गणित

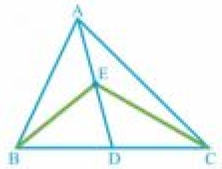
(www.tiwariacademy.com)
(अध्याय - 9)(समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल)
(कक्षा - 9)

प्रश्नावली 9.3

प्रश्न 1:

आकृति में, ΔABC की एक माध्यिका AD पर स्थित कोई बिंदु E है। दर्शाइए कि $ar(\text{ABE}) = ar(\text{ACE})$ है।

उत्तर 1:

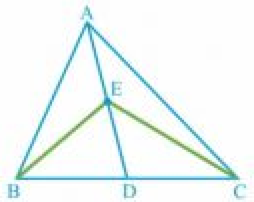


ΔABC में, AD माध्यिका है। [$\because$ दिया है]
अतः, $ar(\text{ABD}) = ar(\text{ACD})$ ... (1)
[$\because$ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]
इसीप्रकार, ΔEBC में, ED माध्यिका है। [$\because$ दिया है]
अतः, $ar(\text{EBD}) = ar(\text{ECD})$ ... (2)
समीकरण (1) से समीकरण (2) को घटाने पर
$ar(\text{ABD}) - ar(\text{EBD}) = ar(\text{ACD}) - ar(\text{ECD})$
$\Rightarrow ar(\text{ABE}) = ar(\text{ACE})$

प्रश्न 2:

ΔABC में, E माध्यिका AD का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि $ar(\text{BED}) = \frac{1}{4}ar(\text{ABC})$ है।

उत्तर 2:

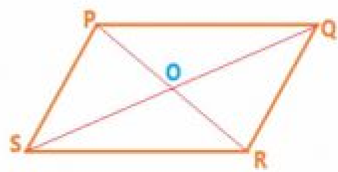


ΔABC में, AD माध्यिका है। [$\because$ दिया है]
अतः, $ar(\text{ABD}) = ar(\text{ACD})$
$\Rightarrow ar(\text{ABD}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$ ... (1)
[$\because$ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]
इसीप्रकार, ΔABD में, BE माध्यिका है। [$\because$ E, AD का मध्य-बिंदु है]
अतः, $ar(\text{BED}) = ar(\text{ABE})$
$\Rightarrow ar(\text{BED}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABD})$
$\Rightarrow ar(\text{BED}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}ar(\text{ABC})\right]$ [$\because ar(\text{ABD}) = \frac{1}{2}ar(\text{ABC})$]
$\Rightarrow ar(\text{BED}) = \frac{1}{4}ar(\text{ABC})$

प्रश्न 3:

दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले चार त्रिभुजों में बाँटते हैं।

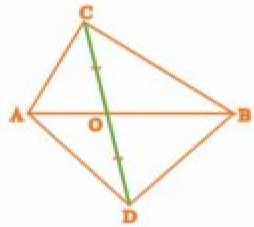
उत्तर 3:



समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
इसलिए, PO = OR और SO = OQ
ΔPQS में, PO माध्यिका है। [$\because$ SO = OQ]
अतः, $ar(\text{PSO}) = ar(\text{PQO})$ ... (1)
[$\because$ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]
इसीप्रकार, ΔPQR में, QO माध्यिका है। [$\because$ PO = OR]
अतः, $ar(\text{PQO}) = ar(\text{QRO})$ ... (2)
तथा ΔQRS में, RO माध्यिका है। [$\because$ SO = OQ]
अतः, $ar(\text{QRO}) = ar(\text{RSO})$ ... (3)
समीकरण (1), (2) और (3) से
$ar(\text{PSO}) = ar(\text{PQO}) = ar(\text{QRO}) = ar(\text{RSO})$
अतः, समांतर चतुर्भुज PQRS के दोनों विकर्ण PR और QS उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले चार त्रिभुजों में बाँटते हैं।

प्रश्न 4:

