गणित

(www.tiwariacademy.com)

(अध्याय – 5)(यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय)

(कक्षा – 9)

प्रश्नावली 5.1

प्रश्न 1:

निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

(i) एक बिंदु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

(ii) दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाने वाली असंख्य रेखाएँ हैं।

(iii) एक सांत रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है।

(iv) यदि दो वृत्त बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।

(v) आकृति में, यदि $AB = PQ$ और $PQ = XY$ है, तो $AB = XY$ होगा।

उत्तर 1:

(i) असत्य, क्योंकि एक बिंदु से होकर विभिन्न दिशाओं में असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(ii) असत्य, क्योंकि दिए हुए दो भिन्न बिंदुओं से होकर केवल एक अद्वितीय रेखा ही खींची जा सकती है।

(iii) सत्य, क्योंकि एक सांत रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है।

(iv) सत्य, क्योंकि यदि दो वृत्त बराबर हैं अर्थात क्षेत्रफल (πr^2) बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ भी बराबर होती हैं।

(v) सत्य, क्योंकि यूक्लिड के अभिगृहीत के अनुसार, वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं।

प्रश्न 2:

निम्नलिखित पदों में से प्रत्येक की परिभाषा दीजिए। क्या इनके लिए कुछ ऐसे पद हैं, जिन्हे परिभाषित करने की आवश्यकता है? वे क्या हैं और आप इन्हें कैसे परिभाषित कर पाएंगे?

(i) समांतर रेखाएँ **(ii)** लम्ब रेखाएँ **(iii)** रेखाखंड

(iv) वृत्त की त्रिज्या **(v)** वर्ग

उत्तर 2:

(i) समांतर रेखाएँ: दो सीधी रेखाएँ जिनमे कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ न हो, समांतर रेखाएँ कहलाती हैं।

(ii) लम्ब रेखाएँ: दो रेखाओं में से यदि एक रेखा दूसरी पर 90° का कोण बनती है, लम्ब रेखाएँ कहलाती हैं।

(iii) रेखाखंड: वह सीधी रेखा जिसके दोनों सिरे बिंदु होते हैं, रेखाखंड कहलाता है।

(iv) वृत्त की त्रिज्या: वृत्त के केंद्र से वृत्त तक खींचा गया रेखाखंड, वृत्त की त्रिज्या कहलाता है।

(v) वर्ग: एक ऐसा चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों और सभी कोण समकोण हों, वर्ग कहलाता है।

प्रश्न 3:

नीचे दी हुई दो अभिधारणाओं पर विचार कीजिए:

(i) दो भिन्न बिंदु A और B दिए रहने पर, एक तीसरा बिंदु C ऐसा विद्यमान है जो A और B के बीच स्थित होता है।

(ii) यहाँ कम से कम ऐसे तीन बिंदु विद्यमान हैं कि वे एक रेखा पर स्थित नहीं हैं।

क्या इन अभिधारणाओं में कोई अपरिभाषित शब्द है? क्या ये अभिधारणाएँ अविरोधी हैं? क्या ये यूक्लिड की अभिधारणाओं से प्राप्त होती हैं? स्पष्ट कीजिए।

उत्तर 3:

अभिधारणा (i) में "A और B के बीच" पूर्णतयः परिभाषित नहीं है। ये अभिधारणाएँ अविरोधी हैं लेकिन ये यूक्लिड की अभिधारणाओं से प्राप्त नहीं होती हैं। ये निम्नलिखित अभिग्रहीतों पर आधारित हैं:

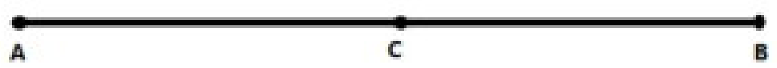
(i) माना AB एक रेखाखंड है। A और B के बीच असंख्य बिंदु विद्यमान हैं। इनमे से किसी भी बिंदु C को चुनने पर वह A और B के बीच स्थित होगा।

(ii) यदि केवल दो बिंदु हों तो उन्हें हमेशा एक रेखा से जोड़ा जा सकता है। इसलिए कम से कम तीन बिंदु होने चाहिए जो संरेख (अर्थात एक रेखा पर स्थित) न हों।

प्रश्न 4:

यदि दो बिंदुओं A और B के बीच एक बिंदु C ऐसा स्थित है कि AC = BC है, तो सिद्ध कीजिए कि $AC = \frac{1}{2}AB$ है। एक आकृति खींच कर इसे स्पष्ट कीजिए।

उत्तर 4:



दिया है: AC = BC

⇒ AC + AC = AC + BC [∵ यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं]

⇒ 2AC = AB [∵ AC + BC, AB के संपाती है]

⇒ $AC = \frac{1}{2}AB$ [∵ एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं]

प्रश्न 5:

प्रश्न 4 में, C रेखाखंड AB का एक मध्य-बिंदु कहलाता है। सिद्ध कीजिए कि एक रेखाखंड का एक और केवल एक ही मध्य-बिंदु होता है।

उत्तर 5:

माना C और D रेखाखंड AB के दो मध्य बिंदु हैं। प्रश्न 4 के अनुसार,

$AC = \frac{1}{2}AB$ और $AD = \frac{1}{2}AB$

⇒ AC = AD [∵ वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं]

परन्तु यह तभी संभव है जब C और D संपाती हों। अतः C एक अद्वितीय मध्य-बिंदु है।

प्रश्न 6:

आकृति में, यदि AC = BD है, तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।

उत्तर 6:

दिया है: AC = BD

⇒ AC − BC = BD − BC [∵ यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं]

⇒ AB = CD

प्रश्न 7:

यूक्लिड की अभिगृहीतों की सूची में में दिया हुआ अभिगृहीत 5 एक सर्वव्यापी सत्य क्यों माना जाता है? (ध्यान दीजिए कि यह प्रश्न पाँचवीं अभिधारणा से संबंधित नहीं है।)

उत्तर 7:

अभिगृहीत 5:

पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।

यह एक 'सार्वभौमिक सत्य' है क्योंकि इस भाग, जो पूरे भाग का अंश है परिमाण में पूरे से अधिक कभी नहीं हो सकता।