गणित

(www.tiwariacademy.com)

(अध्याय – 8)(चतुर्भुज)

(कक्षा – 9)

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1:

एक चतुर्भुज के कोण 3:5:9:13 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1:

माना, पहला कोण $= 3x$

इसलिए, दूसरा कोण $= 5x$, तीसरा कोण $= 9x$, चौथा कोण $= 13x$

चतुर्भुज के सभी कोणों का योग 360° होता है। अतः, $3x + 5x + 9x + 13x = 360°$

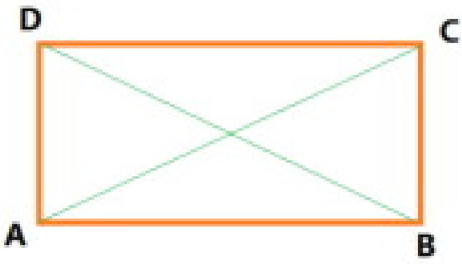
$\Rightarrow 30x = 360° \quad \Rightarrow x = \frac{360°}{30} = 12°$

अतः, पहला कोण $= 3 \times 12° = 36°$, दूसरा कोण $= 5 \times 12° = 60°$,

तीसरा कोण $= 9 \times 12° = 108°$ चौथा कोण $= 13 \times 12° = 156°$

प्रश्न 2:

यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह एक आयत है।



उत्तर 2:

दिया है: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा AC = BD है।

सिद्ध करना है: ABCD एक आयत है।

हल: ΔABC और ΔBAD में,

BC = AD [∵ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं]

AC = BD [∵ दिया है]

AB = AB [∵ उभयनिष्ठ]

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ [∵ SSS सर्वांगसमता नियम]

$\angle ABC = \angle BAD$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

परन्तु, $\angle ABC + \angle BAD = 180°$ [∵ अंतः कोण संपूरक होते हैं]

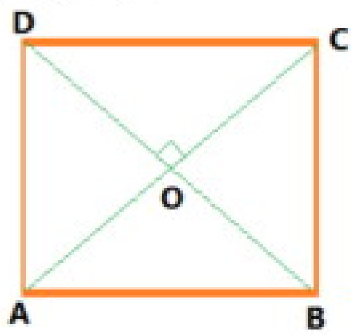
$\Rightarrow 2\angle BAD = 180°$ [∵ $\angle ABC = \angle BAD$]

$\Rightarrow \angle BAD = \frac{180°}{2} = 90°$

एक समांतर चतुर्भुज जिसका एक कोण समकोण हो, आयत होता है। अतः ABCD एक आयत है।

प्रश्न 3:

दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।



उत्तर 3:

दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AO = CO, BO = DO तथा $\angle COD = 90°$ है।

सिद्ध करना है: ABCD एक समचतुर्भुज है।

हल: ΔAOB और ΔAOD में,

BO = DO [∵ दिया है]

$\angle AOB = \angle AOD$ [∵ प्रत्येक 90°]

AO = AO [∵ उभयनिष्ठ]

अतः, $\Delta AOB \cong \Delta AOD$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

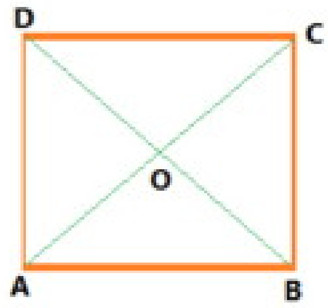
AB = AD [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

इसीप्रकार, AB = BC तथा BC = CD

यहाँ, चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हैं।

अतः, ABCD एक समचतुर्भुज है।

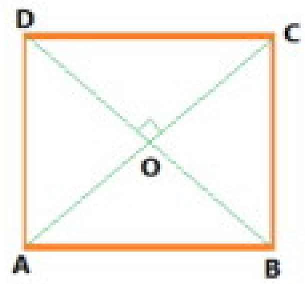
प्रश्न 4:
दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

उत्तर 4:


दिया है: ABCD एक वर्ग है।
सिद्ध करना है: $AC = BD$, $AO = CO$, $BO = DO$ तथा $\angle COD = 90°$ है।
हल: ΔBAD और ΔABC में,
$AD = BC$ [∵ एक वर्ग की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं]
$\angle BAD = \angle ABC$ [∵ प्रत्येक 90°]
$AB = AB$ [∵ उभयनिष्ठ]
अतः, $\Delta BAD \cong \Delta ABC$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]
$BD = AC$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]
ΔAOB और ΔCOD में,
$\angle OAB = \angle OCD$ [∵ एकांतर कोण]
$AB = CD$ [∵ एक वर्ग की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं]
$\angle OBA = \angle ODC$ [∵ एकांतर कोण]
अतः, $\Delta BAD \cong \Delta ABC$ [∵ ASA सर्वांगसमता नियम]
$AO = OC$, $BO = OD$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]
ΔAOB और ΔAOD में,
$OB = OD$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]
$AB = AD$ [∵ वर्ग की भुजाएँ समान होती हैं]
$OA = OA$ [∵ उभयनिष्ठ]
अतः, $\Delta BAD \cong \Delta ABC$ [∵ SSS सर्वांगसमता नियम]
$\angle AOB = \angle AOD$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]
परन्तु, $\angle AOB + \angle AOD = 180°$ [∵ रैखिक युग्म]
$\Rightarrow 2\angle AOB = 180°$ [∵ $\angle AOD = \angle AOB$]
$\Rightarrow \angle AOB = \frac{180°}{2} = 90°$
अतः, वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

प्रश्न 5:
दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक वर्ग होता है।

उत्तर 5:
दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें $AC = BD$, $AO = CO$, $BO = DO$ तथा $\angle COD = 90°$ है।
सिद्ध करना है: ABCD एक वर्ग है।
हल: यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।
अतः, $AB = BC = CD = DA$



ΔBAD और ΔABC में,
$AD = BC$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]
$BD = AC$ [∵ दिया है]
$AB = AB$ [∵ उभयनिष्ठ]
अतः, $\Delta BAD \cong \Delta ABC$ [∵ SSS सर्वांगसमता नियम]
$\angle BAD = \angle ABC$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]
परन्तु, $\angle BAD + \angle ABC = 180°$ [∵ अंतः कोण संपूरक होते हैं]

$\Rightarrow 2\angle ABC = 180^\circ$ [$\because \angle BAD = \angle ABC$]

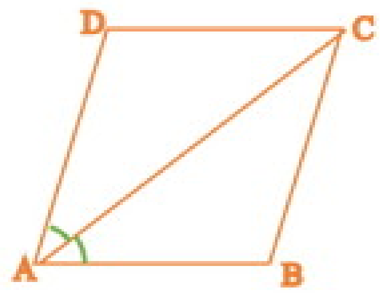
$\Rightarrow \angle ABC = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

एक समचतुर्भुज जिसका एक कोण 90° का हो, एक वर्ग होता है। अतः, ABCD एक वर्ग है।

प्रश्न 6:
समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति) । दर्शाइए कि

(i) यह $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

(ii) ABCD एक समचतुर्भुज है।



उत्तर 6:
(i) $\angle DAC = \angle BAC$ ... (1) [$\because$ दिया है]

$\angle DAC = \angle BCA$ ... (2) [$\because$ एकांतर कोण]

$\angle BAC = \angle ACD$ ... (3) [$\because$ एकांतर कोण]

समीकरण (1), (2) और (3) से

$\angle ACD = \angle BCA$ ... (4)

अतः, विकर्ण AC कोण C भी समद्विभाजित करता है।

(ii) समीकरण (2) और (4) से

$\angle ACD = \angle DAC$

ΔADC में,

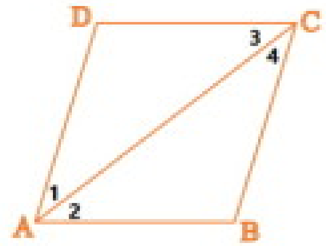
$\angle ACD = \angle DAC$ [$\because$ ऊपर सिद्ध किया गया है]

$AD = DC$ [$\because$ त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

एक समांतर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाएँ समान हों, समचतुर्भुज होता है। अतः, ABCD एक समचतुर्भुज है।

