दो चरों में रेखीय समीकरण

1
CHAPTER

CONTENTS (सूची)

- दो चरों में रेखीय समीकरण
- दो चरों में रेखीय समीकरण का व्यापक रूप
- रेखीय समीकरण के हल
- दो चरों में रेखीय समीकरण का ग्राफ
- X-अक्ष तथा Y-अक्ष के समान्तर रेखाओं की समीकरण

➢ दो चरों में रेखीय समीकरणें

दो बीजीय व्यजंकों जिसमें एक या अधिक अज्ञात राशियां हो, में बराबर का सम्बन्ध हो समीकरण कहा जाता है।

एक रेखीय समीकरण एक ऐसी समीकरण है जिसमें रेखीय बहुपद है। चर का एक मान जो समीकरण के दोनों ओर को बराबर बना दे समीकरण का हल कहलाता है।

एक समीकरण में दोनों तरफ समान राशि जोड़ने/घटाने पर समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

एक समीकरण के दोनो ओर समान अशून्य राशि से गुणा/भाग करने पर समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

➢ दो चरों में रेखीय समीकरण का व्यापक रूप

$ax + by + c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ या एक अन्य रूप a तथा b शून्य हो

❖ उदाहरण ❖

Ex.1 निम्न समीकरणों को व्यापक रूप में प्रदर्शित करो तथा x, y के गुणांक तथा अचर पद ज्ञात करो

Sol.

क्र.स.	समीकरण	व्यापक रूप	x, y के गुणांक, अचर पद
(1)	$3x - 2y = 5$	$3x - 2y - 5 = 0$	3, –2, –5
(2)	$\frac{3}{7}x - 2 + y = 0$	$\frac{3}{7}x + y - 2 = 0$	$\frac{3}{7}$, 1, –2
(3)	$5y = 2x + 7$	$2x - 5y + 7 = 0$	2, –5, 7
(4)	$18y - 72x = 8$	$72x - 18y + 8 = 0$	72, –18, 8
(5)	$3.\overline{7}x - y - \frac{1}{7} = 0$	$3.\overline{7}x - y - \frac{1}{7} = 0$	$3.\overline{7}, -1, -\frac{1}{7}$
(6)	$y = 5$	$0x + y - 5 = 0$	0, 1, –5
(7)	$\frac{x}{7} = 5$	$\frac{x}{7} + 0.y - 5 = 0$	$\frac{1}{7}$, 0, –5
(8)	$2x + 3 = 0$	$2x + 0y + 3 = 0$	2, 0, 3

Ex.2 निम्न कथनों से रेखीय समीकरण बनाइए :

(1) 2 किग्रा. सेब तथा 1 किग्रा. अंगूर एक दिन ₹ 160 थी। एक महीने बाद 4 किग्रा. सेब तथा 2 किग्रा. अंगूर की कीमत ₹ 300 हो तब इन्हें बीजीय रूप में प्रदर्शित करो

Sol. माना सेब तथा अंगूर की प्रति किग्रा. कीमत क्रमशः x तथा y है तब I^{st} शर्त से :

$2x + y = 160$ .....(i)

तथा IInd शर्त से : $4x + 2y = 300$ .....(ii)

(2) एक क्रिकेट टीम के कोच ने 3 बैट तथा 6 गेंद ₹3900 में खरीदी। बाद में उसी प्रकार का एक बैट तथा 3 गेंद और ₹1300 में खरीदे। इन्हे बीजीय रूप में प्रदर्शित करो।

Sol. माना एक बेट तथा एक गेंद की कीमत क्रमशः ₹x तथा ₹y है प्रश्नानुसार

$3x + 6y = 3900$ .....(i)

तथा $x + 3y = 1300$ .....(ii)

(3) एक कक्षा के 10 छात्र एक गणित प्रश्न प्रतियोगिता में भाग लेते हैं यदि लड़कियों की संख्या लड़कों से 4 अधिक है

Sol. माना लड़कों तथा लड़कियों की संख्या x तथा y हैं तब प्रश्न के अनुसार

$x + y = 10$ ……(i)

तथा $y = x + 4$ ……(ii)

(4) एक आयताकार बगीचा जिसकी लम्बाई उसकी चौड़ाई से 4 मी. अधिक है, का आधा परिमाप 36 मी. है