आकृति में, ABC और ABD एक ही आधार AB पर बने दो त्रिभुज हैं। यदि रेखाखंड CD रेखाखंड AB से बिंदु O पर समद्विभाजित होता है, तो दर्शाइए कि $ar(\text{ABC}) = ar(\text{ABD})$ है।



उत्तर 4:

ΔADC में, AO माध्यिका है। [∵ CO = OD]

अतः, $ar(\text{ACO}) = ar(\text{ADO})$ ... (1)

[∵ त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है]

इसीप्रकार, ΔBDC में, BO माध्यिका है। [∵ CO = OD]

अतः, $ar(\text{BCO}) = ar(\text{BDO})$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$ar(\text{ACO}) + ar(\text{BCO}) = ar(\text{ADO}) + ar(\text{BDO})$

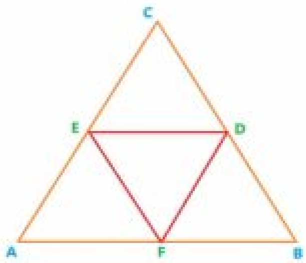
$\Rightarrow ar(\text{ABC}) = ar(\text{ABD})$

प्रश्न 5:

D, E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि

(i) BDEF एक समांतर चतुर्भुज है **(ii)** $ar(\text{DEF}) = \frac{1}{4} ar(\text{ABC})$ **(iii)** $ar(\text{BDEF}) = \frac{1}{2} ar(\text{ABC})$

उत्तर 5:



(i) त्रिभुज ABC में, E और D क्रमशः भुजाओं CA और BC के मध्य-बिंदु हैं।

अतः, ED || AB और ED $= \frac{1}{2}$AB [∵ मध्य-बिंदु प्रमेय]

⇒ ED || AB और ED = FB [∵ F भुजा AB का मध्य-बिंदु है]

⇒ BDEF एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) BDEF एक समांतर चतुर्भुज है। [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

$ar(\text{DEF}) = ar(\text{BDF})$ ... (1)

[∵ विकर्ण, समांतर चतुर्भुज को दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।]

इसीप्रकार,

AEDF एक समांतर चतुर्भुज है।

$ar(\text{DEF}) = ar(\text{AEF})$ ... (2)

तथा AEDF एक समांतर चतुर्भुज है।

$ar(\text{DEF}) = ar(\text{CDE})$ ... (3)

समीकरण (1), (2) और (3) से

$ar(\text{DEF}) = ar(\text{BDF}) = ar(\text{AEF}) = ar(\text{CDF})$

माना $ar(\text{DEF}) = ar(\text{BDF}) = ar(\text{AEF}) = ar(\text{CDF}) = x$

इसलिए, $ar(\text{ABC}) = ar(\text{DEF}) + ar(\text{BDF}) + ar(\text{AEF}) + ar(\text{CDF})$

$\Rightarrow ar(\text{ABC}) = x + x + x + x = 4x = 4ar(\text{DEF})$

$\Rightarrow ar(\text{DEF}) = \dfrac{1}{4} ar(\text{ABC})$

(iii) $ar(\text{BDEF}) = ar(\text{DEF}) + ar(\text{BDF}) = x + x = 2x$

$\Rightarrow ar(\text{BDEF}) = \frac{1}{2} \times 4x$

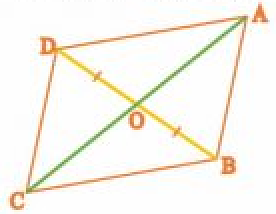
$\Rightarrow ar(\text{BDEF}) = \frac{1}{2} \times ar(\text{ABC})$ [∵ $ar(\text{ABC}) = 4x$]

प्रश्न 6:

आकृति में, चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OB = OD है। यदि AB = CD है, तो दर्शाइए कि