प्रश्न 7:
ABCD एक समचतुर्भुज है। दर्शाइए कि विकर्ण AC कोणों A और C दोनों को समद्विभाजित करता है तथा विकर्ण BD कोणों B और D दोनों को समद्विभाजित करता है।

उत्तर 7:



ΔADC में,

$AD = DC$ [$\because$ ABCD एक समचतुर्भुज है]

$\angle 3 = \angle 1$ ... (1) [$\because$ त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

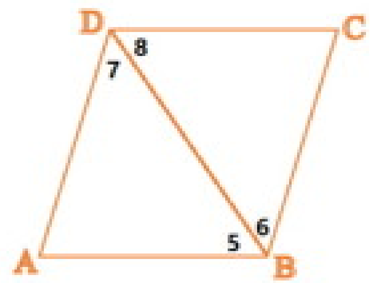
परन्तु, $\angle 3 = \angle 2$ ... (2) [$\because$ एकांतर कोण]

अतः, $\angle 1 = \angle 2$ ... (3) [$\because$ समीकरण (1) और (2) से]

तथा $\angle 1 = \angle 4$ ... (4) [$\because$ एकांतर कोण]

अतः, $\angle 3 = \angle 4$ ... (5) [$\because$ समीकरण (1) और (4) से]

अतः, समीकरण (3) और (5) से, विकर्ण AC कोणों A और C दोनों को समद्विभाजित करता है।



ΔADB में,

$AD = AB$ [$\because$ ABCD एक समचतुर्भुज है]

$\angle 5 = \angle 7$ ... (6) [$\because$ त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

परन्तु, $\angle 7 = \angle 6$ ... (7) [$\because$ एकांतर कोण]

अतः, $\angle 5 = \angle 6$ ... (8) [$\because$ समीकरण (6) और (7) से]

तथा $\angle 5 = \angle 8$ ... (9) [$\because$ एकांतर कोण]

अतः, $\angle 7 = \angle 8$ ... (10) [$\because$ समीकरण (6) और (9) से]

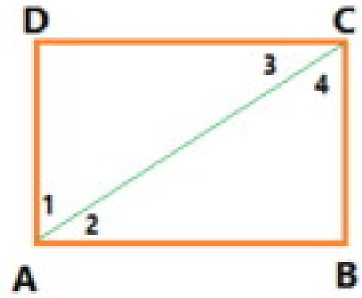
अतः, समीकरण (8) और (10) से, विकर्ण BD कोणों B और D दोनों को समद्विभाजित करता है।

प्रश्न 8:

ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोणों A और C को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि

(i) ABCD एक वर्ग है।

(ii) विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है।



उत्तर 8:

(i) दिया है: ABCD एक आयत है जिसमें $\angle 1 = \angle 2$ तथा $\angle 3 = \angle 4$ है।

सिद्ध करना है: ABCD एक वर्ग है।

हल: $\angle 1 = \angle 4$ ... (1) [∵ एकांतर कोण]

$\angle 3 = \angle 4$ ... (2) [∵ दिया है]

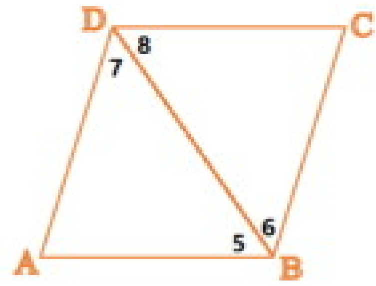
अतः, $\angle 1 = \angle 3$ ... (3) [∵ समीकरण (1) और (2) से]

ΔADC में,

$\angle 1 = \angle 3$ [∵ समीकरण (3) से]

DC = AD [∵ त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

एक आयत जिसकी आसन्न भुजाएँ समान हों, वर्ग होता है। अतः, ABCD एक वर्ग है।



(ii) सिद्ध करना है: विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है।

हल: $\angle 5 = \angle 8$ ... (4) [∵ एकांतर कोण]

ΔADB में,

AB = AD [∵ ABCD एक वर्ग है]

$\angle 7 = \angle 5$ ... (5) [∵ त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

अतः, $\angle 7 = \angle 8$ ... (6) [∵ समीकरण (4) और (5) से]

