लिए $\sqrt{n}$ का अस्तित्व :**

ज्यामिति रुप में $\sqrt{4.3}$ का मान : -

रेखा खण्ड AB = 4.3 इकाई खींचे तथा उसे C तक इस प्रकार बढ़ाएँ कि BC = 1 इकाई हो।

AC का मध्य बिन्दु O ज्ञात कीजिए। O को केन्द्र तथा OA को त्रिज्या लेते हुए अर्धवृत्त खीचे।



अब BD $\perp$ AC खींचे, जो D पर अर्धवृत्त को प्रतिच्छेद करती है BD = $\sqrt{4.3}$ इकाई

B को केन्द्र तथा BD को त्रिज्या लेते हुए चाप खींचे, जो E को बढ़ाने पर AC पर मिलता है।

तब, BE = BD = $\sqrt{4.3}$ इकाई।

➤ करणी या करणी चिन्ह

◈ **वास्तविक संख्या रेखा (Real Number Line) :**

अपरिमेय संख्याएँ जैसे $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ इत्यादि संख्या रेखा पर बिन्दु द्वारा प्रदर्शित की गई है। चूंकि सभी परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएँ संख्या रेखा पर प्रदर्शित की गई है। अतः हम संख्या रेखा को वास्तविक संख्या रेखा कह सकते है।

◈ **करणी (Surds) :**

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{21}$,................ अपरिमेय संख्याएँ है। यह कुछ परिमेय संख्याओं के वर्गमूल है, जिन्हे किसी भी परिमेय संख्याओं के वर्ग नहीं लिख सकते है।

(i) यदि परिमेय संख्या a तथा धनात्मक पूर्णांक n इस प्रकार है कि a को $n^{वाँ}$ मूल अपरिमेय संख्या है तब $a^{1/n}$ को **करणी** या **करणी** चिन्ह कहते है।

उदा. $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ आदि

(ii) यदि a करणी है तब करणी के क्रम को 'n' कहते है तथा 'a' को **करणी चिन्ह कहते है।**

(iii) प्रत्येक करणी अपरिमेय संख्या है परंतु प्रत्येक अपरिमेय संख्या करणी नहीं होती है।

◈ **द्विघातीय करणी (Quadratic Surd) :**

2 क्रम की करणी को द्विघातीय करणी कहते है।

उदा.31 $\sqrt{3} = 3^{1/2}$ द्विघातीय करणी है परंतु $\sqrt{9} = 9^{1/2}$ द्विघातीय करणी नहीं है, क्योंकि $\sqrt{9} = 9^{1/2} = 3$ परिमेय संख्या है। अतः $\sqrt{9}$ करणी नहीं है।

◈ **घनीय करणी (Cubic surd) :**

3 क्रम की करणी को घनीय करणी कहते है।

उदा.32 वास्तविक संख्या $\sqrt[3]{4}$ घनीय करणी है परंतु वास्तविक संख्या $\sqrt[3]{8}$ घनीय करणी नहीं है, तथा यह करणी भी नहीं है।

◈ **चार घातीय करणी (Biquadratic surd) :**

4 क्रम वाली करणी को चार घतीय करणी कहते है। चार घातीय करणी को द्विघातीय करणी भी कहते है।

उदा.33 चार घातीय करणी $\sqrt[4]{5}$ है परंतु $\sqrt[4]{81}$ चार घातीय करणी नहीं है तथा यह करणी भी नहीं है।

◈ **करणी चिन्ह के नियम (Laws of radicals) :**

किसी धनात्मक पूर्णांक 'n' के लिए तथा धनात्मक परिमेय संख्या 'a' के लिए

(a) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

(b) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ [a या b में से कोई एक अऋणात्मक पूर्णांक है]

(c) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(e) $\sqrt[p]{\left(a^n\right)^m} = \sqrt[p]{a^{n.m}}$

(f) $\sqrt[p]{a^n \times a^m} = \sqrt[p]{a^{n+m}}$

(iv) केवल इकाई परिमेय गुणज वाली करणी को **शुद्ध करणी** कहते है।

(v) करणी, जो इकाई के अलावा परिमेय गुणज रखती है **मिश्रित करणी** कहते है।

(vi) समान अपरिमेय गुणज वाली करणी को समान या

(vii) केवल एक समान करणी के परिमेय भाग को जोड़ने या घटाने पर, करणी को जोड़ा या घटाया जा सकता है।

