

प्रश्न 1:

बताइए कि निम्नलिखित में से किस बहुपद का एक गुणनखंड $x + 1$ है।

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

उत्तर 1:

(i) माना $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$x + 1 = 0$ रखने पर, $x = -1$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल

$p(-1)$

$= (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= -1 + 1 - 1 + 1$

$= 0$

यहाँ, शेषफल $p(-1) = 0$, अतः $x + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$ का गुणनखंड है।

(ii) माना $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$x + 1 = 0$ रखने पर, $x = -1$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल

$p(-1)$

$= (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1$

$= 1$

यहाँ, शेषफल $p(-1) \neq 0$, अतः $x + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ का गुणनखंड नहीं है।

(iii) माना $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

$x + 1 = 0$ रखने पर, $x = -1$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल

$p(-1)$

$= (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1$

$= 1$

यहाँ, शेषफल $p(-1) \neq 0$, अतः $x + 1$, $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ का गुणनखंड नहीं है।

(iv) माना $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

$x + 1 = 0$ रखने पर, $x = -1$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल $p(-1)$

$$= (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$$

$$= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

यहाँ, शेषफल $p(-1) \neq 0$, अतः $x + 1$, $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$ का गुणनखंड नहीं है।

प्रश्न 2:

गुणनखंड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है या नहीं।

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

उत्तर 2:

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ और $g(x) = x + 1$

$x + 1 = 0$ रखने पर, $x = -1$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ को $g(x) = x + 1$ से भाग देने पर शेषफल $p(-1)$

$$= (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$$

$$= -1 + 1 - 1 + 1$$

$$= 0$$

यहाँ, शेषफल $p(-1) = 0$, अतः $g(x)$, $p(x)$ का गुणनखंड है।

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ और $g(x) = x + 2$

$x + 2 = 0$ रखने पर, $x = -2$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $g(x) = x + 2$ से भाग देने पर शेषफल $p(-2)$

$$= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$$

$$= -8 + 12 - 6 + 1$$

$$= -1$$

यहाँ, शेषफल $p(-2) \neq 0$, अतः $g(x)$, $p(x)$ का गुणनखंड नहीं है।

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ और $g(x) = x - 3$

$x - 3 = 0$ रखने पर, $x = 3$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ को $g(x) = x - 3$ से भाग देने पर शेषफल $p(3)$

$$= (3)^3 - 4(3)^2 + (3) + 6$$

$$= 27 - 36 + 3 + 6$$

$$= 0$$

यहाँ, शेषफल $p(3) = 0$, अतः $g(x)$, $p(x)$ का गुणनखंड है।

प्रश्न 3:

k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(x - 1)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड हो।

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

उत्तर 3:

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

$x - 1 = 0$ रखने पर, $x = 1$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = x^2 + x + k$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल $p(1)$

$$= (1)^2 + (1) + k$$

$$= 2 + k$$

दिया है कि $x - 1$, $p(x)$ का गुणनखंड है। अतः

शेषफल $p(1) = 0$

$$\Rightarrow 2 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = -2$$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

$x - 1 = 0$ रखने पर, $x = 1$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल $p(1)$

$$= 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2}$$

$$= 2 + k + \sqrt{2}$$

दिया है कि $x - 1$, $p(x)$ का गुणनखंड है। अतः

शेषफल $p(1) = 0$

$$\Rightarrow 2 + k + \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow k = -2 - \sqrt{2}$$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

$x - 1 = 0$ रखने पर, $x = 1$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल $p(1)$

$$= k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1$$

$$= k - \sqrt{2} + 1$$

दिया है कि $x - 1$, $p(x)$ का गुणनखंड है। अतः

शेषफल $p(1) = 0$

$$\Rightarrow k - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{2} - 1$$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

$x - 1 = 0$ रखने पर, $x = 1$

शेषफल प्रमेय के अनुसार $p(x) = kx^2 - 3x + k$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल $p(1)$

$$= k(1)^2 - 3(1) + k$$

$$= 2k - 3$$

दिया है कि $x - 1$, $p(x)$ का गुणनखंड है। अतः

शेषफल $p(1) = 0$

$$\Rightarrow 2k - 3 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{2}$$



प्रश्न 4:

गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $12x^2 - 7x + 1$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iv) $3x^2 - x - 4$

उत्तर 4:

(i) $12x^2 - 7x + 1$

$$= 12x^2 - (4 + 3)x + 1$$

$$= 12x^2 - 4x - 3x + 1$$

$$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$$

$$= (3x - 1)(4x - 1)$$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

$$= 2x^2 + (6 + 1)x + 3$$

$$= 2x^2 + 6x + x + 3$$

$$= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$$

$$= (x + 3)(2x + 1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad & 6x^2 + 5x - 6 \\
 &= 6x^2 + (9 - 4)x - 6 \\
 &= 6x^2 + 9x - 4x - 6 \\
 &= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3) \\
 &= (2x + 3)(3x - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad & 3x^2 - x - 4 \\
 &= 3x^2 - (4 - 3)x - 4 \\
 &= 3x^2 - 4x + 3x - 4 \\
 &= x(3x - 4) + 1(3x - 4) \\
 &= (3x - 4)(x + 1)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 5:

गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

उत्तर 5:

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

माना $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$x = 1$ रखने पर

$p(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - (1) + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

$\Rightarrow x - 1$, $p(x)$ का गुणनखंड है।

$x - 1$	$ \begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ \hline x^3 - x^2 \\ - \quad + \\ \hline -x^2 - x + 2 \\ -x^2 + x \\ \hline + \quad - \\ -2x + 2 \\ -2x + 2 \\ \hline + \quad - \\ 0 \end{array} $
---------	---

अतः, $p(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2)$

$= (x - 1)(x^2 - x - 2)$

$= (x - 1)[x^2 - (2 - 1)x - 2]$

$= (x - 1)[x^2 - 2x + x - 2]$

$= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)]$

$= (x - 1)(x - 2)(x + 1)$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

माना $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$x = 1$ रखने पर

$p(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 9(1) - 5 = 1 - 3 - 9 - 5 = -16 \neq 0$

$x = -1$ रखने पर

$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5 = -1 - 3 + 9 - 5 = 0$

$\Rightarrow x + 1$, $p(x)$ का गुणनखंड है।

$x + 1$	$\begin{array}{r} x^2 - 4x - 5 \\ x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \\ x^3 + x^2 \\ \hline -4x^2 - 9x - 5 \\ -4x^2 - 4x \\ \hline + \quad + \\ -5x - 5 \\ -5x - 5 \\ \hline + \quad + \\ 0 \end{array}$
---------	---

अतः, $p(x) = (x + 1)(x^2 - 4x - 5)$

$= (x + 1)(x^2 - 4x - 5)$

$= (x + 1)[x^2 - (5 - 1)x - 5]$

$= (x + 1)[x^2 - 5x + x - 5]$

$= (x + 1)[x(x - 5) + 1(x - 5)]$

$= (x + 1)(x - 5)(x + 1)$



(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

माना $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$x = -1$ रखने पर

$p(-1) = (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20 = -1 + 13 - 32 + 20 = 0$

$\Rightarrow x + 1$, $p(x)$ का गुणनखंड है।

$x + 1$	$\begin{array}{r} x^2 + 12x + 20 \\ x^3 + 13x^2 + 32x + 20 \\ x^3 + x^2 \\ \hline 12x^2 + 32x + 20 \\ 12x^2 + 12x \\ \hline 20x + 20 \\ 20x + 20 \\ \hline 0 \end{array}$
---------	---

$$\begin{aligned}\text{अतः, } p(x) &= (x+1)(x^2+12x+20) \\ &= (x+1)(x^2+12x+20) \\ &= (x+1)[x^2+(10+2)x+20] \\ &= (x+1)[x^2+10x+2x+20] \\ &= (x+1)[x(x+10)+2(x+10)] \\ &= (x+1)(x+10)(x+2)\end{aligned}$$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

माना $p(y) = y^3 + y^2 - 2y - 1$

$y = -1$ रखने पर

$$p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1 = -2 + 1 + 2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow y + 1, p(y)$ का गुणनखंड है।

$y + 1$	$\begin{array}{r} 2y^2 - y - 1 \\ 2y^3 + y^2 - 2y - 1 \\ \underline{2y^3 + 2y^2} \\ -y^2 - 2y - 1 \\ \underline{-y^2 - y} \\ + + \\ \underline{-y - 1} \\ -y - 1 \\ \underline{ +} \\ 0 \end{array}$
---------	--

$$\begin{aligned}\text{अतः, } p(y) &= (y+1)(2y^2 - y - 1) \\ &= (y+1)(2y^2 - y - 1) \\ &= (y+1)[2y^2 - (2-1)y - 1] \\ &= (y+1)[2y^2 - 2y + y - 1] \\ &= (y+1)[2y(y-1) + 1(y-1)] \\ &= (y+1)(y-1)(2y+1)\end{aligned}$$