तथा $\angle 7 = \angle 6$ ... (7) [∵ एकांतर कोण]

अतः, $\angle 5 = \angle 6$ ... (8) [∵ समीकरण (5) और (7) से]

अतः, समीकरण (6) और (8) से, विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है।

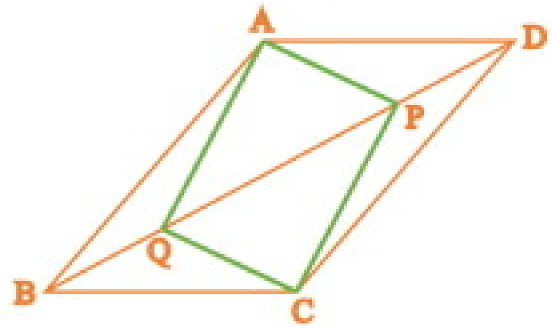
प्रश्न 9:

समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DP = BQ है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि

(i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$ **(ii)** AP = CQ

(iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$ **(iv)** AQ = CP

(v) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।



उत्तर 9:

(i) ΔAPD और ΔCQB में,

DP = BQ [∵ दिया है]

$\angle ADP = \angle CBQ$ [∵ एकांतर कोण]

AD = BC [∵ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर माप की होती हैं]

अतः, $\Delta APD \cong \Delta CQB$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

(ii) $\Delta APD \cong \Delta CQB$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

AP = CQ ... (1) [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

(iii) ΔAQB और ΔCPD में,

QB = DP [∵ दिया है]

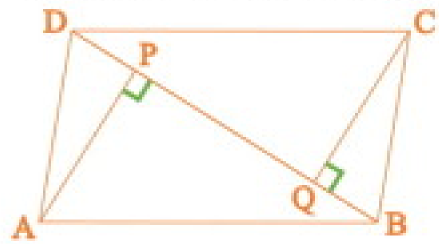
$\angle ABQ = \angle CDP$ [∵ एकांतर कोण]

AB = CD [∵ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर माप की होती हैं]

अतः, $\Delta AQB \cong \Delta CPD$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

(iv) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]
$AQ = CP$ ... (2) [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]
(v) APCQ में,
$AP = CQ$ [∵ समीकरण (1) से]
$AQ = CP$ [∵ समीकरण (2) से]
चतुर्भुज APCQ की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं अतः, APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।

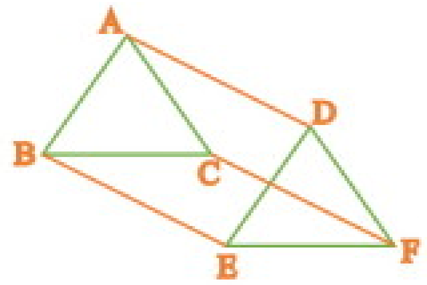
प्रश्न 10:
ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि
(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$
(ii) $AP = CQ$



उत्तर 10:
(i) ΔAPB और ΔCQD में,
$\angle APB = \angle CQD$ [∵ प्रत्येक 90°]
$\angle ABP = \angle CDQ$ [∵ एकांतर कोण]
$AB = CD$ [∵ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर माप की होती हैं]
अतः, $\Delta APB \cong \Delta CQD$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

(ii) $\Delta APB \cong \Delta CQD$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]
$AP = CQ$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

प्रश्न 11:
ΔABC और ΔDEF में, $AB = DE$, $AB \parallel DE$, $BC = EF$ और $BC \parallel EF$ है। शीर्षों A, B और C को क्रमशः शीर्षों D, E और F से जोड़ा जाता है (देखिए आकृति) । दर्शाइए कि
(i) चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है। **(ii)** चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।
(iii) $AD \parallel CF$ और $AD = CF$ है। **(iv)** चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।
(v) $AC = DF$ है। **(vi)** $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है।