Sol. माना लम्बाई तथा चौड़ाई x मी. तथा y मी. है

$\therefore$ प्रश्नानुसार $\frac{1}{2}$ परिमाप $= 36$

$$\frac{1}{2}[2(\ell + b)] = 36$$

$\Rightarrow$ $x + y = 36$ .....(i)

पुनः लम्बाई $= 4 +$ चौड़ाई

$x = 4 + y$ ..…(ii)

(5) दो संख्याओं का अन्तर 26 है तथा एक संख्या दूसरी की तीन गुनी है

Sol. माना संख्याए x तथा y है तथा $x > y$

$\therefore$ $x - y = 26$ ……(i)

तथा $x = 3y$ ……(ii)

(6) दो सम्पूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे से 18 डिग्री ज्यादा है

Sol. माना दो सम्पूरक कोण x तथा y है तथा $x > y$

तब $x + y = 180°$ ……(i)

तथा $x = y + 18°$ …...(ii)

(7) एक भिन्न के अंश तथा हर दोनों में 2 जोड़ दे तो वह $\frac{9}{11}$ बनती है। यदि अंश तथा हर में 3 जोड़ दिया जाए तो भिन्न $\frac{5}{6}$ बनती है

Sol. माना भिन्न $\frac{x}{y}$ है

अब प्रश्नानुसार $\frac{x+2}{y+2} = \frac{9}{11}$

$\Rightarrow 11x + 22 = 9y + 18$

$\Rightarrow 11x - 9y = -4$ .....(i)

तथा $\frac{x+3}{y+3} = \frac{5}{6} \Rightarrow 6x + 18 = 5y + 15$

$\Rightarrow 6x - 5y = -3$ ….(ii)

(8) पांच वर्ष बाद सचिन की उम्र उसके पुत्र की उम्र की तीन गुनी हो जाएगी। पांच वर्ष पूर्व सचिन की उम्र उसके पुत्र की उम्र की सात गुना थी

Sol. माना सचिन तथा उसके पुत्र की वर्तमान आयु x वर्ष तथा y वर्ष है

पांच वर्ष बाद

सचिन की उम्र $= (x + 5)$ वर्ष तथा उसके पुत्र की उम्र $= (y + 5)$ वर्ष

प्रश्नानुसार $(x + 5) = 3(y + 5) \Rightarrow x + 5 = 3y + 15$

$\Rightarrow x - 3y = 10$ ……(i)

तथा 5 वर्ष पूर्व दोनो की उम्र क्रमशः $(x - 5)$ वर्ष तथा $(y - 5)$ वर्ष थी

प्रश्नानुसार $(x - 5) = 7(y - 5)$

$\Rightarrow x - 5 = 7y - 35$

$\Rightarrow x - 7y = -30$ ….(ii)

➢ रेखीय समीकरण का हल

विधि : x (या y) के मान $= 0, \pm1, \pm2, \pm3,$……रखने पर हमें y (या x) के मान प्राप्त होते हैं। इससे दी गई समीकरण के बहुत से हल प्राप्त होते हैं।

❖ उदाहरण ❖

Ex.3 पांच हल ज्ञात करो :

