गणित

(www.tiwariacademy.com)

(अध्याय – 2) (बहुपद)

(कक्षा – 9)

प्रश्नावली 2.5

प्रश्न 1:

उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्लिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(x+4)(x+10)$ **(ii)** $(x+8)(x-10)$ **(iii)** $(3x+4)(3x-5)$

(iv) $\left(y^2+\frac{3}{2}\right)\left(y^2-\frac{3}{2}\right)$ **(v)** $(3-2x)(3+2x)$

उत्तर 1:

(i) $(x+4)(x+10)$

$= x^2 + (4+10)x + 4 \times 10$ $[\because (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab]$

$= x^2 + 14x + 40$

(ii) $(x+8)(x-10)$

$= x^2 + (8-10)x + 8 \times (-10)$ $[\because (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab]$

$= x^2 - 2x - 80$

(iii) $(3x+4)(3x-5)$

$= (3x)^2 + (4-5)3x + 4 \times (-5)$ $[\because (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab]$

$= 9x^2 - 3x - 20$

(iv) $\left(y^2+\frac{3}{2}\right)\left(y^2-\frac{3}{2}\right)$

$= (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= y^4 - \frac{9}{4}$

(v) $(3-2x)(3+2x)$

$= (3)^2 - (2x)^2$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= 9 - 4x^2$

प्रश्न 2:

सीधे गुणा किए बिना निम्लिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए:

(i) 103×107 **(ii)** 95×96 **(iii)** 104×96

उत्तर 2:

(i) 103×107

$= (100+3)(100+7)$

$= (100)^2 + (3+7)100 + 3 \times 7$ $[\because (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab]$

$= 10000 + 1000 + 21 = 11021$

(ii) 95×96

$(100-5)(100-4)$

$= (100)^2 + (-5-4)100 + (-5) \times (-4)$ $[\because (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab]$

$= 10000 - 900 + 20 = 9120$

(iii) 104×96

$(100+4)(100-4)$

$= (100)^2 - (4)^2$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= 10000 - 16 = 9984$

प्रश्न 3:

उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्लिखित का गुणनखंड कीजिए:

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ **(ii)** $4y^2 - 4y + 1$ **(iii)** $x^2 - \frac{y^2}{100}$

उत्तर 3:

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$

$= (3x)^2 + 2 \times 3x \times y + y^2$

$= (3x+y)^2$ $[\because a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2]$

(ii) $4y^2 - 4y + 1$

$= (2y)^2 - 2 \times 2y \times 1 + 1^2$

$= (2y-1)^2$ $[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2]$

(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

$= x^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$

$= (x + \frac{y}{10})(x - \frac{y}{10})$ $[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

प्रश्न 4:

उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्लिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ **(ii)** $(2x - y + z)^2$ **(iii)** $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ **(v)** $(-2x + 5y - 3z)^2$ **(vi)** $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

उत्तर 4:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$

$= x^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2 \times (x) \times (2y) + 2 \times (2y) \times (4z) + 2 \times (4z) \times (x)$

$[\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$

$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 4zx$

(ii) $(2x - y + z)^2$

$= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2 \times (2x) \times (-y) + 2 \times (-y) \times (z) + 2 \times (z) \times (2x)$

$[\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$

$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

$= (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2 \times (-2x) \times (3y) + 2 \times (3y) \times (2z) + 2 \times (2z) \times (-2x)$

$[\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$

$= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$

$= (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2 \times (3a) \times (-7b) + 2 \times (-7b) \times (-c) + 2 \times (-c) \times (3a)$

$[\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$

$= 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ca$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$

$= (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2 \times (-2x) \times 5y + 2 \times 5y \times (-3z) + 2 \times (-3z) \times (-2x)$

$[\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$

$= 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx$

(vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

$= \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}b\right)^2 + 1^2 + 2 \times \left(\frac{1}{4}a\right) \times \left(-\frac{1}{2}b\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{2}b\right) \times 1 + 2 \times 1 \times \left(\frac{1}{4}a\right)$

