गणित

(www.tiwariacademy.com)

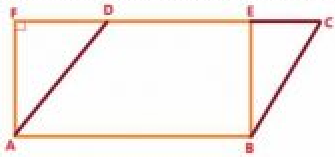
(अध्याय - 9)(समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल)

(कक्षा - 9)

प्रश्नावली 9.4 (ऐच्छिक)

प्रश्न 1:

समांतर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEF एक ही आधार पर स्थित हैं और उनके क्षेत्रफल बराबर हैं। दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज का परिमाप आयत के परिमाप से अधिक है।



उत्तर 1:

ΔAFD में,

$\angle F = 90°$ [∵आयत का कोण]

$AD > AF$ [∵ समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है]

दोनों ओर AB जोड़ने पर, $AD + AB > AF + AB$

2 से गुणा करने पर' $2[AD + AB] > 2[AF + AB]$

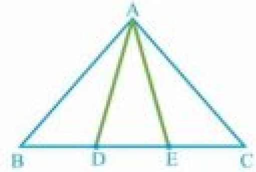
⇒ समांतर चतुर्भुज का परिमाप > आयत का परिमाप

प्रश्न 2:

आकृति में, भुजा BC पर दो बिंदु D और E इस प्रकार स्थित हैं कि $BD = DE = EC$ है।

दर्शाइए कि $ar(ABD) = ar(ADE) = ar(AEC)$ है।

क्या आप अब उस प्रश्न का उत्तर दे सकते हैं, जो आपने इस अध्याय की 'भूमिका' में छोड़ दिया था कि "क्या बुधिया का खेत वास्तव में बराबर क्षेत्रफलों वाले तीन भागों में विभाजित हो गया है"?



उत्तर 2:

ΔABE में, AD माध्यिका है। [∵ $BD = DE$]

अतः, $ar(ABD) = ar(AED)$ ... (1)

[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]

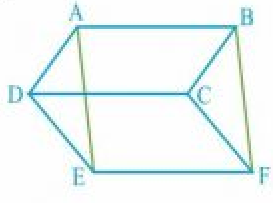
इसीप्रकार, ΔADC में, AE माध्यिका है। [∵ $DE = EC$]

अतः, $ar(ADE) = ar(AEC)$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से, $ar(ABD) = ar(ADE) = ar(AEC)$

प्रश्न 3:

आकृति में, ABCD, DCFE और ABFE समांतर चतुर्भुज हैं। दर्शाइए कि $ar(ADE) = ar(BCF)$ है।



उत्तर 3:

ΔADE और ΔBCF में,

$AD = BC$ [∵ समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ]

$DE = CF$ [∵ समांतर चतुर्भुज DCFE की सम्मुख भुजाएँ]

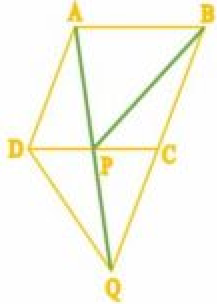
$AE = BF$ [∵ समांतर चतुर्भुज ABFE की सम्मुख भुजाएँ]

अतः, $\Delta ADE \cong \Delta BCF$ [∵ SSS सर्वांगसमता नियम]

अतः, $ar(ADE) = ar(BCF)$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं]

प्रश्न 4:

आकृति में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और BC को एक बिंदु Q तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $AD = CQ$ है। यदि AQ भुजा DC को P पर प्रतिच्छेद करती है, तो दर्शाइए कि $ar(BPC) = ar(DPQ)$ है। [**संकेत**: AC को मिलाइए।]



उत्तर 4:

ΔADP और ΔQCP में,

$\angle APD = \angle QPC$ [∵ शीर्षभिमुख कोण]

$\angle ADP = \angle QCP$ [∵ एकांतर कोण]

