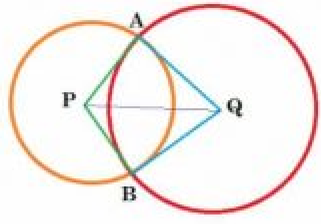
## प्रश्नावली 10.6 (ऐच्छिक)

### प्रश्न 1:

सिद्ध कीजिए कि दो प्रतिच्छेद करते हुए वृत्तों की केन्द्रों की रेखा दोनों प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करती है।

### उत्तर 1:




दिया है: वृत्त C (P, r) और वृत्त C (Q, r′) एक दूसरे को A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है: $\angle PAQ = \angle PBQ$ है।

उपपत्ति: $\Delta APQ$ और $\Delta BPQ$ में,

$PQ = PQ$ [∵ उभयनिष्ठ]

$PA = PB$ [∵ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ]

$QA = QB$ [∵ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ]

अतः, $\Delta APQ \cong \Delta BPQ$ [∵ SSS सर्वांगसमता नियम]

अतः, $\angle PAQ = \angle PBQ$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं]

### प्रश्न 2:

एक वृत्त की 5 cm तथा 11 cm लम्बी दो जीवाएँ AB और CD समांतर हैं और केन्द्र की विपरीत दिशा में स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच की दूरी 6 cm हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 2:

दिया है: वृत्त C (O, r) में, AB = 5 cm, CD = 11 cm और AB || CD है।

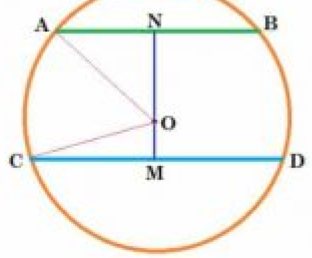
ज्ञात करना है: वृत्त की त्रिज्या OA है।

रचना: $OM \perp CD$ और $ON \perp AB$ बनाया।

उपपत्ति: CD वृत्त की जीवा है और $OM \perp CD$

अतः, $CM = MD = 5.5$ cm [∵ केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है]

इसीप्रकार, $AN = NB = 2.5$ cm




माना, $OM = x$

इसलिए, $ON = 6 - x$ [∵ MN = 6 cm]

$\Delta OCM$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OC^2 = CM^2 + OM^2$ ... (1)

तथा $\Delta OAN$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OA^2 = AN^2 + ON^2$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से

$CM^2 + OM^2 = AN^2 + ON^2$ [∵ OC = OA = वृत्त की त्रिज्या]

$\Rightarrow (5.5)^2 + x^2 = (2.5)^2 + (6 - x)^2$

$\Rightarrow 30.25 + x^2 = 6.25 + (36 + x^2 - 12x)$

$\Rightarrow 30.25 - 42.25 = -12x$

$\Rightarrow -12 = -12x$

$\Rightarrow x = \dfrac{12}{12} = 1$

समीकरण (2) से

$$OC^2 = (5.5)^2 + 1^2 = 30.25 + 1 = 31.25 = \frac{3125}{100} = \frac{125}{4}$$

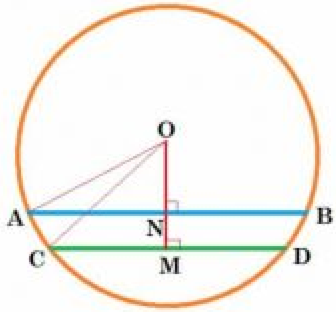
$$\Rightarrow OC = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

$\Rightarrow OA = OC = \frac{5}{2}\sqrt{5}$ cm

अतः, वृत्त की त्रिज्या $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ cm है।

## प्रश्न 3:
किसी वृत्त की दो समांतर जीवाओं की लम्बाइयाँ 6 cm और 8 cm हैं। यदि छोटी जीवा केन्द्र से 4 cm की दूरी पर हो, तो दूसरी जीवा केन्द्र से कितनी दूर है?