(i) $2x + 3y = 6$ (ii) $3x - 2y = 12$

(iii) $7x + y = 15$

Sol. (i) $2x = 6 - 3y \Rightarrow x = \frac{6-3y}{2}$

अब $y = 0$ रखने पर $x = \frac{6-0}{2} = 3$

$y = 1$ के लिए $x = \frac{6-3(1)}{2} = \frac{3}{2}$

$y = 2$ के लिए $x = \frac{6-3(2)}{2} = 0$

$y = 3$ के लिए, $x = \frac{6-3(3)}{2} = -\frac{3}{2}$

$y = 4$ के लिए, $x = \frac{6-3(4)}{2} = -3$

$\therefore$

x	3	3/2	0	−3/2	−3
y	0	1	2	3	4

(ii) $3x - 12 = 2y \Rightarrow y = \frac{3x-12}{2}$

$x = 0, 1, 2, 3, -1$ रखने पर

$y = -6, -\frac{9}{2}, -3, -\frac{3}{2}, -8$

x	0	1	2	3	−1
y	−6	−9/2	−3	−3/2	−8

(iii) $y = 15 - 7x$

$x = 0, 1, 2, 3, 4$ रखने पर $y = 15, 8, 1, -6, -13$

$\therefore$

x	0	1	2	3	4
y	15	8	1	−6	−13

Ex.4 दो हल ज्ञात करो

(i) $3x - 7y = 21$ (ii) $8x - 5y = 16$

Sol. (i) $3x - 7y = 21$

$x = 0$ रखने पर $3(0) - 7y = 21$

$y = \frac{21}{-7} = -3$

$\therefore x = 0, y = -3$

तथा $y = 0$ रखने पर $\Rightarrow 3x - 7(0) = 21$

$3x = 21$

$x = \frac{21}{3} = 7$

$\therefore x = 7, y = 0$

$\therefore$

x	0	7
y	−3	0

(ii) $8x - 5y = 16$

$x = 0$ रखने पर $\Rightarrow 8(0) - 5y = 16$

$\Rightarrow -5y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{5} = -3.2$

$\therefore x = 0, y = -3.2$

तथा $y = 0$ रखने पर $\Rightarrow 8x - 5(0) = 16$

$\Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{8} = 2$

$\therefore x = 2 ; y = 0$

$\therefore$

x	0	2
y	−3.2	0

Ex.5 पाँच हल ज्ञात करो :

(i) $3x = 5$ (ii) $7y = 10$

Sol. (i) समीकरण में केवल एक चर है अतः हम इसे में $3x + 0.y = 5$ बदल लेते हैं

$y = 0, 1, 2, 3, 4$ रखने पर $x =$

x	5/3	5/3	5/3	5/3	5/3
y	0	1	2		

(ii) $7y = 10 \Rightarrow 0.x + 7y = 10$

$x = 0, 1, 2, 3, 4$ रखने पर

$y = \frac{10}{7}, \frac{10}{7}, \frac{10}{7}, \frac{10}{7}, \frac{10}{7}$

x	0	1	2	3	4
y	10/7	10/7	10/7	10/7	10/7

नोट :

क्रमित युग्म : यदि x तथा y के मान (x, y) के रूप में प्रदर्शित किए जाए तब इस रूप को क्रमित युग्म रूप कहते हैं अर्थात् : उदाहरण $x = 5, y = \frac{7}{3}$ तब क्रमित युग्म रूप $= \left(5, \frac{7}{3}\right)$, प्रथम भाग भुज (x भाग) तथा द्वितीय भाग कोटि (y भाग) कहलाता है

Ex.6 जाँच करो कि x तथा y के निम्न मान समीकरण $9x - 8y = 72$ के हल हैं या नही

(i) (0, 9) (ii) (0, – 9) (iii) (– 8, 0)

(iv) (+8, 0) (v) (1, 1) (vi) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

Sol. दी गई समीकरण $9x - 8y = 72$

(i) बिन्दु $x = 0, y = 9$ पर LHS

$= 9(0) - 8(9) = -72 \neq$ RHS $\therefore$ नहीं

(ii) $x = 0, y = -9$ पर LHS

$= 9(0) - 8(-9)$

$= +72 =$ RHS $\therefore$ हाँ

(iii) LHS $= 9(-8) - 8(0)$ $(x = -8, y = 0$ पर)

$= -72 \neq$ RHS $\therefore$ नहीं

(iv) LHS $= 9(-8) - 8(0)$ $(x = 8, y = 0$ पर)

$= 72 =$ RHS $\therefore$ हाँ

(v) LHS $= 9(1) - 8(1)$ $(x = 1, y = 1$ पर)

$= 9 - 8$

$= 1 \neq$ RHS $\therefore$ नहीं

(vi) LHS $= 9\left(\frac{1}{3}\right) - 8\left(\frac{1}{2}\right)$ $\left(x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}\right.$ पर$\left.\right)$