(viii) समान क्रम की करणी को ही गुणा या भाग दिया जा सकता है।

(ix) यदि करणीयाँ, जो समान क्रम में नहीं है। यदि उन्हे गुणा या भाग देना है तो हम सबसे पहले उन्हे समान क्रम की करणी बनायेंगे तथा बाद में उन्हें भाग या गुणा कर सकते है।

(x) यदि दो करणीयों का गुणा परिमेय संख्या है, तो प्रत्येक करणी को दूसरी करणी का परिमेय गुणज कहते है।

(xi) केवल एक पद रखने वाली करणी को **एकांकी करणी** कहते है।

(xii) कोई व्यंजक जो दो एकांकी करणीयों का योग या अंतर रखता है या एक एंकाकी करणी व एक परिमेय संख्या का योग या अंतर रखने वाली करणी को द्विपद करणी कहते है

उदा॰ $\sqrt{2}+\sqrt{5}, \sqrt{3}+2, \sqrt{2}-\sqrt{3}$ द्विपद करणी है।

(xiii) द्विपद करणीयाँ जिसमें संख्याओं को मिलाने वाले चिन्हों (+ या –) में अंतर होता है उन्हे हम **संयुग्मी करणीयाँ** कहते है।

उदा॰ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ or $2+\sqrt{5}$ तथा $2-\sqrt{5}$ संयुग्मी करणी है।

❖ उदाहरण ❖

उदा.34. निम्न को कारण सहित बताइए कि करणी है या नहीं :

(i) $\sqrt{64}$ (ii) $\sqrt{45}$

(iii) $\sqrt{20}\times\sqrt{45}$ (iv) $8\sqrt{10}\div4\sqrt{15}$

(v) $3\sqrt{12}\div6\sqrt{27}$ (vi) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}$

हल. (i) $\sqrt{64}=8$

8 एक परिमेय संख्या है, अतः $\sqrt{64}$ करणी नहीं है।

(ii) $\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$

अर्थात् $\sqrt{45}$ अपरिमेय संख्या है

क्योकि परिमेय संख्या 45 किसी भी परिमेय संख्या का वर्ग नहीं है, अतः $\sqrt{45}$ करणी है।

(iii) हम जानते है कि

$\sqrt{20}\times\sqrt{45}=\sqrt{900}$

$=\sqrt{30\times30}=\left(\sqrt{30}\right)^2=30$

जो कि परिमेय संख्या है तथा इसलिए $\sqrt{20}\times\sqrt{45}$ करणी नहीं है।

(iv) हम जानते है कि

$8\sqrt{10}\div4\sqrt{15}=\dfrac{8\sqrt{10}}{4\sqrt{15}}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{8}\right)^2\left(\sqrt{10}\right)}{\left(\sqrt{4}\right)^2\left(\sqrt{15}\right)}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{8}\times\sqrt{8}\times\sqrt{10}}{\sqrt{4}\times\sqrt{4}\times\sqrt{15}}$

$=\dfrac{\sqrt{8\times8\times10}}{\sqrt{4\times4\times15}}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{240}}$

$\Rightarrow\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$

जो कि अपरिमेय संख्या है। क्योकि परिमेय संख्या $\dfrac{8}{3}$ किसी भी परिमेय संख्या का वर्ग नहीं है, अतः दिया गया व्यंजक करणी है।

(v) $3\sqrt{12}\div6\sqrt{27}=\dfrac{3\sqrt{12}}{6\sqrt{27}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{12}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2\sqrt{27}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{12}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sqrt{27}}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3\times3\times12}}{\sqrt{6\times6\times27}}$

$\Rightarrow\sqrt{\dfrac{108}{972}}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$

अतः $\dfrac{1}{3}$ परिमेय संख्या है, इसलिए $3\sqrt{12}\div6\sqrt{27}$ करणी नहीं है।