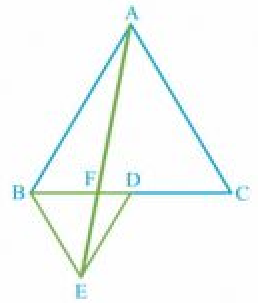
$AD = CQ$ [∵ दिया है]

अतः, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ [∵ AAS सर्वांगसमता नियम]
इसलिए, DP = CP [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]
ΔCDQ में, QP माध्यिका है। [∵ DP = CP]
अतः, $ar(DPQ) = ar(QPC)$ ... (1)
[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]

इसीप्रकार,
ΔPBQ में, PC माध्यिका है। [∵ AD = CQ और AD = BC ⇒ BC = QC]
अतः, $ar(QPC) = ar(BPC)$ ... (2)
समीकरण (1) और (2) से, $ar(BPC) = ar(DPQ)$

प्रश्न 5:

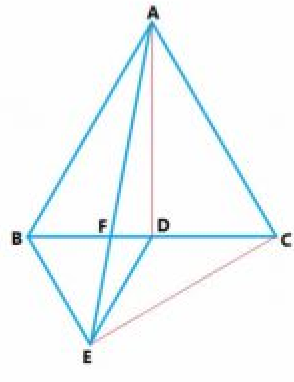
आकृति में, ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिंदु है। यदि AE भुजा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है, तो दर्शाइए कि



(i) $ar(BDE) = \frac{1}{4} ar(ABC)$ **(ii)** $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BAE)$
(iii) $ar(ABC) = 2\, ar(BEC)$ **(iv)** $ar(BFE) = ar(AFD)$
(v) $ar(BFE) = 2\, ar(FED)$ **(vi)** $ar(FED) = \frac{1}{8} ar(AFC)$
[**संकेत**: EC और AD को मिलाइए। दर्शाइए कि BE || AC और DE || AB है, इत्यादि।]

उत्तर 5:

(i) रचना: EC और AD को मिलाया।
माना, $BC = x$
इसलिए, $ar(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$ [∵ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{भुजा})^2$]
तथा $ar(BDE) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2$ [∵ D भुजा BC का मध्य-बिंदु है]
$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{4} x^2\right] = \frac{1}{4}[ar(ABC)]$



(ii) ΔBEC में, ED माध्यिका है। [∵ D भुजा BC का मध्य-बिंदु है]
अतः, $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BEC)$ ... (1)
[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]
$\angle EBC = 60°$ और $\angle BCA = 60°$ [∵ समबाहु त्रिभुज के कोण]
इसलिए, $\angle EBC = \angle BCA$
यहाँ, एकांतर कोण ($\angle EBC = \angle BCA$) बराबर हैं, अतः, BE || AC
त्रिभुज BEC और BAE एक ही आधार BE और एक ही समांतर रेखाओं BE || AC के बीच स्थित हैं।
अतः, $ar(BEC) = ar(BAE)$ ... (2)
[∵ यदि त्रिभुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो क्षेत्रफल में बराबर होते हैं]
समीकरण (1) और (2) से, अतः, $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BAE)$

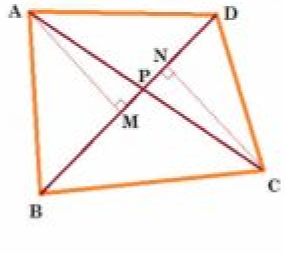
(iii) ΔBEC में, ED माध्यिका है। [∵ D भुजा BC का मध्य-बिंदु है]
अतः, $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BEC)$ ... (3)
[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]
$ar(BDE) = \frac{1}{4} ar(ABC)$ ... (4) [∵ ऊपर **(i)** में सिद्ध किया गया है]
समीकरण (3) और (4) से, $ar(ABC) = 2\, ar(BEC)$