$= 3 - 4$

$= -1 \neq$ RHS $\therefore$ नहीं

Ex.7 k का मान समीकरण $2x + ky = 6$ में ज्ञात करो यदि $(-2, 2)$ एक हल है

Sol. $\because (-2, 2), 2x + ky = 5$ का एक हल है

$\therefore \; 2(-2) + k(2) = 6$

$-4 + 2k = 6 \Rightarrow 2k = 6 + 4$

$k = \frac{10}{2} = 5$

Ex.8 p का मान ज्ञात करो यदि $(4, -4)$, $x - py = 8$ का एक हल है।

Sol. $x - py = 8$

$4 - p(-4) = 8$

$4p = 8 - 4$

$4p = 4$

$p = 1$

Ex.9 a का मान ज्ञात करो यदि $(a, -3a)$, $14x + 3y = 35$ का एक हल है।

Sol. $x = a$ तथा $y = -3a$ दी गई समीकरण में रखने पर

$14(a) + 3(-3a) = 35$

$14a - 9a = 35$

$5a = 35$

$a = 7$

➢ दो चरों में रेखीय समीकरण $ax + by + c = 0$ जहाँ $a \neq 0, b \neq 0$ का ग्राफ

(i) **पद I :**

मान लो रेखीय समीकरण $ax + by + c = 0$.

(ii) **पद II :**

y को x के रूप में लिखिए

$y = -\left(\frac{ax + c}{b}\right)$

(iii) **पद III :**

x को कोई दो मान दो तथा y के संगत मान पद II से प्राप्त करो इससे दो हल मिलेंगे। माना वे (α_1, β_1) तथा (α_2, β_2) है यदि संभव हो तो x के ऐसे पूर्णांक मान लो जिससे y भी पूर्णांक मिले

(iv) **पद IV :**

बिन्दुओं (α_1, β_1) तथा (α_2, β_2) को ग्राफ पर अंकित करो

(v) **पद V :**

पद IV में अंकित बिन्दुओं को मिलाकर एक रेखा प्राप्त करो। यह रेखा समीकरण $ax + by + c = 0$ का ग्राफ प्रदर्शित करती है।

❖ उदाहरण ❖

Ex.10 समीकरण $y - x = 2$ का ग्राफ खींचिए

Sol. दिया है

$y - x = 2 \Rightarrow y = x + 2$

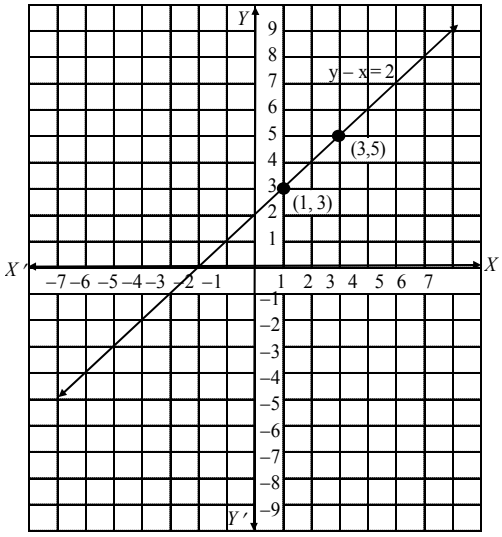
जब $x = 1$ तब : $y = 1 + 2 = 3$

जब $x = 3$ तब : $y = 3 + 2 = 5$

अतः हम दी गई समीकरण द्वारा प्रदर्शित रेखा पर बिन्दुओं के भुज तथा कोटि की निम्न सारणी प्राप्त करते हैं

x	1	3
y	3	5

ग्राफ पत्र पर बिन्दुओं (1, 3) तथा (3, 5) को अंकित कर इनको मिलने वाली एक रेखा खींचते हैं। इससे हमें दी गई समीकरण द्वारा प्रदर्शित रेखा का ग्राफ प्राप्त होता है जैसा निम्न है



Ex.11 रेखा $x - 2y = 3$ का ग्राफ खींचिए। ग्राफ से बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो जबकि

(i) $x = -5$ (ii) $y = 0$.

Sol. दिया है $x - 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$

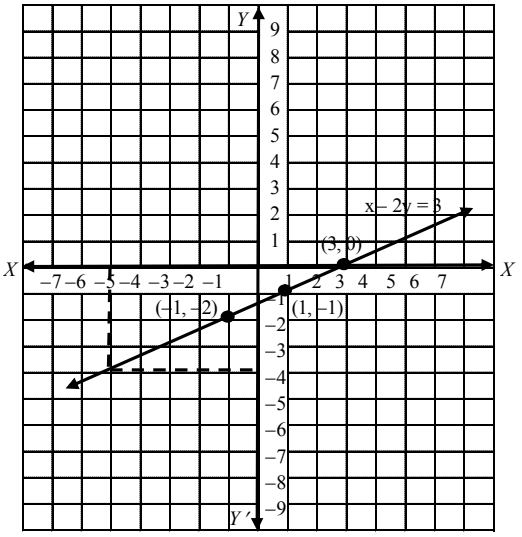
जब $x = 1$ तब : $y = \frac{1-3}{2} = -1$