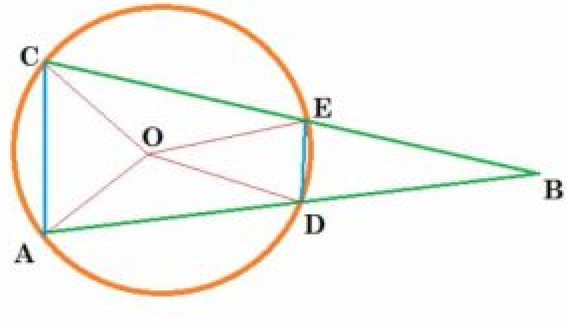
## उत्तर 3:
दिया है: वृत्त C (O, r) में, AB = 8 cm, CD = 6 cm, OM = 4 cm और AB || CD है।
ज्ञात करना है: OM की लंबाई ।
रचना: OM ⊥ CD और ON ⊥ AB बनाया।
उपपत्ति: CD वृत्त की जीवा है और OM ⊥ CD
अतः, CM = MD = 3 cm [∵ केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है]
इसीप्रकार, AN = NB = 4 cm
माना, $MN = x$
इसलिए, $ON = 4 - x$ [∵ OM = 4 cm]




ΔOCM में, पाइथागोरस प्रमेय से
$OC^2 = CM^2 + OM^2$ ... (1)
तथा ΔOAN में, पाइथागोरस प्रमेय से
$OA^2 = AN^2 + ON^2$ ... (2)
समीकरण (1) और (2) से
$CM^2 + OM^2 = AN^2 + ON^2$ [∵ OC = OA = वृत्त की त्रिज्या]
$\Rightarrow 3^2 + 4^2 = 4^2 + (4 - x)^2$
$\Rightarrow 9 + 16 = 16 + 16 + x^2 - 8x$
$\Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 7x - x + 7 = 0$
$\Rightarrow x(x - 7) - x(x - 7) = 0$
$\Rightarrow (x - 1)(x - 7) = 0$
$\Rightarrow x - 7 = 0$ या $x - 1 = 0$
$\Rightarrow x = 7$ या $x = 1$
$\Rightarrow x = 1$ [∵ $x \neq 7 > OM$]
इसलिए, $ON = 4 - x = 4 - 1 = 3$ cm
अतः, दूसरी जीवा केन्द्र से 3 cm दूर है।

## प्रश्न 4:
मान लीजिए कि कोण ABC का शीर्ष एक वृत्त के बाहर स्थित है और कोण की भुजाएँ वृत्त से बराबर जीवाएँ AD और CE कटती हैं। सिद्ध कीजिए कि ∠ABC जिवाओं AC तथा DE द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोणों के अंतर का आधा है।

## उत्तर 4:
दिया है: वृत्त C (O, r) में, AD = CE है।
सिद्ध करना है: $\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle AOC - \angle DOE)$
रचना: AC और DE को मिलाया।
उपपत्ति: माना, $\angle AOC = x$, $\angle DOE = y$ और $\angle AOD = z$
इसलिए, $\angle EOC = z$
[∵ समान जिवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं]




$\angle AOC + \angle DOE + \angle AOD + \angle EOC = 360°$
$\Rightarrow x + y + z + z = 360°$
$\Rightarrow x + y + 2z = 360°$ ... (1)
ΔOAD में,
OA = OD [∵ वृत्त की त्रिज्याएँ]

$\angle OAD = \angle ODA$ [∵ समद्विभाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

$\angle OAD + \angle ODA + \angle AOD = 180°$

$\Rightarrow 2\angle OAD + z = 180°$

$\Rightarrow 2\angle OAD = 180° - z$ [∵ $\angle OAD = \angle ODA$]

$\Rightarrow \angle OAD = \frac{180° - z}{2} = 90° - \frac{z}{2}$ ... (2)

इसीप्रकार,

$\angle OCE = 90° - \frac{z}{2}$ ... (3)

$\angle OED = 90° - \frac{y}{2}$ ... (4)

$\angle ODB$ त्रिभुज OAD का बाह्य कोण है। अतः

$\angle ODB = \angle OAD + \angle ODA$

$\Rightarrow \angle ODB = 90° - \frac{z}{2} + z$ [∵ समीकरण (2) से]

$\Rightarrow \angle ODB = 90° + \frac{z}{2}$ ... (5)

इसीप्रकार, $\angle OBE$ त्रिभुज OCE का बाह्य कोण है। अतः

$\angle OBE = \angle OCE + \angle OEC$

$\Rightarrow \angle OEB = 90° - \frac{z}{2} + z$ [∵ समीकरण (3) से]

$\Rightarrow \angle OEB = 90° + \frac{z}{2}$ ... (6)

समीकरण (4), (5) और (6) से

$\angle BDE = \angle BED = \angle OEB - \angle OED$

$\Rightarrow \angle BDE = \angle BED = 90° + \frac{z}{2} - \left(90° - \frac{y}{2}\right) = \frac{y+z}{2}$

$\Rightarrow \angle BDE + \angle BED = y + z$ ... (7)