(vi) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5\times25}$

$=\sqrt[3]{5\times5\times5}$

$\Rightarrow\sqrt[3]{5^3}=5$

जो कि परिमेय संख्या है। अतः $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25}$ अतः करणी नहीं है।

उदा.35 निम्न को हल कीजिए :

(i) $(\sqrt[3]{5})^3$ (ii) $\sqrt[3]{64}$

हल. (i) $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$ (पहला नियम लीजिए)

(ii) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$ (पहला नियम लीजिए)

उदा.36 निम्न के लिए x का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\sqrt[3]{4x-7} - 5 = 0$ (ii) $\sqrt[4]{3x+1} = 2$

हल. (i) $\sqrt[3]{4x-7} - 5 = 0$

$\Rightarrow \sqrt[3]{4x-7} = 5$

$\Rightarrow (\sqrt[3]{4x-7})^3 = 5^3$

$\Rightarrow 4x - 7 = 125$ $[(\sqrt[n]{a})^n = a]$

$\Rightarrow 4x = 132$

$\Rightarrow x = 33$

(ii) $\sqrt[4]{3x+1} = 2$

$\Rightarrow (\sqrt[4]{3x+1})^4 = 2^4$

$\Rightarrow 3x + 1 = 16$ $[(\sqrt[n]{a})^n = a]$

$\Rightarrow 3x = 15 \quad \Rightarrow x = 5$

उदा.37 निम्न को हल कीजिए :

(i) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$ (ii) $\sqrt[3]{128}$

हल. (i) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{3 \times 4} = \sqrt[3]{12}$

[दूसरा नियम लेने पर]

(ii) $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64 \times 2} = \sqrt[3]{64}\,\sqrt[3]{2}$

[दूसरा नियम लेने पर]

$= \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{2}$

$= 4\sqrt[3]{2}$ [पहला नियम लेने पर, $\sqrt[3]{4^3} = 4$]

उदा.38 निम्न को हल कीजिए :

(i) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt[4]{3888}}{\sqrt[4]{48}}$

हल. (i) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$ [तीसरा नियम लेने पर]

$= \dfrac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{2}{3}$ [प्रथम नियम लेने पर]

(ii) $\dfrac{\sqrt[4]{3888}}{\sqrt[4]{48}} = \sqrt[4]{\dfrac{3888}{48}}$ [तीसरा नियम लेने पर]

$= \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

[प्रथम नियम लेने पर]

उदा.39 निम्न को हल कीजिए

(i) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$ (ii) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}}$

Sol. (i) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$ [चतुर्थ नियम लेने पर]

(ii) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$ [चतुर्थ नियम लेने पर]

उदा.40 हल कीजिए : $\sqrt[5]{\sqrt[4]{(2^3)^4}}$

हल. ऊपर दिए गए नियम को लेने पर

$\sqrt[5]{\sqrt[4]{(2^3)^4}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$.

❖ शुद्ध तथा मिश्रित करणी (Pure And Mixed Surds):

(i) शुद्ध करणी (Pure Surd) :

एक करणी का परिमेय गुणज केवल इकाई है, दूसरा गुणज अपरिमेय हो, उसे **शुद्ध करणी** कहते है।

उदा.41 $\sqrt{3}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[4]{3}$ शुद्ध करणी है।

उदा.42 $\sqrt{6}, \sqrt[3]{12}$ शुद्ध करणी है।

(ii) मिश्रित करणी (Mixed Surd) :

एक करणी जिसके इकाई के अलावा परिमेय गुणज है, तो इसका दूसरा गुणज अपरिमेय होता है उसे **मिश्रित करणी** कहते है।

उदा.43 $2\sqrt{3}, 5\sqrt[3]{12}, 2\sqrt[4]{5}$ मिश्रित करणी है।

प्रकारI : मिश्रित करणी को शुद्ध करणी में व्यक्त करना

उदाहरण

उदा.44 निम्न को शुद्ध करणी में व्यक्त कीजिए।

(i) $2\sqrt{3}$ (ii) $2.\sqrt[3]{4}$

(iii) $\frac{3}{4}\sqrt{32}$ (iv) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$

हल. (i) $2\sqrt{3} = 2\times 3^{1/2} = (2^2)^{1/2}\times 3^{1/2} = 4^{1/2}\times 3^{1/2}$