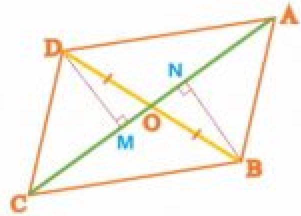
(i) $ar(DOC) = ar(AOB)$ **(ii)** $ar(DCB) = ar(ACB)$ **(iii)** DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

[**संकेत**: D और B से AC पर लम्ब खींचिए।]



उत्तर 6:

(i) रचना: D और B से AC पर क्रमशः DM और BN लम्ब खींचिए।



ΔDMO और ΔBNO में,

$\angle DMO = \angle BNO$ [∵ प्रत्येक 90°]

$\angle DOM = \angle BON$ [∵ शीर्षाभिमुख कोण]

DO = BO [∵ दिया है]

अतः, $\Delta DMO \cong \Delta BNO$ [∵ AAS सर्वांगसमता नियम]

DM = BN ... (1) [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

तथा $ar(DMO) = ar(BNO)$ ... (2) [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के क्षेत्रफल बराबर होते हैं]

ΔDMC और ΔBNA में,

$\angle DMC = \angle BNA$ [∵ प्रत्येक 90°]

DM = BN [∵ समीकरण (1) से]

CD = AB [∵ दिया है]

अतः, $\Delta DMC \cong \Delta BNA$ [∵ RHS सर्वांगसमता नियम]

तथा $ar(DMC) = ar(BNA)$ ... (3) [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के क्षेत्रफल बराबर होते हैं]

समीकरण (2) और (3) को जोड़ने पर

$ar(DMO) + ar(DMC) = ar(BNO) + ar(BNA)$

$\Rightarrow ar(DOC) = ar(AOB)$

(ii) $ar(DOC) = ar(AOB)$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

दोनों ओर $ar(BOC)$ जोड़ने पर

$ar(DOC) + ar(BOC) = ar(AOB) + ar(BOC)$

$\Rightarrow ar(DCB) = ar(ACB)$

(iii) $\Delta DMC \cong \Delta BNA$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

$\angle DCM = \angle BAN$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

यहाँ, एकांतर कोण ($\angle DCM = \angle BAN$) बराबर हैं, अतः,

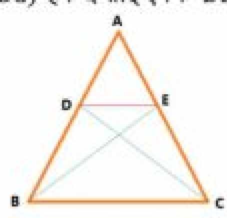
CD || AB

तथा CD = AB [∵ दिया है]

इसलिए, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्न 7:

बिंदु D और E क्रमशः ΔABC की भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि $ar(DBC) = ar(EBC)$ है। दर्शाइए कि DE || BC है।



उत्तर 7:

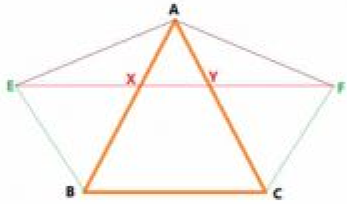
ΔDBC और ΔEBC एक ही आधार BC पर स्थित हैं तथा $ar(DBC) = ar(EBC)$

इसलिए, DE || BC

[∵ एक ही आधार वाले त्रिभुज जो क्षेत्रफल में बराबर हों, एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते है]

प्रश्न 8:

XY त्रिभुज ABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा है। यदि BE || AC और CF || AB रेखा XY से क्रमशः E और F पर मिलती हैं, तो दर्शाइए कि: $ar(\text{ABE}) = ar(\text{ACF})$



उत्तर 8:

चतुर्भुज BCYE में, BE || CY [$\because$ BE || AC]

BC || EY [$\because$ BC || XY]

इसलिए, BCYE एक समांतर चतुर्भुज है।

त्रिभुज ABE और समांतर चतुर्भुज BCYE एक ही आधार BE और एक ही समांतर रेखाओं BE || AC के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{ABE}) = \frac{1}{2} ar(\text{BCYE})$ ... (1)

[$\because$ यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।]

