गणित

(www.tiwariacademy.com)

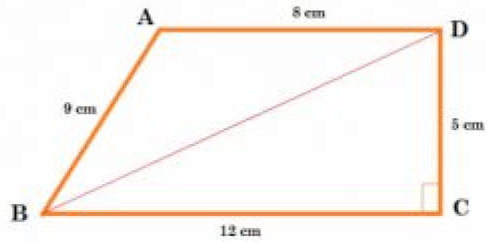
(अध्याय - 12)(हीरोन का सूत्र)

(कक्षा - 9)

प्रश्नावली 12.2

प्रश्न 1:

एक पार्क चतुर्भुज ABCD के आकार का है, जिसमें $\angle C = 90°$, AB = 9 cm, BC = 12 cm, CD = 5 cm और AD = 8 cm है। इस पार्क का कितना क्षेत्रफल है?



उत्तर 1:

BD को मिलाया।

त्रिभुज BDC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$BD^2 = BC^2 + CD^2$

$\Rightarrow BD^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$

$\Rightarrow BD = 13$ cm

त्रिभुज BDC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times BC \times DC = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30 \text{ cm}^2$

यहाँ, त्रिभुज ABD में, त्रिभुज की भुजाएँ $a = 9$ cm, $b = 8$ cm और $c = 13$ cm हैं।

अतः, त्रिभुज ABD का अर्धपरिमाप $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+8+13}{2} = \frac{30}{2} = 15$ cm

इसलिए, हीरोन के सूत्र से, त्रिभुज ABD का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{15(15-9)(15-8)(15-13)} = \sqrt{15(6)(7)(2)} = \sqrt{1260} = 35.5 \text{ cm}^2$ (लगभग)

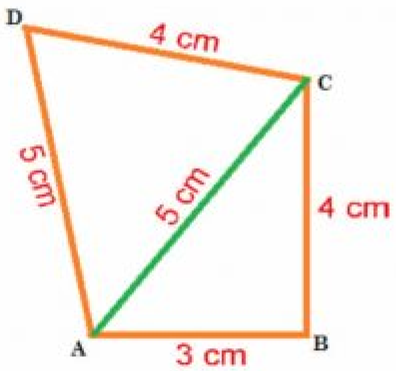
पार्क का कुल क्षेत्रफल = त्रिभुज BDC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ABD का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ पार्क का कुल क्षेत्रफल = $30 + 3535 = 65.5 \text{ cm}^2$

अतः, पार्क का क्षेत्रफल 65.5 cm^2 है।

प्रश्न 2:

एक चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसमें AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 4 cm, DA = 5 cm और AC = 5 cm है।



उत्तर 2:

AC को मिलाया।

यहाँ, त्रिभुज ABC की भुजाएँ $a = 3$ cm, $b = 4$ cn और $c = 5$ cm हैं।

अतः, त्रिभुज का अर्धपरिमाप $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm

इसलिए, हीरोन के सूत्र से, त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6(3)(2)(1)} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}^2$

तथा, त्रिभुज ACD की भुजाएँ $a' = 4$ cm, $b' = 5$ cn और $c' = 5$ cm हैं।

अतः, त्रिभुज का अर्धपरिमाप $s' = \frac{a'+b'+c'}{2} = \frac{4+5+5}{2} = \frac{14}{2} = 7$ cm

इसलिए, हीरोन के सूत्र से, त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')}$

$= \sqrt{7(7-4)(7-5)(7-5)} = \sqrt{7(3)(2)(2)} = 2\sqrt{21} = 9.2 \text{ cm}^2$ (लगभग)

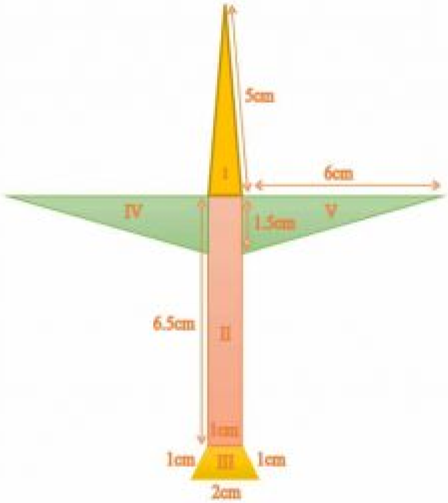
चतुर्भुज का कुल क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ चतुर्भुज का कुल क्षेत्रफल = $6 + 9.2 = 15.2 \text{ cm}^2$