$= (4\times 3)^{1/2} = 12^{1/2} = \sqrt{12}$

(ii) $2.\sqrt[3]{4} = 2\times 4^{1/3} = (2^3)^{1/3}\times 4^{1/3} = 8^{1/3}\times 4^{1/3}$

$= (8\times 4)^{1/3} = (32)^{1/3} = \sqrt[3]{32}$

(iii) $\frac{3}{4}\sqrt{32} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\times\sqrt{32} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2\times 32}$

$= \sqrt{\frac{9}{16}\times 32} = \sqrt{18}$

(iv) $\frac{3}{4}\sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\times\sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2\times 8}$

$= \sqrt{\frac{9}{16}\times 8} = \sqrt{\frac{9}{2}}$

उदा.45 निम्न को शुद्ध करणी में व्यक्त कीजिए -

(i) $\frac{2}{3}.\sqrt[3]{108}$ (ii) $\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{32}{243}}$

हल. (i) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{108} = \frac{2}{3}\times (108)^{1/3}$

$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{1/3}\times (108)^{1/3}$

$= \left(\frac{8}{27}\right)^{1/3}\times (108)^{1/3}$

$= \left(\frac{8}{27}\times 108\right)^{1/3}$

$= (8\times 4)^{1/3} = (32)^{1/3} = \sqrt[3]{32}$

(ii) $\frac{3}{2}.\sqrt[4]{\frac{32}{243}} = \frac{3}{2}\times\left(\frac{32}{243}\right)^{1/4}$

$= \left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^{1/4}\times\left(\frac{32}{243}\right)^{1/4}$

$= \left(\frac{81}{16}\right)^{1/4}\times\left(\frac{32}{243}\right)^{1/4} = \left(\frac{81}{16}\times\frac{32}{243}\right)^{1/4}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

उदा.46 निम्न को शुद्ध करणी में व्यक्त कीजिए :

(i) $a\sqrt{a+b}$ (ii) $a\sqrt[3]{b^2}$ (iii) $2ab\sqrt[3]{ab}$

हल. (i) $a\sqrt{a+b} = a\times (a+b)^{1/2}$

$= (a^2)^{1/2}\times (a+b)^{1/2}$

$= [a^2\times (a+b)]^{1/2}$

$= (a^3 + a^2b)^{1/2} = \sqrt{a^3 + a^2b}$

(ii) $a\sqrt[3]{b^2} = (a^3)^{1/3}\times (b^2)^{1/3} = (a^3\times b^2)^{1/3}$

$= \sqrt[3]{a^3b^2}$

(iii) $2ab.\sqrt[3]{ab} = \left((2ab)^3\right)^{1/3}\times (ab)^{1/3}$

$= (8\,a^3b^3.ab)^{1/3}$

$= (8\,a^4b^4)^{1/3} = \sqrt[3]{8a^4b^4}$

प्रकारII : दिए गए करणी को मिश्रित करणी के सरलतम रुप में व्यक्त करने पर

उदाहरण

उदा.47 निम्न को मिश्रित करणी के सरलतम रुप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt[3]{72}$ (iii) $\sqrt[5]{288}$

(iv) $\sqrt{1350}$ (v) $\sqrt[5]{320}$ (vi) $5.\sqrt[3]{135}$

हल. (i) $\sqrt{80} = \sqrt{16\times 5} = \sqrt{4^2\times 5} = \sqrt{4^2}\times\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

(ii) $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{8\times 9} = \sqrt[3]{2^3\times 9} = \sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{9}$

(iii) $\sqrt[5]{288} = \sqrt[5]{32\times 9} = \sqrt[5]{2^5\times 9} = \sqrt[5]{2^5}\times\sqrt[5]{9} = 2\sqrt[5]{9}$

(iv) $\sqrt{1350} = \sqrt{225\times 6} = \sqrt{15^2\times 6} = \sqrt{15^2}\times\sqrt{6} = 15\sqrt{6}$

(v) $\sqrt[5]{320} = \sqrt[5]{32\times 10} = \sqrt[5]{2^5\times 10} = \sqrt[5]{2^5}\times\sqrt[5]{10}$

$= 2\times\sqrt[5]{10}$

(vi) $5.\sqrt[3]{135} = 5\sqrt[3]{27\times 5} = 5\sqrt[3]{3^3\times 5} = 5\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{5}$

$= 5\times 3\times\sqrt[3]{5} = 15\sqrt[3]{5}$.