इसीप्रकार, त्रिभुज ACF और समांतर चतुर्भुज BCFX एक ही आधार CF और एक ही समांतर रेखाओं CF || AB के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{ACF}) = \frac{1}{2} ar(\text{BCFX})$ ... (2)

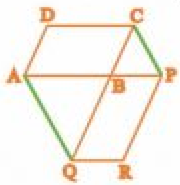
तथा, $ar(\text{BCYE}) = ar(\text{BCFX})$ ... (3)

[$\because$ एक ही आधार (BC) वाले और एक ही समांतर रेखाओं (BC || EF) के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते है]

समीकरण (1), (2) और (3) से, $ar(\text{ABE}) = ar(\text{ACF})$

प्रश्न 9:

समांतर चतुर्भुज ABCD की एक भुजा AB को एक बिंदु P तक बढ़ाया गया है। A से होकर CP के समांतर खींची गई रेखा बढ़ाई गई CB को Q पर मिलती है और फिर समांतर चतुर्भुज PBQR को पूरा किया गया है (देखिए आकृति)।



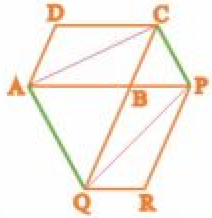
दर्शाइए कि $ar(\text{ABCD}) = ar(\text{PBQR})$ है।

[**संकेत**: AC और PQ को मिलाइए। अब $ar(\text{ACQ})$ और $ar(\text{APQ})$ की तुलना कीजिए।]

उत्तर 9:

रचना: AC और PQ को मिलाया।

त्रिभुज ACQ और APQ एक ही आधार AQ और एक ही समांतर रेखाओं AQ || CP के बीच स्थित हैं।



अतः, $ar(\text{ACQ}) = ar(\text{APQ})$

[$\because$ एक ही आधार वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है]

दोनों ओर से $ar(\text{ABQ})$ घटाने पर

$ar(\text{ACQ}) - ar(\text{ABQ}) = ar(\text{APQ}) - ar(\text{ABQ})$

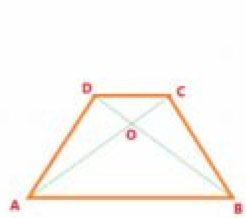
$\Rightarrow ar(\text{ABC}) = ar(\text{PBQ}) \Rightarrow \frac{1}{2} ar(\text{ABCD}) = \frac{1}{2} ar(\text{PBQR})$

[$\because$ विकर्ण, समांतर चतुर्भुज को दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।]

$\Rightarrow ar(\text{ABCD}) = ar(\text{PBQR})$

प्रश्न 10:

एक समलंब ABCD, जिसमें AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $ar(\text{AOD}) = ar(\text{BOC})$है।



उत्तर 10:

त्रिभुज ABD और ABC एक ही आधार AB और एक ही समांतर रेखाओं AB || CD के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{ABD}) = ar(\text{ABC})$

[$\because$ एक ही आधार वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है]

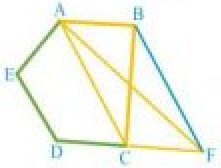
दोनों ओर से $ar(\text{ABO})$ घटाने पर, $ar(\text{ABD}) - ar(\text{ABO}) = ar(\text{ABC}) - ar(\text{ABO})$

$\Rightarrow ar(\text{AOD}) = ar(\text{BOC})$

प्रश्न 11:

आकृति में, ABCDE एक पंचभुज है। B से होकर AC के समांतर खींची गई रेखा बढ़ाई गई DC को F पर मिलती है। दर्शाइए कि

(i) $ar(\mathrm{ACB}) = ar(\mathrm{ACF})$ **(ii)** $ar(\mathrm{AEDF}) = ar(\mathrm{ABCDE})$



उत्तर 11:

(i) त्रिभुज ACB और ACF एक ही आधार AC और एक ही समांतर रेखाओं AC || FB के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\mathrm{ACB}) = ar(\mathrm{ACF})$

[∵ एक ही आधार वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है]