$[\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$

$= \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 1 - \frac{1}{4}ab - b + \frac{1}{2}a$

प्रश्न 5:

गुणनखंड कीजिए:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

उत्तर 5:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2 \times (2x) \times 3y + 2 \times 3y \times (-4z) + 2 \times (-4z) \times (2x)$

$= (2x + 3y - 4z)^2$

$[\because a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2]$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

$= \left(\sqrt{2}x\right)^2 + (-y)^2 + \left(-2\sqrt{2}z\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}x\right)(-y) + 2(-y)\left(-2\sqrt{2}z\right) + 2\left(-2\sqrt{2}z\right)\left(\sqrt{2}x\right)$

$= \left(\sqrt{2}x - y - 2\sqrt{2}z\right)^2$

$[\because a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2]$

प्रश्न 6:

निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए:

(i) $(2x + 1)^3$ **(ii)** $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ **(iv)** $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

उत्तर 6:

(i) $(2x + 1)^3$

$= (2x)^3 + 1^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2$

$[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

$= 8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x$

(ii) $(2a - 3b)^3$

$= (2a)^3 + (-3b)^3 + 3(2a)^2(-3b) + 3(2a)(-3b)^2$

$[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

$= 8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$

$= \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + 1^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)^2(1) + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)^2$

$[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

$= \frac{27}{8}x^3 + 1 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x$

(iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

$= (x)^3 + \left(-\frac{2}{3}y\right)^3 + 3(x)^2\left(-\frac{2}{3}y\right) + 3(x)\left(-\frac{2}{3}y\right)^2$

$[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2$

प्रश्न 7:

उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(99)^3$ **(ii)** $(102)^3$ **(iii)** $(998)^3$

उत्तर 7:

(i) $(99)^3$

$(100-1)^3$

$= (100)^3 + (-1)^3 + 3(100)^2(-1) + 3(100)(-1)^2$

$[\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

$= 1000000 - 1 - 30000 + 300$

$= 970299$

(ii) $(102)^3$

$(100+2)^3$

$= (100)^3 + (2)^3 + 3(100)^2(2) + 3(100)(2)^2$

$[\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

$= 1000000 + 8 + 60000 + 1200$

$= 1061208$

(iii) $(998)^3$

$(1000-2)^3$

$= (1000)^3 + (-2)^3 + 3(1000)^2(-2) + 3(1000)(-2)^2$

$[\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

$= 1000000000 - 8 - 6000000 + 12000$

$= 994011992$

प्रश्न 8:

निम्लिखित में से प्रत्येक का गुणनखंड कीजिए:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

उत्तर 8:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

$= (2a+b)^3$ $[\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

$= (2a)^3 + (-b)^3 + 3(2a)^2(-b) + 3(2a)(-b)^2$

$= (2a-b)^3$ $[\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

$= (3)^3 + (-5a)^3 + 3(3)^2(-5a) + 3(3)(-5a)^2$

$= (3-5a)^3$ $[\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

$= (4a)^3 + (-3b)^3 + 3(4a)^2(-3b) + 3(4a)(-3b)^2$

$= (4a-3b)^3$ $[\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

$= (3p)^3 + \left(-\frac{1}{6}\right)^3 + 3(3p)^2\left(-\frac{1}{6}\right) + 3(3p)\left(-\frac{1}{6}\right)^2$

$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)^3$ $\quad [\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

प्रश्न 9:

सत्यापित कीजिए:

(i) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ **(ii)** $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

उत्तर 9:

(i) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

RHS

$= (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)$

$= x^3 - x^2y + xy^2 + yx^2 - xy^2 + y^3$

$= x^3 + y^3$

$= LHS$

(ii) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

RHS

$= (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$= x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$

$= x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3$

$= x^3 - y^3$

$= LHS$

प्रश्न 10:

निम्लिखित में से प्रत्येक का गुणनखंड कीजिए:

(i) $27y^3 + 125z^3$ **(ii)** $64m^3 - 343n^3$

उत्तर 10:

(i) $27y^3 + 125z^3$

$= (3y)^3 + (5z)^3$

$= (3y + 5z)[(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$ $\quad [\because x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)]$

$= (3y + 5z)(9y^2 - 15yz + 25z^2)$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

$= (4m)^3 - (3n)^3$

$= (4m - 3n)[(4m)^2 + (4m)(3n) + (3n)^2]$ $\quad [\because x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)]$

$= (4m - 3n)(16m^2 + 12mn + 9n^2)$

प्रश्न 11:

गुणनखंड कीजिए: $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

उत्तर 11:

$27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

$= (3x)^3 + y^3 + z^3 - 3(3x)yz$

$= (3x + y + z)[(3x)^2 + y^2 + z^2 - (3x)y - yz - z(3x)]$

$[\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)]$

$= (3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)$

प्रश्न 12:

सत्यापित कीजिए: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

उत्तर 12:

RHS

$= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)[x^2 + y^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2zx]$

$[\because (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= \frac{1}{2} \times 2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = LHS$

$[\because (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc]$

प्रश्न 13:

यदि $x + y + z = 0$ हो, तो दिखाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ है।

उत्तर 13:

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

यदि $x + y + z = 0$ हो, तो

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (0)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

प्रश्न 14:

वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ **(ii)** $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

उत्तर 14:

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

माना, $a = -12,\ b = 7,\ c = 5$

इसप्रकार, $a + b + c = -12 + 7 + 5 = 0$

हम जानते हैं कि यदि $a + b + c = 0$ हो, तो $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

इसलिए, $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3(-12)(7)(5) = -1260$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

माना, $a = 28,\ b = -15,\ c = -13$

इसप्रकार, $a + b + c = 28 - 15 - 13 = 0$

हम जानते हैं कि यदि $a + b + c = 0$ हो, तो $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

इसलिए, $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3 = 3(28)(-15)(-13) = 16380$

प्रश्न 15:

नीचे दिए गए आयतों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हैं, में से प्रत्येक की लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिए:

(i) क्षेत्रफल: $25a^2 - 35a + 12$ **(ii)** क्षेत्रफल: $35y^2 + 13y - 12$

उत्तर 15:

(i) क्षेत्रफल: $25a^2 - 35a + 12$

$= 25a^2 - 20a - 15a + 12$

$= 5a(5a - 4) - 3(5a - 4)$

$= (5a - 4)(5a - 3)$

इसलिए, लंबाई $= (5a - 3)$ और चौड़ाई $= (5a - 4)$ [क्योंकि $(5a - 3) > (5a - 4)$]

(ii) क्षेत्रफल: $35y^2 + 13y - 12$

$= 35y^2 + 28y - 15y - 12$

$= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4)$

$= (5y + 4)(7y - 3)$

इसलिए, लंबाई $= (5y + 4)$ और चौड़ाई $= (7y - 3)$

प्रश्न 16:

घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं, की विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या हैं?

(i) आयतन $= 3x^2 - 12x$ **(ii)** आयतन $= 12ky^2 + 8ky - 20k$

उत्तर 16:

(i) आयतन $= 3x^2 - 12x$

$= 3x(x - 4)$

$= (3)(x)(x - 4)$

अतः, घनाभ की विमाओं के लिए $3,\ x$ और $x - 4$ व्यंजक संभव हैं।

(ii) आयतन $= 12ky^2 + 8ky - 20k$

$= 4k(3y^2 + 2y - 5)$

$= 4k(3y^2 + 5y - 3y - 5)$

$= 4k[y(3y + 5) - 1(3y + 5)]$

$= (4k)(3y + 5)(y - 1)$

अतः, घनाभ की विमाओं के लिए $4k$, $(3y + 5)$ और $(y - 1)$ व्यंजक संभव हैं।