$\Delta BDE$ में, $\angle DBE + \angle BDE + \angle BED = 180°$

$\Rightarrow \angle DBE + y + z = 180°$ [∵ समीकरण (7) से]

$\Rightarrow \angle DBE = 180° - (y + z)$

$\Rightarrow \angle ABC = 180° - (y + z)$ ... (8)

यहाँ, $\frac{x-y}{2} = \frac{360°-y-2z-y}{2}$ [∵ समीकरण (1) से]

$\Rightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{360°-2y-2z}{2} = 180° - (y + z)$ ... (9)

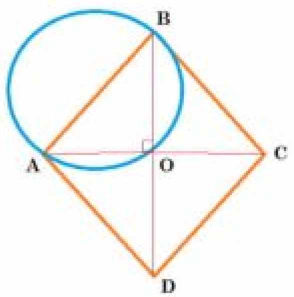
समीकरण (8) और (9) से

$\angle ABC = \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\angle AOC - \angle DOE)$

## प्रश्न 5:

सिद्ध कीजिए कि किसी समचतुर्भुज की किसी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है।

## उत्तर 5:




दिया है: ABCD एक समचतुर्भु है।

सिद्ध करना है: AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु O से होकर जाता है।

उपपत्ति: ABCD एक समचतुर्भु है। अतः, $\angle AOC = 90°$

[∵ समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते हैं]

AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त बिन्दु O से हो कर जाएगा।

[∵ अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है]

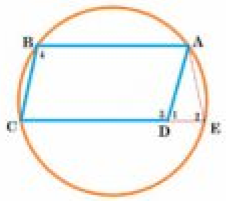
अतः, समचतुर्भुज की किसी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है।

## प्रश्न 6:

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A, B और C से जाने वाला वृत्त CD (यदि आवश्यक हो तो बढ़ाकर) को E पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि AE = AD है।

## उत्तर 6:

दिया है: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A, B और C से जाने वाला वृत्त बढ़ाई हुई भुजा CD को E पर प्रतिच्छेद करता है।
सिद्ध करना है: AE = AD है।



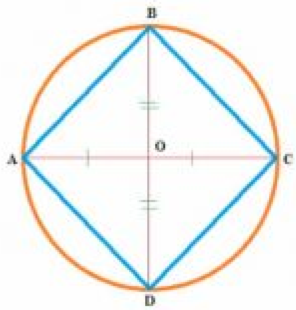

उपपत्ति: $\angle 3 + \angle 1 = 180°$ ... (1) [∵ रैखिक युग्म]
और $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ ... (2) [∵ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है]
तथा $\angle 3 = \angle 4$ ... (3) [∵ समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]
समीकरण (1) और (2) से, $\angle 3 + \angle 1 = \angle 2 + \angle 4$
$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ ... (4) [∵ समीकरण (3) से]
$\Delta AQB$ में, $\angle 1 = \angle 2$ [∵ समीकरण (4) से]
इसलिए, AE = AD [∵ त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

## प्रश्न 7:

AC और BD एक वृत्त की जीवाएँ हैं जो परस्पर समद्विभाजित करती हैं। सिद्ध कीजिए कि:
**(i)** AC और BD व्यास हैं, **(ii)** ABCD एक आयत है।

## उत्तर 7:

दिया है: AC और BD एक वृत्त की जीवाएँ हैं तथा AO = OC और BO = OD है।
सिद्ध करना है: AC और BD व्यास हैं और ABCD एक आयत है।
रचना: AB, BC, CD और DA को मिलाया।

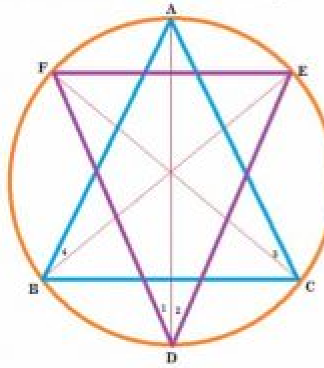



उपपत्ति:
**(i)** $\Delta ABO$ और $\Delta CDO$ में,
AO = OC [∵ दिया है]
$\angle AOB = \angle COD$ [∵ शीर्षाभिमुख कोण]
BO = OD [∵ दिया है]
अतः, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]
$\angle BAO = \angle DCO$ [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]
$\angle BAO$ और $\angle DCO$ एकांतर कोण हैं तथा बराबर हैं। अतः
AB || DC ... (1)
इसीप्रकार,
AD || BC ... (2)
समीकरण (1) और (2) से, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।
$\angle A + \angle C = 180°$ ... (3) [∵ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है]
तथा $\angle A = \angle C$ ... (4) [∵ समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]
समीकरण (3) और (4) से
$2\angle A = 180°$
$\Rightarrow \angle A = \frac{180°}{2} = 90°$
$\Rightarrow$ BD वृत्त का व्यास है। [∵ अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है]
इसीप्रकार, AC भी वृत्त का व्यास है।