(ii) $ar(\mathrm{ACB}) = ar(\mathrm{ACF})$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

दोनों ओर $ar(\mathrm{AEDC})$ जोड़ने पर

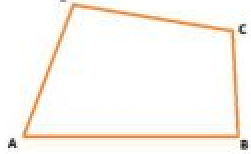
$ar(\mathrm{ACB}) + ar(\mathrm{AEDC}) = ar(\mathrm{ACF}) + ar(\mathrm{AEDC})$

$\Rightarrow ar(\mathrm{ABCDE}) = ar(\mathrm{AEDF})$

प्रश्न 12:

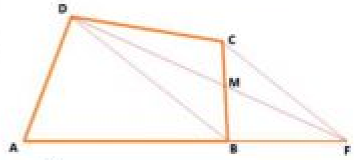
गाँव के एक निवासी इतवारी के पास एक चतुर्भुजाकार भूखंड था। उस गाँव की ग्राम पंचायत ने उसके भूखंड के एक कोने से उसका कुछ भाग लेने का निर्णय लिया ताकि वहाँ एक स्वास्थ्य केन्द्र का निर्माण कराया जा सके। इतवारी इस प्रस्ताव को इस प्रतिबन्ध के साथ स्वीकार कर लेता है कि उसे इस भाग के बदले उसी भूखंड के संलग्न एक भाग ऐसा दे दिया जाए कि उसका भूखंड त्रिभुजाकार हो जाए। स्पष्ट कीजिए कि इस प्रस्ताव को किस प्रकार कार्यान्वित किया जा सकता है।

उत्तर 12:



माना ABCD इतवारी का भूखंड है।

BD को मिलाया और C से BD के समांतर रेखा CF खींची जो बढ़ाई गई AB को बिंदु F पर कटती है। अब D और F को मिलाया।



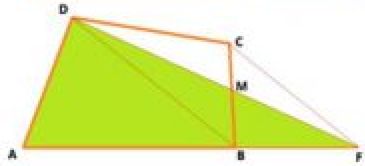
त्रिभुज CBD और FBD एक ही आधार BD और एक ही समांतर रेखाओं BD || CF के बीच स्थित हैं। अतः, $ar(\mathrm{CBD}) = ar(\mathrm{FBD})$

[∵ एक ही आधार वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है]

दोनों ओर से $ar(\mathrm{BDM})$ घटाने पर

$ar(\mathrm{CBD}) - ar(\mathrm{BDM}) = ar(\mathrm{FBD}) - ar(\mathrm{BDM})$

$\Rightarrow ar(\mathrm{CMD}) = ar(\mathrm{BFM})$

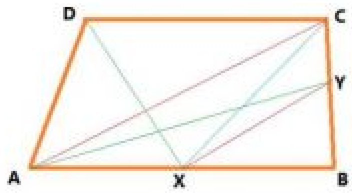


अतः, उसे $\Delta\mathrm{CMD}$ के बदले उसी भूखंड के संलग्न $\Delta\mathrm{BFM}$ दे दिया जाए तो उसका भूखंड ($\Delta\mathrm{ADF}$) त्रिभुजाकार हो जाएगा।

प्रश्न 13:

ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है। AC के समांतर एक रेखा AB को X पर और BC को Y पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $ar(\mathrm{ADX}) = ar(\mathrm{ACY})$ है। [**संकेत:** CX को मिलाइए।]

उत्तर 13:



रचना: CX को मिलाया।

त्रिभुज ADX और ACX एक ही आधार AX और एक ही समांतर रेखाओं AB || DC के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\mathrm{ADX}) = ar(\mathrm{ACX})$ ... (1)

[∵ एक ही आधार वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है]