उदा.48 $\sqrt[4]{1280}$ को मिश्रित करणी के सरलतम रुप में व्यक्त कीजिए :

हल. $\sqrt[4]{1280} = \sqrt[4]{256\times5} = \sqrt[4]{256}\times\sqrt[4]{5}$

$= \sqrt[4]{4^4}\times\sqrt[4]{5} = 4\sqrt[4]{5}$

➤ घातों के लिये कुछ नियम

माना a, b > 0 वास्तविक संख्याऐं है एवं p, q परिमेय संख्याऐं है, तब

(i) $\boxed{a^p.\ a^p = a^{p+q}}$ अर्थात् यदि समान आधार वाली संख्याओं जिनकी घातें भिन्न या समान है, को एक दूसरे से गुणा किया जाता है तो घातें जुड़ जाती है।

उदा.49 $\dfrac{(7)^3\times21}{3} = ?$

$= 7^3 \times 7 = 7^{3+1} = 7^4$ **Ans.**

(ii) $\boxed{(a^p)^q = a^{pq}}$

उदा.50 $\dfrac{(121)^3\times33}{3} = (11^2)^3 \times 11 = 11^6 \times 11^1$

$= 11^7$ **Ans.**

(iii) $\boxed{\dfrac{a^p}{a^q} = \begin{cases} a^{p-q} & \text{if } p>q \\ 1/a^{q-p} & \text{if } q>p \end{cases}}$

उदा.51 $\dfrac{(169)^2}{13^2} = \dfrac{[(13)^2]^2}{13^2} = \dfrac{13^4}{13^2}$

$= 13^{4-2} = 13^2 = 169$ **Ans.**

उदा.52 $\dfrac{5^3\times2^4\times49}{625\times32\times7}$

$= \dfrac{5^3\times2^4\times7^2}{5^4\times2^5\times7}$

$= \dfrac{1}{5^{4-3}}\times\dfrac{1}{2^{5-4}}\times7^{2-1}$

$= \dfrac{7}{5\times2} = \dfrac{7}{10}$ **Ans.**

(iv) $\boxed{(ab)^p = a^pb^p}$

उदा.53 $\dfrac{(63)^4\times144}{132\times9} = ?$

$= \dfrac{(9\times7)^4\times(12)^2}{(11\times12)\times3^2}$

$= \dfrac{(3^2\times7)^4\times(3\times2^2)^2}{11\times2^2\times3\times3^2}$

$= \dfrac{(3^2)^4\times7^4\times3^2\times(2^2)^2}{11\times2^2\times3^{1+2}}$

$= \dfrac{3^8\times7^4\times3^2\times2^4}{11\times2^2\times3^3}$

$= \dfrac{2^4\times3^{8+2}\times7^4}{2^2\times3^3\times11}$

$= \dfrac{2^{4-2}\times3^{10-3}\times7^4}{11}$

$= \dfrac{2^2\times3^7\times7^4}{11}$

(v) $\boxed{a^0 = 1}$

उदा.54 $\dfrac{(2^0+3^0)5^2}{25}$

$= \dfrac{(1+1).5^2}{5^2}$

$= \dfrac{2}{5^{2-2}} = \dfrac{2}{5^0} = \dfrac{2}{1} = 2$

(vi) $\boxed{a^{+p} = \dfrac{1}{a^{-p}}}$ or $\boxed{a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}}$

उदा.55 $\frac{\sqrt{2}}{4} = ?$

$= \frac{(2)^{1/2}}{2^2}$

$= \frac{1}{(2)^{2-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(2)^{3/2}} = 2^{-3/2}$

उदा.56 $\frac{11/3}{(11/3)^7} = ?$

$= \frac{1}{(11/3)^{7-1}}$

$= \frac{1}{(11/3)^6}$

$= \left(\frac{3}{11}\right)^6$