(iv) $\angle ABD = 60°$ और $\angle BDE = 60°$ [∵ समबाहु त्रिभुज के कोण]
इसलिए, $\angle ABD = \angle BDE$
यहाँ, एकांतर कोण ($\angle ABD = \angle BDE$) बराबर हैं, अतः,
$BA \parallel ED$
त्रिभुज BDE और AED एक ही आधार ED और एक ही समांतर रेखाओं $BA \parallel ED$ के बीच स्थित हैं।
अतः, $ar(BDE) = ar(AED)$
[∵ यदि त्रिभुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो क्षेत्रफल में बराबर होते हैं]
दोनों ओर से $ar(FED)$ घटाने पर
$ar(BDE) - ar(FED) = ar(AED) - ar(FED)$
$\Rightarrow ar(BEF) = ar(AFD)$

(v) ΔBEC में, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$
ΔLED में, $EL^2 = DE^2 - DL^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow EL = \frac{\sqrt{3}a}{4}$
इसलिए, $ar(AFD) = \frac{1}{2} \times FD \times AD = \frac{1}{2} \times FD \times \frac{\sqrt{3}a}{2}$ … (5)
तथा $ar(EFD) = \frac{1}{2} \times FD \times EL = \frac{1}{2} \times FD \times \frac{\sqrt{3}a}{4}$ … (6)
समीकरण (5) और (6) से
$ar(AFD) = 2\, ar(FED)$ … (7)
$\Rightarrow ar(BFE) = 2\, ar(FED)$ [∵ **(iv)** से तुलना करने पर]

(vi) $ar(BDE) = \frac{1}{4}\, ar(ABC)$ [∵ **(i)** से]
$\Rightarrow ar(BEF) + ar(FED) = \frac{1}{4}\, ar(ABC)$
$\Rightarrow ar(BEF) + ar(FED) = \frac{1}{4}[2\, ar(ADC)]$ [∵ $ar(ABC) = 2\, ar(ABC)$]
$\Rightarrow 2\, ar(FED) + ar(FED) = \frac{1}{2}[ar(ADC)]$ [∵ **(v)** से]
$\Rightarrow 3\, ar(FED) = \frac{1}{2}[ar(AFC) - ar(AFD)]$
$\Rightarrow 3\, ar(FED) = \frac{1}{2}[ar(AFC) - 2ar(FED)]$ [∵समीकरण (7) से]
$\Rightarrow 3\, ar(FED) = \frac{1}{2} ar(AFC) - \frac{1}{2} \times 2ar(FED)$
$\Rightarrow 3\, ar(FED) = \frac{1}{2} ar(AFC) - ar(FED)$
$\Rightarrow 4\, ar(FED) = \frac{1}{2} ar(AFC)$
$\Rightarrow ar(FED) = \frac{1}{8} ar(AFC)$

प्रश्न 6:
चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $ar(APB) \times ar(CPD) = ar(APD) \times ar(BPC)$ है। [**संकेत**: A और C से BD पर लम्ब खींचिए।]

उत्तर 6:


रचना: A और C से BD पर लम्ब AM और CN खींचिए।
$ar(APB) \times ar(CPD) = \frac{1}{2} \times BP \times AM \times \frac{1}{2} \times PD \times CN$ … (1)

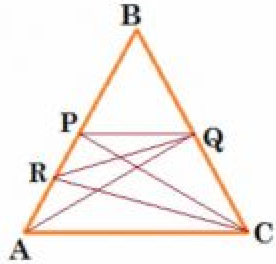
$ar(APD) \times ar(BPC) = \frac{1}{2} \times PD \times AM \times \frac{1}{2} \times BP \times CN$ … (2)
समीकरण (1) और (2) से, $ar(APB) \times ar(CPD) = ar(APD) \times ar(BPC)$

प्रश्न 7:

P और Q क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और BC के मध्य-बिंदु हैं तथा R रेखाखंड AP का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि:

(i) $ar(\text{PRQ}) = \frac{1}{2}ar(\text{ARC})$ **(ii)** $ar(\text{RQC}) = \frac{3}{8}ar(\text{ABC})$ **(iii)** $ar(\text{PBQ}) = ar(\text{ARC})$