जब $x = -1$ तब : $y = \frac{-1-3}{2} = -2$

अत निम्न सारणी प्राप्त होती है

x	1	–1
y	–1	–2

बिन्दुओं (1, –1) तथा (–1, –2) को ग्राफ पर अंकित करके इन्हें मिलाने पर हमें चित्रानुसार सरल रेखा प्राप्त होती है। यह रेखा समीकरण $x - 2y = 3$ का ग्राफ है



उस बिन्दु के निर्देशांक जबकि $x = -5$ है ज्ञात करने के लिए हम y-अक्ष के समान्तर (–5, 0) से गुजरने वाली रेखा खींचते है यह रेखा $x - 2y = 3$ के ग्राफ को एक बिन्दु पर मिलती है जिससे x-अक्ष के समान्तर रेखा खींचते हैं जो y-अक्ष को $y = -4$ पर काटती है अतः पूछे गए बिन्दु के निर्देशांक (–5, –4) है।

चूंकि $y = 0$, x-अक्ष पर है अतः चाहे गए उस बिन्दु जहाँ रेखा x-अक्ष को मिलती है ग्राफ से इस प्रकार का बिन्दु (3, 0) है।

अतः बिन्दु (–5, –4) तथा (3, 0) है।

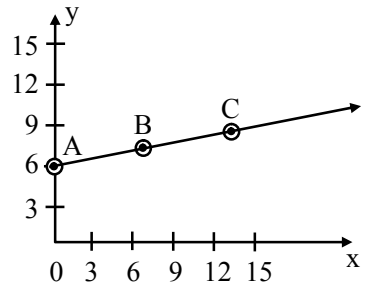
Ex.12 निम्न के ग्राफ खींचिए :

(i) $x - 7y = -42$ (ii) $x - 3y = 6$

(iii) $x - y + 1 = 0$ (iv) $3x + 2y = 12$

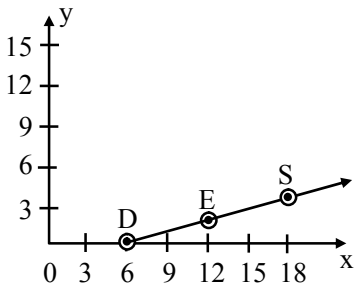
Sol. (i) $x - 7y = -42$

x	0	7	14
$y = \frac{x+42}{7}$	6	7	8
बिन्दु	A	B	C



(ii) $x - 3y = 6$

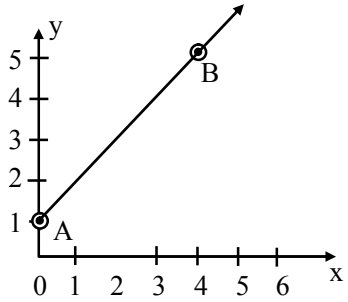
x	6	12	18
$y = \frac{x-6}{3}$	0	2	4
बिन्दु	D	E	F



(iii) $x - y + 1 = 0$

सारणी रूप में

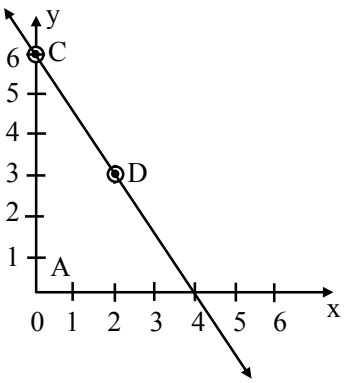
x	0	4
$y = x + 1$	1	5
बिन्दु	A	B



(iv) $3x + 2y = 12$

सारणी रूप में

x	0	2
$y = \frac{12-3x}{2}$	6	3
बिन्दु	C	D

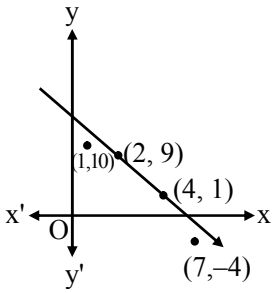


नोट :

