गणित

(www.tiwariacademy.com)

(अध्याय – 8) (चतुर्भुज)

(कक्षा – 9)

प्रश्नावली 8.2

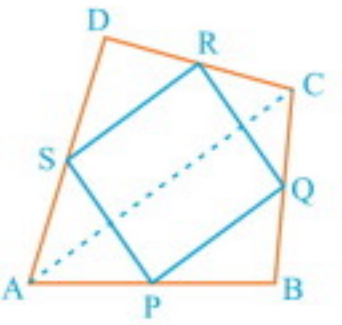
प्रश्न 1:

ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति) । AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि

(i) SR || AC और $SR = \frac{1}{2}AC$ है।

(ii) PQ = SR है।

(iii) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।



उत्तर 1:

(i) ΔACD में,

S भुजा DA का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

R भुजा DC का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2}AC$ ... (1) [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

(ii) ΔACD में,

P भुजा AB का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

Q भुजा BC का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, $PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$ ... (2) [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

समीकरण (1) और (2) से

$PQ \parallel SR$ ... (3) [∵ PQ || AC और SR || AC]

और $PQ = SR$ ... (4) [$\because SR = \frac{1}{2}AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$]

(iii) चतुर्भुज PQRS में,

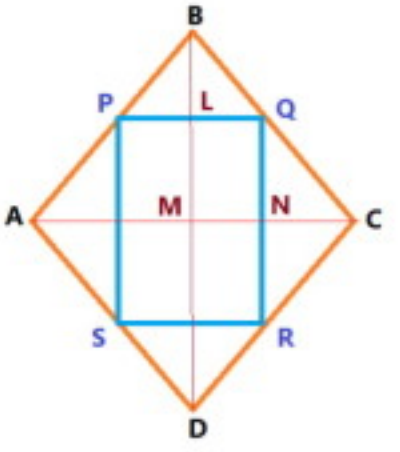
PQ || SR और PQ = SR [∵ समीकरण (3) और (4) से]

अतः, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्न 2:

ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक आयत है।

उत्तर 2:



ΔABC में,

P भुजा AB का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

Q भुजा BC का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, $PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$ ... (1) [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

इसीप्रकार, ΔACD में,

S भुजा AD का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

R भुजा CD का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2}AC$ ... (2) [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

समीकरण (1) और (2) से

$PQ \parallel SR$ ... (3) [∵ PQ || AC और SR || AC]

और $PQ = SR$ ... (4) [$\because SR = \frac{1}{2}AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$]

अतः, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

इसीप्रकार, ΔBCD में,

Q भुजा BC का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

R भुजा CD का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, QR || BD [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

⇒ QN || LM ... (5)

तथा, LQ || MN ... (6) [∵ PQ || AC]

समीकरण (5) और (6) से

LMNQ एक समांतर चतुर्भुज है।

अतः, $\angle LMN = \angle LQN$ [∵ समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

परन्तु, $\angle LMN = 90°$ [∵ समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित होते हैं]

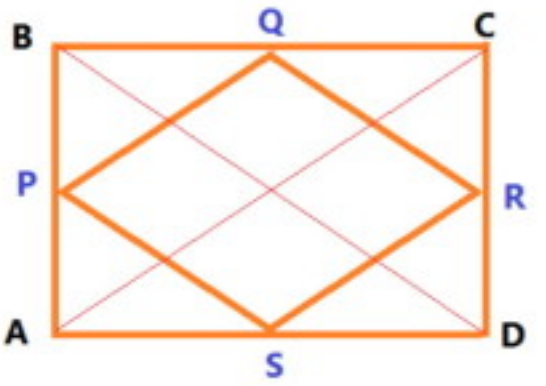
अतः, $\angle LQN = 90°$

एक समांतर चतुर्भुज जिसका एक कोण समकोण हो, आयत होता है। अतः PQRS एक आयत है।

प्रश्न 3:

ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।

उत्तर 3:



ΔABC में,

P भुजा AB का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

Q भुजा BC का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, PQ || AC और $PQ = \frac{1}{2}AC$ ... (1) [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

इसीप्रकार, ΔACD में,

S भुजा AD का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

R भुजा CD का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, SR || AC और $SR = \frac{1}{2}AC$ ... (2) [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

समीकरण (1) और (2) से

PQ || SR ... (3) [∵ PQ || AC और SR || AC]

और PQ = SR ... (4) [$\because SR = \frac{1}{2}AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$]

अतः, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

इसीप्रकार, ΔBCD में,

Q भुजा BC का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

R भुजा CD का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, $QR = \frac{1}{2}BD$ ... (5) [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

दिया है: AC = BD ... (6) [∵ आयत के विकर्ण बराबर होते हैं]

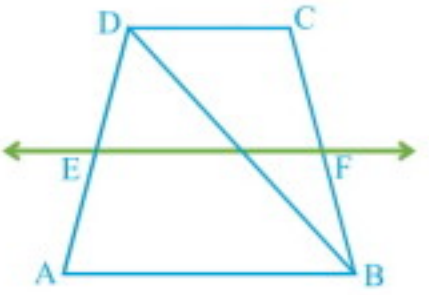
समीकरण (1), (5) और (6) से

PQ = QR

अतः, PQRS एक समचतुर्भुज है। क्योंकि एक समांतर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाएँ समान हों, समचतुर्भुज होता है।

प्रश्न 4:

ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है। साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति) । दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिंदु है।



उत्तर 4:

ΔABD में,

E भुजा AD का मध्य-बिंदु है [∵ दिया है]

तथा EG || AB [∵ दिया है]

अतः, G भुजा BD का मध्य-बिंदु होगा [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय के विलोम से]

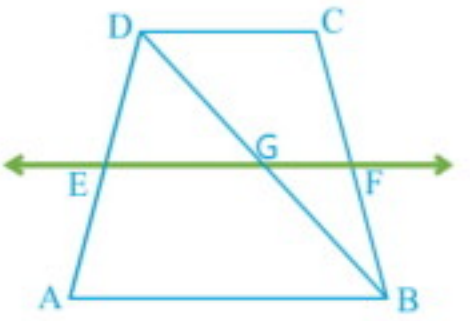
इसीप्रकार,

ΔBCD में,

G भुजा BD का मध्य-बिंदु है [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

तथा FG || DC [∵ दिया है]

अतः, F भुजा BC का मध्य-बिंदु होगा [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय के विलोम से]



प्रश्न 5:

एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समत्रिभाजित करते हैं।

उत्तर 5:

चतुर्भुज ABCD में

AB = CD [∵ दिया है]

$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

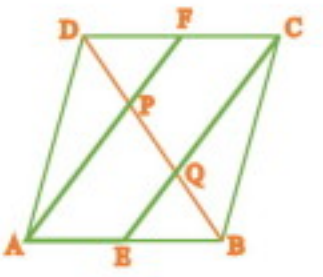
⇒AE = CF [∵ E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं]

चतुर्भुज AECF में

AE = CF [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

AE || CF [∵ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं]

अतः, AECF एक समांतर चतुर्भुज है।



ΔDCQ में,

F भुजा DC का मध्य-बिंदु है [∵ दिया है]

तथा FP || CQ [∵ AECF एक समांतर चतुर्भुज है]

अतः, P भुजा DQ का मध्य-बिंदु होगा [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय के विलोम से]

अतः, DP = PQ ... (1)

इसीप्रकार,

ΔABP में,

E भुजा AB का मध्य-बिंदु है [∵ दिया है]

तथा EQ || AP [∵ AECF एक समांतर चतुर्भुज है]

अतः, Q भुजा PB का मध्य-बिंदु होगा [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय के विलोम से]

अतः, PQ = QB ... (2)

समीकरण (1) और (2) से

DP = PQ = QB

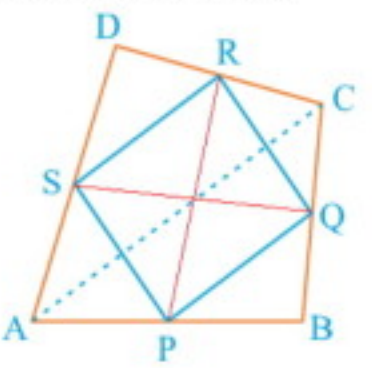
अतः, रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समत्रिभाजित करते हैं।

प्रश्न 6:

दर्शाइए कि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

उत्तर 6:

दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं।



ΔACD में,

S भुजा DA का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

R भुजा DC का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, SR || AC और $SR = \frac{1}{2}AC$ ... (1) [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

ΔACD में,

P भुजा AB का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

Q भुजा BC का मध्य-बिंदु हैं [∵ दिया है]

अतः, $PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$ ... (2) [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

समीकरण (1) और (2) से

$PQ \parallel SR$ ... (3) [∵ $PQ \parallel AC$ और $SR \parallel AC$]

और $PQ = SR$ ... (4) [∵ $SR = \frac{1}{2}AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$]

चतुर्भुज PQRS में,

$PQ \parallel SR$ और $PQ = SR$ [∵ समीकरण (3) और (4) से]

अतः, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है तथा समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

इसलिए, रेखाखंड SQ और PR परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

प्रश्न 7:

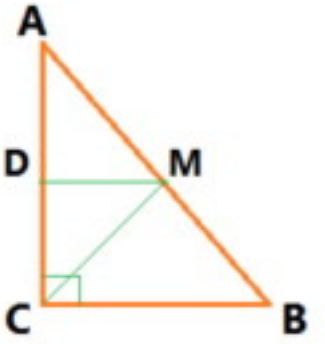
ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिंदु M से होकर BC के समांतर खींची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि

(i) D भुजा AC का मध्य-बिंदु है।

(ii) $MD \perp AC$ है।

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$ है।

उत्तर 7:



(i) ΔABC में,

M भुजा AB का मध्य-बिंदु है [∵ दिया है]

तथा $DM \parallel BC$ [∵ दिया है]

अतः, D भुजा AC का मध्य-बिंदु होगा [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय के विलोम से]

(ii) $\angle ADM = \angle ACB$ [∵ संगत कोण]

$\Rightarrow \angle ADM = 90°$ [∵ $\angle ACB$ 90°]

अतः, $MD \perp AC$ है।

(iii) ΔAMD और ΔCMD में,

$AD = DC$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

$\angle ADM = \angle CDM$ [∵ प्रत्येक 90°]

$DM = DM$ [∵ उभयनिष्ठ]

अतः, $\Delta AMD \cong \Delta CMD$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

$AM = CM$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

परन्तु, $AM = \frac{1}{2}AB$ [∵ दिया है]

इसलिए, $CM = AM = \frac{1}{2}AB$