उत्तर 7:



रचना: AQ, PC, RC तथा RQ को मिलाया।

(i) ΔAPQ में, QR माध्यिका है। [$\because$ दिया है]

अतः, $ar(\text{PQR}) = \frac{1}{2}ar(\text{APQ})$ ... (1)

[$\because$ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]

इसीप्रकार,

ΔAQB में, QP माध्यिका है। [$\because$ दिया है]

अतः, $ar(\text{APQ}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABQ})$ ... (2)

तथा ΔABC में, AQ माध्यिका है। [$\because$ दिया है]

अतः, $ar(\text{ABQ}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$ ... (3)

समीकरण (1), (2) और (3) से

$ar(\text{PQR}) = \frac{1}{8}ar(\text{ABC})$ ... (4)

ΔARC में, CR माध्यिका है। [$\because$ दिया है]

अतः, $ar(\text{ARC}) = \frac{1}{2}ar(\text{APC})$ ... (5)

[$\because$ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]

इसीप्रकार,

ΔABC में, CP माध्यिका है। [$\because$ दिया है]

अतः, $ar(\text{APC}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$ ... (6)

समीकरण (5) और (6) से

$ar(\text{ARC}) = \frac{1}{4}ar(\text{ABC})$ ... (7)

समीकरण (4) और (7) से

$$ar(\text{PQR}) = \frac{1}{8}ar(\text{ABC}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}ar(\text{ABC})\right] = \frac{1}{2}ar(\text{ARC})$$

(ii) $ar(\text{RQC}) = ar(\text{RQA}) + ar(\text{AQC}) - ar(\text{ARC})$ ... (8)

ΔPQA में, QR माध्यिका है। [$\because$ दिया है]

अतः, $ar(\text{RQA}) = \frac{1}{2}ar(\text{PQA})$ ... (9)

ΔAQB में, PQ माध्यिका है।

अतः, $ar(\text{PQA}) = \frac{1}{2}ar(\text{AQB})$ ... (10)

ΔABC में, AQ माध्यिका है। [$\because$ दिया है]

अतः, $ar(\text{AQB}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$ ... (11)

समीकरण (9), (10) और (11) से

$ar(\text{RQA}) = \frac{1}{8}ar(\text{ABC})$ ... (12)

ΔABC में, AQ माध्यिका है। [$\because$ दिया है]

अतः, $ar(\text{AQC}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$ ... (13)

ΔAPC में, CR माध्यिका है।

अतः, $ar(\text{ARC}) = \frac{1}{2}ar(\text{APC})$ ... (14)

ΔABC में, CP माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(\text{APC}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$ ... (15)

समीकरण (14) और (15) से

$ar(\text{ARC}) = \frac{1}{4}ar(\text{ABC})$ ... (16)

समीकरण (8), (12), (13) और (16) से

$ar(\text{RQC}) = \frac{1}{8}ar(\text{ABC}) + \frac{1}{2}ar(\text{ABC}) - \frac{1}{4}ar(\text{ABC}) = \frac{3}{8}ar(\text{ABC})$

(iii) ΔABQ में, PQ माध्यिका है। [∵ दिया है]

अतः, $ar(\text{PBQ}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABQ})$ ... (17)

ΔABC में, AQ माध्यिका है।

अतः, $ar(\text{ABQ}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$ ... (18)

समीकरण (16), (17) और (18) से

$ar(\text{PQB}) = ar(\text{ARC})$

प्रश्न 8:

आकृति में, ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है। BCED, ACFG और ABMN क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB पर बने वर्ग हैं। रेखाखंड AX ⊥ DE भुजा BC को बिंदु Y पर मिलता है। दर्शाइए कि:

(i) $\Delta\text{MBC} \cong \Delta\text{ABD}$

(ii) $ar(\text{BYXD}) = 2\,ar(\text{MBC})$

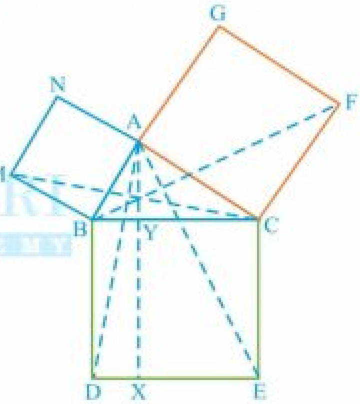
(iii) $ar(\text{BYXD}) = ar(\text{ABMN})$

(iv) $\Delta\text{FCB} \cong \Delta\text{ACE}$

(v) $ar(\text{CYXE}) = 2\,ar(\text{FCB})$

(vi) $ar(\text{CYXE}) = ar(\text{ACFG})$

(vii) $ar(\text{BCED}) = ar(\text{ABMN}) + ar(\text{ACFG})$



उत्तर 8:

(i) ΔMBC और ΔABD में,

AB = AC [∵ वर्ग की भुजा]

$\angle$MBC = $\angle$ABD [∵ प्रत्येक 90° + $\angle$ABC]

MB = AB [∵ वर्ग की भुजा]

अतः, $\Delta\text{MBC} \cong \Delta\text{ABD}$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

(ii) त्रिभुज ABD और समांतर चतुर्भुज BYXD एक ही आधार BD और एक ही समांतर रेखाओं AX || BD के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{ABD}) = \frac{1}{2}ar(\text{BYXD})$ ... (1)

[∵ यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।]

लेकिन, $\Delta\text{MBC} \cong \Delta\text{ABD}$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

इसलिए, $ar(\text{MBC}) = ar(\text{ABD})$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से

$ar(\text{MBC}) = \frac{1}{2}ar(\text{BYXD})$ ... (3)

$\Rightarrow 2\,ar(\text{MBC}) = ar(\text{BYXD})$

(iii) त्रिभुज MBC और वर्ग ABMN एक ही आधार MB और एक ही समांतर रेखाओं MB || NC के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{MBC}) = \frac{1}{2} ar(\text{ABMN})$ ... (4)

[∵ यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।]

समीकरण (3) और (4) से

$ar(\text{BYXD}) = ar(\text{ABMN})$

(iv) ΔACE और ΔBCF में,

CE = BC [∵ वर्ग की भुजा]

$\angle$ACE = $\angle$BCF [∵ प्रत्येक $90° + \angle$BCA]

AC = CF [∵ वर्ग की भुजा]

अतः, $\Delta\text{ACE} \cong \Delta\text{BCF}$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

(v) त्रिभुज ACE और वर्ग CYXE एक ही आधार CE और एक ही समांतर रेखाओं CE || AX के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{ACE}) = \frac{1}{2} ar(\text{CYXE})$

[∵ यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।]

$\Rightarrow ar(\text{FCB}) = \frac{1}{2} ar(\text{CYXE})$ ... (5) [∵ $ar(\text{FCB}) = ar(\text{ACE})$]

$\Rightarrow 2\, ar(\text{FCB}) = ar(\text{CYXE})$

(vi) त्रिभुज BCF और वर्ग ACFG एक ही आधार CF और एक ही समांतर रेखाओं CF || FG के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{BCF}) = \frac{1}{2} ar(\text{ACFG})$ ... (6)

[∵ यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।]

समीकरण (5) और (6) से

$\Rightarrow ar(\text{CYXE}) = ar(\text{ACFG})$

(vii) भाग (iii) और (vi) से

$ar(\text{BYXD}) = ar(\text{ABMN})$ तथा $ar(\text{CYXE}) = ar(\text{ACFG})$

दोनों को जोड़ने पर

$ar(\text{BYXD}) + ar(\text{CYXE}) = ar(\text{ABMN}) + ar(\text{ACFG})$

$\Rightarrow ar(\text{BCED}) = ar(\text{ABMN}) + ar(\text{ACFG})$