(i) किसी रेखीय समीकरण का ग्राफ एक रेखा होती है तथा समीकरण के प्रत्येक हल उस समीकरण के ग्राफ पर स्थित होते हैं।

(ii) यदि एक बिन्दु (a, b) रेखा पर स्थित नहीं है तब यह बिन्दु दी गई समीकरण का हल नहीं हैं।

अर्थात्



∵ (2, 9) तथा (4, 1) रेखा पर है

∴ ये दोनों बिन्दु दी गई समीकरण के हल हैं

परन्तु (1, 10) तथा (7, –4) रेखा पर नहीं हैं अतः ये दोनों हल नहीं हैं

Ex.13 यदि $\left(\frac{9}{2}, 6\right)$, $4x + ky = 12$ के ग्राफ पर स्थित है तब k का मान ज्ञात करो

Sol. ∵ $x = \frac{9}{2}$ तथा $y = 6$ रेखा पर स्थित है

∴ इस मान को समीकरण में रखने पर

$$4\left(\frac{9}{2}\right) + k(6) = 12$$

$$18 + 6k = 12$$

$$6k = 12 - 18$$

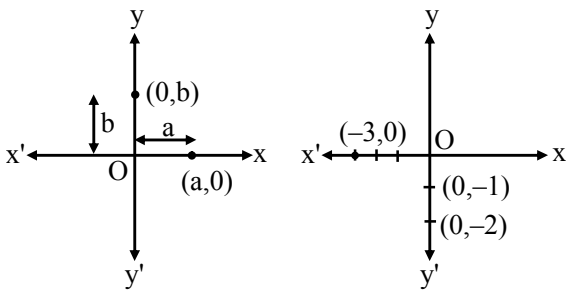
$$6k = -6$$

$$k = -1$$

नोट :

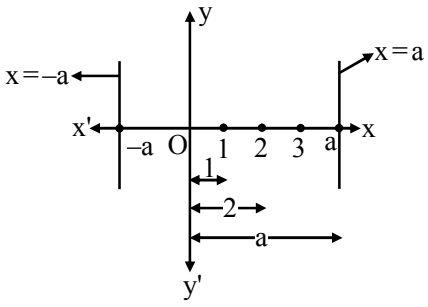
(1) x-अक्ष की समीकरण y = 0 है तथा x-अक्ष पर कोई बिन्दु जो क्रमित युग्म में हैं (± a, 0) है

(2) y-अक्ष की समीकरण x = 0 है तथा y-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक (0, ± b) हैं

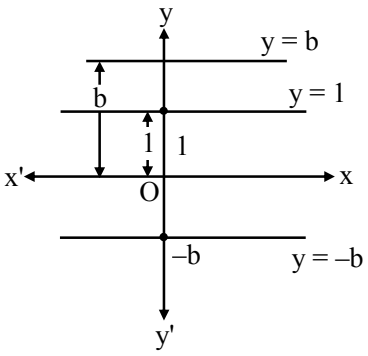


(3) रेखा x = ±a का ग्राफ y अक्ष के समान्तर है

(4) रेखा y = ±b का ग्राफ x अक्ष के समान्तर है



x = –a तथा x = +a का ग्राफ

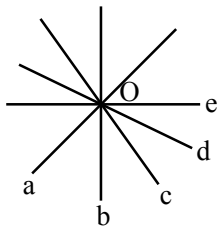


y = 1, y = b, y = –b का ग्राफ

◈ **संगामी रेखाएं : (Concurrent lines)**

तीन या अधिक रेखाएं संगामी कहलाती है यदि सभी रेखाएं एक ही बिन्दु से गुजरती है। ये सभी रेखाएं a, b, c, d, e एक बिन्दु O से गुजरती है।

∴ ये संगामी रेखाएं हैं



नोट :

एक बिन्दु से अनन्त रेखाएं गुजर सकती है अतः हम रेखाओं की अनन्त समीकरणें ज्ञात कर (या बना) सकते हैं जो एक दिए हुए बिन्दु से गुजरती है।