अतः, चतुर्भुज का क्षेत्रफल 15.2 cm^2 है।

प्रश्न 3:

राधा ने एक रंगीन कागज से एक हवाईजहाज का चित्र बनाया, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। प्रयोग किए गए कागज का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर 3:

भाग I के लिए:

यहाँ, त्रिभुज की भुजाएँ $a = 5$ cm, $b = 5$ cm और $c = 1$ cm हैं।

अतः, त्रिभुज का अर्धपरिमाप $s = \frac{5+5+1}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$ cm

इसलिए, हीरोन के सूत्र से, त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{5.5(5.5-5)(5.5-5)(5.5-1)}$

$= \sqrt{5.5(0.5)(0.5)(4.5)}$

$= \sqrt{6.1875}$

$= 2.5$ cm^2 (लगभग)

भाग II के लिए:

यहाँ, आयत की भुजाएँ $l = 6.5$ cm और $b = 1$ cm हैं।

इसलिए, आयत का क्षेत्रफल = $l \times b = 6.5 \times 1 = 6.5$ cm^2

भाग III के लिए:

AF || DC खींचा तथा AE ⊥ BC बनाया।

चतुर्भुज ABCF में,

AF || DC [∵ रचना से]

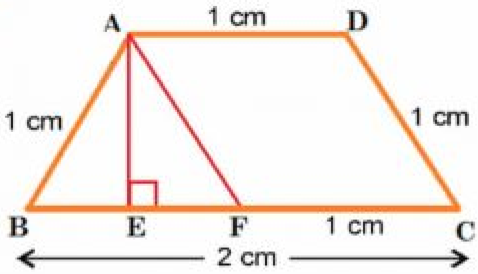
AD || FC [∵ ABCD एक समलंब है]

इसलिए, ABCF एक समांतर चतुर्भुज है। अतः

AF = DC = 1 cm तथा AD = FC = 1 cm [∵ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

अतः, BF = BC – FC = 2 – 1 = 1 cm

⇒ ABF एक समबाहु त्रिभुज है। [∵ AB = BF = AF = 1 cm]



समबाहु त्रिभुज ABF का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

परन्तु, त्रिभुज ABF का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \text{BF} \times \text{AE}$

इसलिए, $\frac{1}{2} \times \text{BF} \times \text{AE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 1 \times \text{AE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \text{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.732}{2} = 0.866 = 0.9$ (लगभग)

इसप्रकार, समलंब ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (\text{AD} + \text{BC}) \times \text{AE}$

$= \frac{1}{2} \times (1+2) \times 0.9$

$= 1.35 = 1.4$ cm^2 (लगभग)

भाग IV के लिए:

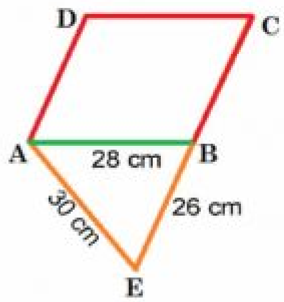
यहाँ, त्रिभुज का आधार 1.5 cm और ऊँचाई 6 cm है।

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 1.5 \times 6 = 4.5$ cm^2

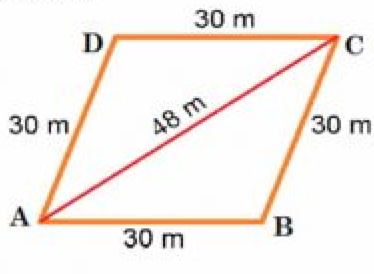
भाग V के लिए:
यहाँ, त्रिभुज का आधार 1.5 cm और ऊँचाई 6 cm है।
इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई
$= \frac{1}{2} \times 1.5 \times 6$
$= 4.5 \text{ cm}^2$
अतः, प्रयोग किए गए कागज का कुल क्षेत्रफल
= भाग I का क्षेत्रफल + भाग II का क्षेत्रफल + भाग III का क्षेत्रफल + भाग IV का क्षेत्रफल + भाग V का क्षेत्रफल
$= 2.5 + 6.5 + 1.4 + 4.5 + 4.5 = 19.4 \text{ cm}^2$

प्रश्न 4:
एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज का एक ही आधार है और क्षेत्रफल भी एक ही है। यदि त्रिभुज की भुजाएँ 26 cm, 28 cm और 30 cm हैं तथा समांतर चतुर्भुज 28 cm के आधार पर स्थित है, तो उसकी संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:


यहाँ, त्रिभुज ABE की भुजाएँ $a = 28$ cm, $b = 26$ cm और $c = 30$ cm हैं।
अतः, त्रिभुज का अर्धपरिमाप $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{28+26+30}{2} = \frac{84}{2} = 42$ cm
इसलिए, हीरोन के सूत्र से, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$= \sqrt{42(42-28)(42-26)(42-30)} = \sqrt{42(14)(16)(12)} = \sqrt{112896}$
$= 336 \text{ cm}^2$
हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × संगत ऊँचाई
प्रश्नानुसार, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = त्रिभुज का क्षेत्रफल
⇒ आधार × संगत ऊँचाई = 336
⇒ 28 × संगत ऊँचाई = 336
⇒ संगत ऊँचाई $= \frac{336}{28} = 12$ cm

प्रश्न 5:
एक समचतुर्भुजाकर घास के खेत में 18 गायों के चरने के लिए घास है। यदि इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 30 m है और बड़ा विकर्ण 48 m है, तो प्रत्येक गाय को चरने के लिए इस घास के खेत का कितना क्षेत्रफल प्राप्त होगा?

उत्तर 5:


AC को मिलाया।
त्रिभुज ABC की भुजाएँ:
$a = 30$ m, $b = 30$ m और $c = 48$ m
अतः, त्रिभुज का अर्धपरिमाप
$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{30+30+48}{2} = \frac{108}{2} = 54 \text{ m}$$
इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$= \sqrt{54(54-30)(54-30)(54-48)} = \sqrt{54(24)(24)(6)}$
$= \sqrt{186624} = 432 \text{ m}^2$
अतः, समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= 2 \times 432 = 864 \text{ m}^2$ है।
इसलिए, प्रत्येक गाय को चरने के लिए इस घास के खेत का क्षेत्रफल = $\frac{\text{कुल क्षेत्रफल}}{\text{गायों की संख्या}} = \frac{864}{18} = 48 \text{ m}^2$

प्रश्न 6:

दो विभिन्न रंगों के कपड़ों के 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों को सीकर एक छाता बनाया गया है (देखिए आकृति) । प्रत्येक टुकड़े के माप 20 cm, 50 cm और 50 cm हैं। छाते में प्रत्येक रंग का कितना कपड़ा लगा है?

उत्तर 6:

त्रिभुज की भुजाएँ $a = 20$ cm, $b = 50$ cm और $c = 50$ cm

अतः, त्रिभुज का अर्धपरिमाप $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+50+50}{2} = \frac{120}{2} = 60$ cm

इसलिए, हीरोन के सूत्र से, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{60(60-20)(60-50)(60-50)}$

$= \sqrt{60(40)(10)(10)}$

$= 200\sqrt{6}$ cm^2

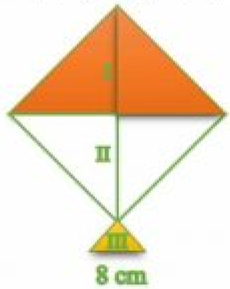
अतः, 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों का क्षेत्रफल $= 10 \times 200\sqrt{6} = 2000\sqrt{6}$ cm^2

इसलिए, प्रत्येक रंग के टुकड़ों का क्षेत्रफल $= \frac{2000\sqrt{6}}{2} = 1000\sqrt{6}$ cm^2

प्रश्न 7:

एक पतंग तीन भिन्न-भिन्न शेडों (Shades) के कागजों से बनी है। इन्हें आकृति में I, II और III से दर्शाया गया है। पतंग का ऊपरी भाग 32 cm विकर्ण का एक वर्ग है और निचला भाग 6 cm, 6 cm और 8 cm भुजाओं का एक समद्विबाहु त्रिभुज है। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक शेड का कितना कागज प्रयुक्त किया गया है?

उत्तर 7:



शेड (Shade) I के लिए:

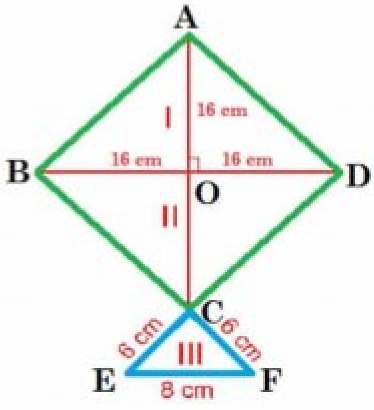
यहाँ, त्रिभुज ABD का आधार BD = 32 cm और ऊँचाई AO = 16 cm है।

इसलिए, त्रिभुज ABD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 32 \times 16$