उत्तर 11:
(i) चतुर्भुज ABED में, $AB = DE$ [∵ दिया है]
$AB \parallel DE$ [∵ दिया है]
अतः, चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।
(ii) चतुर्भुज BEFC में, $BC = EF$ [∵ दिया है]
$BC \parallel EF$ [∵ दिया है]
अतः, चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।
(iii) चतुर्भुज ABED में,
$AD = BE$ ... (1) [∵ ABED एक समांतर चतुर्भुज है]
$AD \parallel BE$ ... (2) [∵ ABED एक समांतर चतुर्भुज है]
चतुर्भुज BEFC में,
$BE = CF$ ... (3) [∵ ABED एक समांतर चतुर्भुज है]
$BE \parallel CF$ ... (4) [∵ ABED एक समांतर चतुर्भुज है]
समीकरण (2) और (4) से
$AD \parallel CF$ ... (5)
समीकरण (1) और (3) से,
$AD = CF$ ... (6)

(iv) चतुर्भुज ACFD में,

AD = CF [∵ समीकरण (6) से]

AD || CF [∵ समीकरण (5) से]

अतः, चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।

(v) चतुर्भुज ACFD में,

AC = DF [∵ ACFD एक समांतर चतुर्भुज है]

(vi) ΔABC और ΔDEF में,

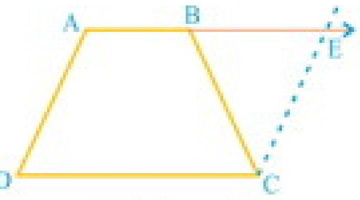
AB = DE [∵ दिया है]

AC = DF [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

BC = EF [∵ दिया है]

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ [∵ SSS सर्वांगसमता नियम]

प्रश्न 12:



ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC और AD = BC है (देखिए आकृति) । दर्शाइए कि

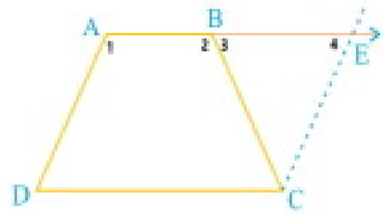
(i) $\angle A = \angle B$ **(ii)** $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ **(iv)** विकर्ण AC = विकर्ण BD है।

[**संकेत**: AB को बढ़ाइए और C से होकर DA के समांतर एक रेखा खींचिए जो बढ़ी हुई भुजा AB को E पर प्रतिच्छेद करे।]

उत्तर 12:

(i) रचना: AB को बढ़ाया और C से होकर DA के समांतर एक रेखा खींची जो बढ़ी हुई भुजा AB को E पर प्रतिच्छेद करती है।



चतुर्भुज AECD में, AE || DC [∵ दिया है]

AD || CE [∵ रचना से]

अतः, चतुर्भुज AECD एक समांतर चतुर्भुज है।

AD = CE ... (1) [∵ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर माप की होती हैं]

AD = BC ... (2) [∵ दिया है]

अतः, CE = BC [∵ समीकरण (1) और (2) से]

इसलिए, ΔBCE में,

$\angle 3 = \angle 4$ ... (3) [∵ त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

यहाँ, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ ... (4) [∵ रैखिक युग्म]

$\angle 1 + \angle 4 = 180°$ ... (5) [∵ अंतः कोण]

इसलिए, $\angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4$ [∵ समीकरण (4) और (5) से]

$\Rightarrow \angle 2 = \angle 1 \quad \Rightarrow \angle B = \angle A$ [∵ $\angle 3 = \angle 4$]

(ii) ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC, अतः,

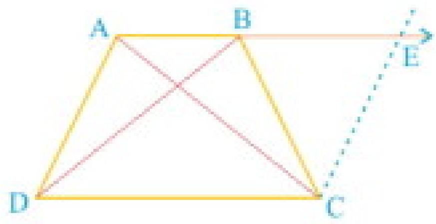
$\angle 1 + \angle D = 180°$ ... (6) [∵ अंतः कोण]

$\angle 2 + \angle C = 180°$ ... (7) [∵ अंतः कोण]

इसलिए, $\angle 1 + \angle D = \angle 2 + \angle C$ [∵ समीकरण (6) और (7) से]

$\Rightarrow \angle D = \angle C$ [∵ $\angle 2 = \angle 1$]

(iii) ΔABC और ΔBAD में,



BC = AD [∵ दिया है]

$\angle ABC = \angle BAD$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

AB = AB [∵ उभयनिष्ठ]

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

(iv) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

विकर्ण AC = विकर्ण BD [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]