**(ii)** ABCD एक समांतर चतुर्भुज है [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]
$\angle A = 90°$ [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]
अतः, ABCD एक आयत है। [∵ समांतर चतुर्भुज, जिसका एक कोण समकोण हो, आयत होता है]

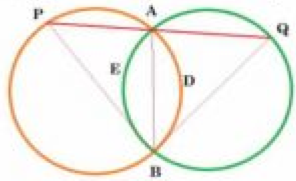
## प्रश्न 8:
एक त्रिभुज ABC के कोणों A, B और C के समद्विभाजक इसके परिवृत्त को क्रमशः D, E और F पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज DEF के कोण $90° - \frac{1}{2}\angle A$, $90° - \frac{1}{2}\angle B$ तथा $90° - \frac{1}{2}\angle C$ हैं।

## उत्तर 8:
दिया है: त्रिभुज ABC के कोणों A, B और C के समद्विभाजक इसके परिवृत्त को क्रमशः D, E और F पर प्रतिच्छेद करते हैं।
सिद्ध करना है: $\angle D = 90° - \frac{1}{2}\angle A$, $\angle E = 90° - \frac{1}{2}\angle B$ तथा $\angle F = 90° - \frac{1}{2}\angle C$ हैं।




उपपत्ति: $\angle 1$ और $\angle 3$ एक ही वृत्तखंड में बने कोण हैं। अतः
$\angle 1 = \angle 3$ ... (1) [∵ एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]
इसीप्रकार $\angle 2 = \angle 4$ ... (2)
समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4 + \angle 3$
$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C \quad \Rightarrow \angle D = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$
$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2}(180° - \angle A) \quad \Rightarrow \angle D = 90° - \frac{1}{2}\angle A$
इसीप्रकार, $\angle E = 90° - \frac{1}{2}\angle B$ तथा $\angle F = 90° - \frac{1}{2}\angle C$ हैं।

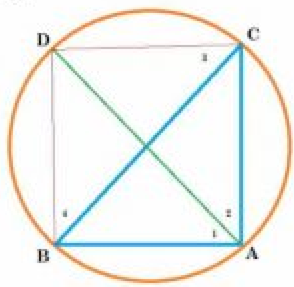
## प्रश्न 9:
दो सर्वांगसम वृत्त परस्पर बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। A से होकर कोई रेखाखंड PAQ इस प्रकार खींचा गया है कि P और Q दोनों वृत्तों पर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि BP = BQ है।




## उत्तर 9:
दिया है: दो सर्वांगसम वृत्त परस्पर बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं।
सिद्ध करना है: BP = BQ है।
उपपत्ति: सर्वांगसम वृत्तों के चाप ADB और चाप AEB बराबर हैं। अतः
$\angle APB = \angle AQB$ [∵ सर्वांगसम वृत्तों के समान चाप, बराबर कोण अंतरित करते हैं]
अतः, BP = BQ [∵ त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।]

## प्रश्न 10:
किसी त्रिभुज ABC में, यदि $\angle A$ का समद्विभाजक तथा BC का लम्ब समद्विभाजक प्रतिच्छेद करें। तो सिद्ध कीजिए कि वे $\Delta ABC$ के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करेंगे।

## उत्तर 10:
दिया है: त्रिभुज ABC में, $\angle A$ का समद्विभाजक ABC के परिवृत्त को बिंदु D पर प्रतिच्छेद करता है।
सिद्ध करना है: D, BC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है।
रचना: BD और DC को मिलाया।




उपपत्ति: $\angle 1$ और $\angle 3$ एक ही वृत्तखंड में बने कोण हैं। अतः
$\angle 1 = \angle 3$ ... (1)
[∵ एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]
इसीप्रकार $\angle 2 = \angle 4$ ... (2)
तथा, $\angle 1 = \angle 2$ ... (3) [∵ दिया है]
समीकरण (1), (2) और (3) से, $\angle 3 = \angle 4$
अतः, BD = DC [∵ त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]
BC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित सभी बिंदु B और C से संदूरस्थ होगें।
अतः, बिंदु D, BC के लंबसमद्विभाजक पर स्थित है।