Ex.14 रेखाओं की पांच समीकरणें ज्ञात करो जो बिन्दु (3, –5) से गुजरती हैं

Sol. x + y = –2, x – y = 8, 2x + y = 1, 2x – y = 11, 2x + 3y + 9 = 0

➢ X-अक्ष तथा Y-अक्ष के समान्तर रेखाओं की समीकरणें

हम इन समीकरणों को ज्यामिती के दो प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं

(A) एक चर में या संख्या रेखा पर

(B) दो चर में या कार्तीय समतल पर

एक चर में हल एक बिन्दु द्वारा प्रदर्शित होता है जबकि दो चरों में हल x अक्ष या y अक्ष के समान्तर रेखा द्वारा प्रदर्शित होता है

❖ उदाहरण ❖

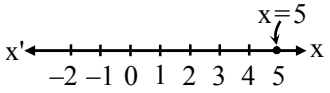
Ex.15 x = 5 के रूप की समीरकण को ज्यामिती में प्रदर्शित करो।

(i) एक चर (ii) दो चर

(iii) x = 5 तथा x = 0 का उभयनिष्ठ हल ज्ञात कीजिए।

Sol. (i) x = 5

यह केवल एक चर में है अतः संख्या रेखा पर प्रदर्शित करने पर



(ii) दो चर में (या कार्तीय समतल पर)

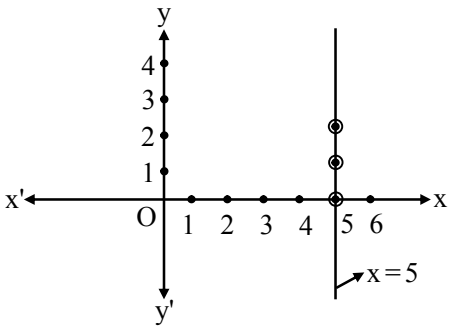
सर्वप्रथम हम समीकरण को दो चर में प्रदर्शित करते हैं

x + 0.y = 5 .....(i)

अब हम समीकरण (i) के दो या तीन हल ज्ञात करते हैं

x	5	5	5
y	0	1	2

तब इन बिन्दुओं को उचित पैमाना मानकर ग्राफ पर अंकित करते हैं तथा इन्हें मिलाते हैं



पैमाना : दोनों अक्षों पर 10 रेखाएं या
एक बड़ा खाना = 1 सेमी.

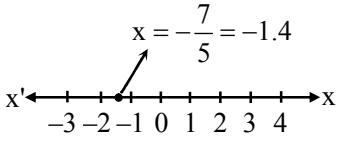
(iii) ∵ x = 5 तथा x = 0 क्रमश y अक्ष के समान्तर रेखा तथा y अक्ष है जो एक दूसरे के समान्तर है। अतः इनका उभयनिष्ठ हल विद्यमान नहीं है।

Ex.16 5x + 7 = 0 को ज्यामितीय रूप में प्रदर्शित करो

(i) एक चर में (या एक संख्या रेखा पर)

(ii) दो चर में (या कार्तीय समतल पर)

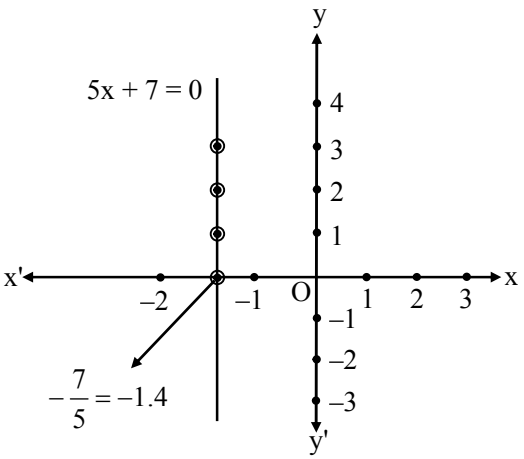
Sol. (i) $5x + 7 = 0 \Rightarrow 5x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{5} = -1.4$



(ii) 5x + 0.y = –7

x	– 7/5	– 7/5	– 7/5	– 7/5
y	0	1	2	3

पैमाना : दोनों अक्षों पर 10 रेखाएं या 1 बड़ा खाना = 1 सेमी.



नोट : यदि अचर पद 'c' समीकरण ax + by + c = 0 में शून्य हो तो रेखा मूल बिन्दु से सदेव गुजरेगी।