$= 256$ cm^2

अतः, शेड I में प्रयुक्त कागज 256 cm^2 है।



शेड (Shade) II के लिए:

यहाँ, त्रिभुज CBD का आधार BD = 32 cm और ऊँचाई CO = 16 cm है।

इसलिए, त्रिभुज CBD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 32 \times 16$

$= 256$ cm^2

अतः, शेड II में प्रयुक्त कागज 256 cm^2 है।

शेड (Shade) III के लिए:

त्रिभुज CEF की भुजाएँ $a = 6$ cm, $b = 6$ cm और $c = 8$ cm

अतः, त्रिभुज का अर्धपरिमाप $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+6+8}{2} = \frac{20}{2} = 10$ cm

इसलिए, हीरोन के सूत्र से, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{10(10-6)(10-6)(10-8)}$

$= \sqrt{10(4)(4)(2)}$

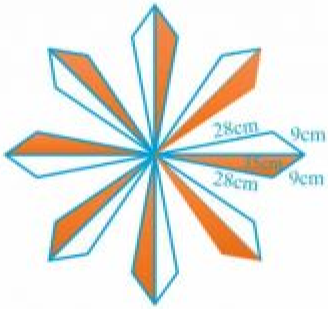
$= 8\sqrt{5}$ cm^2

अतः, शेड III में प्रयुक्त कागज $8\sqrt{5}$ cm^2 है।

प्रश्न 8:

फर्श पर एक फूलों का डिज़ाइन 16 त्रिभुजाकार टाइलों से बनाया गया है, जिनमें से प्रत्येक की भुजाएँ 9 cm, 28 cm और 35 cm हैं (देखिए आकृति) । इन टाइलों को 50 पैसे प्रति cm² की दर से पालिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

उत्तर 8:



त्रिभुज की भुजाएँ $a = 9$ cm, $b = 28$ cm और $c = 35$ cm

अतः, त्रिभुज का अर्धपरिमाप $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+28+35}{2} = \frac{72}{2} = 36$ cm

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{36(36-9)(36-28)(36-35)} = \sqrt{36(27)(8)(1)} = \sqrt{7776}$

$= 88.2 \text{ cm}^2$ (लगभग)

अतः, एक त्रिभुजाकार टाइल का क्षेत्रफल $= 88.2 \text{ cm}^2$

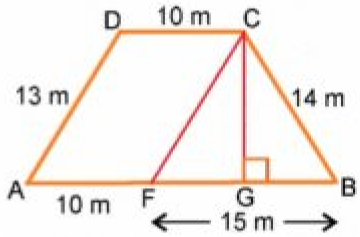
इसलिए, 16 त्रिभुजाकार टाइलों का क्षेत्रफल $= 16 \times 88.2 = 1411.2 \text{ cm}^2$

अतः, टाइलों को 50 पैसे प्रति cm² की दर से पालिश कराने का व्यय = ₹ 0.50 × 1411.2 = ₹ 705.60

प्रश्न 9:

एक खेत समलंब के आकार का है जिसकी समांतर भुजाएँ 25 m और 10 m हैं। इसकी असमांतर भुजाएँ 14 m और 13 m हैं। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर 9:



CF || AD खींचा तथा CG ⊥ AB बनाया।

चतुर्भुज ADCF में,

CF || AD [∵ रचना से]

CD || AF [∵ ABCD एक समलंब है]

इसलिए, ADCF एक समांतर चतुर्भुज है। अतः

AD = CF = 13 m तथा CD = AF = 10 m [∵ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

अतः, BF = AB – AF = 25 – 10 = 15 m

त्रिभुज BCF की भुजाएँ $a = 13$ m, $b = 14$ m और $c = 15$ m

अतः, त्रिभुज का अर्धपरिमाप $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$ m

इसलिए, त्रिभुज BCF का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21(8)(7)(6)} = \sqrt{7056} = 84 \text{ m}^2$

परन्तु, त्रिभुज BCF का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \text{BF} \times \text{CG}$

इसलिए, $\frac{1}{2} \times \text{BF} \times \text{CG} = 84$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 15 \times \text{CG} = 84$

$\Rightarrow \text{CG} = \frac{84\times2}{15} = 11.2$ m

इसप्रकार, समलंब ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (\text{AB} + \text{CD}) \times \text{CG}$

$= \frac{1}{2} \times (25+10) \times 11.2 = 35 \times 5.6 = 196 \text{ m}^2$

अतः, खेत का क्षेत्रफल 196 m^2 है।