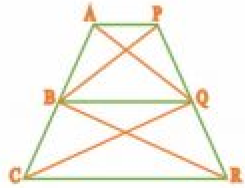
इसीप्रकार, त्रिभुज ACY और ACX एक ही आधार AC और एक ही समांतर रेखाओं AC || XY के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\mathrm{ACY}) = ar(\mathrm{ACX})$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से, $ar(\mathrm{ADX}) = ar(\mathrm{ACY})$

प्रश्न 14:

आकृति में, AP || BQ || CR है। सिद्ध कीजिए कि $ar(\text{AQC}) = ar(\text{PBR})$ है।



उत्तर 14:

त्रिभुज ABQ और PBQ एक ही आधार BQ और एक ही समांतर रेखाओं BQ || AP के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{ABQ}) = ar(\text{PBQ})$ ... (1)

[∵ एक ही आधार वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है]

इसीप्रकार,

त्रिभुज BQC और BQR एक ही आधार BQ और एक ही समांतर रेखाओं BQ || CR के बीच स्थित हैं।

अतः, $ar(\text{BQC}) = ar(\text{BQR})$ ... (2)

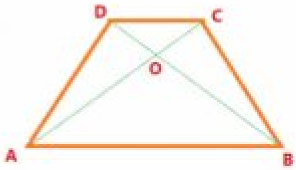
समीकरण (1) और (2) जोड़ने पर

$ar(\text{ABQ}) + ar(\text{BQC}) = ar(\text{PBQ}) + ar(\text{BQR})$

$\Rightarrow ar(\text{AQC}) = ar(\text{PBR})$

प्रश्न 15:

चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $ar(\text{AOD}) = ar(\text{BOC})$ है। सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलंब है।



उत्तर 15:

$ar(\text{AOD}) = ar(\text{BOC})$ [∵ दिया है]

दोनों ओर $ar(\text{AOB})$ जोड़ने पर

$ar(\text{AOD}) + ar(\text{AOB}) = ar(\text{BOC}) + ar(\text{AOB})$

$\Rightarrow ar(\text{ABD}) = ar(\text{ABC})$

ΔABD और ΔABC एक ही आधार AB पर स्थित हैं तथा $ar(\text{ABD}) = ar(\text{ABC})$

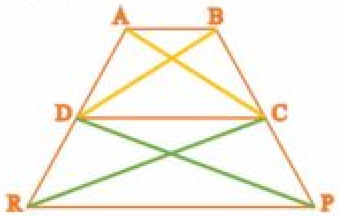
इसलिए, AB || DC

[∵ एक ही आधार वाले त्रिभुज जो क्षेत्रफल में बराबर हों, एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते है]

अतः, ABCD एक समलंब है।

प्रश्न 16:

आकृति में, $ar(\text{DRC}) = ar(\text{DPC})$ है और $ar(\text{BDP}) = ar(\text{ARC})$ है। दर्शाइए कि दोनों चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब हैं।



उत्तर 16:

$ar(\text{DRC}) = ar(\text{DPC})$ ... (1) [∵ दिया है]

ΔDRC और ΔDPC एक ही आधार DC पर स्थित हैं तथा $ar(\text{DRC}) = ar(\text{DPC})$

इसलिए, DC || RP

[∵ एक ही आधार वाले त्रिभुज जो क्षेत्रफल में बराबर हों, एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते है]

अतः, DCPR एक समलंब है।

तथा $ar(\text{ARC}) = ar(\text{BDP})$ ... (2) [∵ दिया है]

समीकरण (2) से समीकरण (1) को घटाने पर

$ar(\text{ARC}) - ar(\text{DRC}) = ar(\text{BDP}) - ar(\text{DPC})$

$\Rightarrow ar(\text{ADC}) = ar(\text{BDC})$

ΔADC और ΔBDC एक ही आधार DC पर स्थित हैं तथा $ar(\text{ADC}) = ar(\text{BDC})$

इसलिए, AB || DC

[∵ एक ही आधार वाले त्रिभुज जो क्षेत्रफल में बराबर हों, एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते है]

अतः, ABCD एक समलंब है।