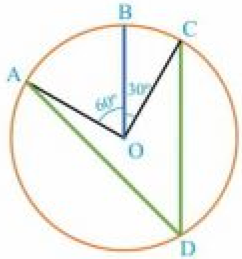
प्रश्नावली 10.5

प्रश्न 1:

आकृति में, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर तीन बिन्दु A, B और C इस प्रकार हैं कि $\angle BOC = 30°$ तथा $\angle AOB = 60°$ है। यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिन्दु है, तो $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।



उत्तर 1:

$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 60° + 30° = 90°$

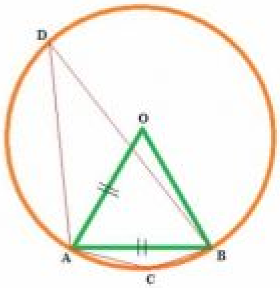
$\angle AOC = 2\angle ADC$

[∵ किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।]

$\Rightarrow \angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC \quad \Rightarrow \angle ADC = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$

प्रश्न 2:

किसी वृत्त की एक जीवा वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए तथा दीर्घ चाप के किसी बिन्दु पर भी अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।



उत्तर 2:

दिया है: वृत्त C (O, r) में, OA = AB है।

ज्ञात करना है: $\angle ADB$ और $\angle ACB$ है।

उपपत्ति: ΔOAB में

OA = AB [∵ दिया है]

OA = OB [∵ वृत्त की त्रिज्याएँ]

अतः, OA = OB = AB

⇒ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

इसलिए, $\angle AOB = 60°$ [∵ समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है]

$\angle AOB = 2\angle ADB$

[∵ किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है]

$\Rightarrow \angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB \Rightarrow \angle ADB = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$

ACBD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

इसलिए, $\angle ACB + \angle ADB = 180°$

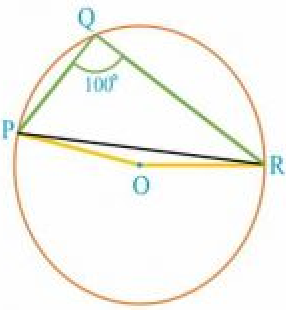
[∵ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है]

$\Rightarrow \angle ACB + 30° = 180°$ [∵ $\angle ADB = 30°$]

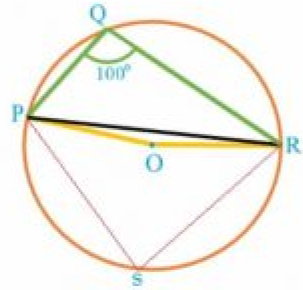
$\Rightarrow \angle ACB = 180° - 30° = 150°$

प्रश्न 3:

आकृति में, $\angle PQR = 100°$ है, जहाँ P, Q तथा R, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। $\angle OPR$ ज्ञात कीजिए।

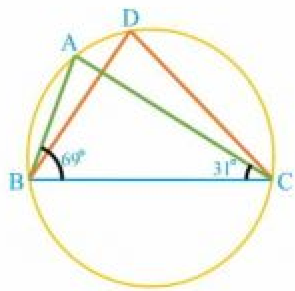


उत्तर 3:



रचना: PS और RS को मिलाया।
PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है।
इसलिए, $\angle PSR + \angle PQR = 180°$
[∵ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है]
$\Rightarrow \angle PSR + 100° = 180°$ [∵ $\angle PQR = 100°$]
$\Rightarrow \angle PSR = 180° - 100° = 80°$
यहाँ, $\angle POR = 2\angle PSR$
[∵ किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है]
$\Rightarrow \angle POR = 2 \times 80° = 160°$
ΔOPR में,
$OP = OR$ [∵ वृत्त की त्रिज्याएँ]
$\angle ORP = \angle OPR$ [∵ समद्विभाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]
ΔOPR में, $\angle ORP + \angle OPR + \angle POR = 180°$
$\Rightarrow \angle OPR + \angle OPR + 160° = 180°$ [∵ $\angle ORP = \angle OPR$]
$\Rightarrow 2\angle OPR + 160° = 180°$
$\Rightarrow 2\angle OPR = 180° - 160° = 20°$
$\Rightarrow \angle OPR = \frac{20°}{2} = 10°$

प्रश्न 4:

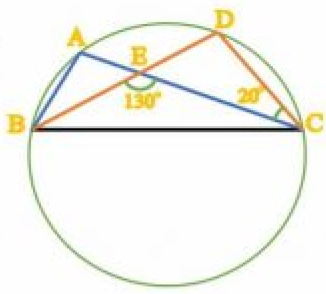


आकृति में, $\angle ABC = 69°$ और $\angle ACB = 31°$ हो, तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

ΔABC में,
$\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180°$
$\Rightarrow \angle A + 69° + 31° = 180°$ [∵ $\angle ABC = 69°$ और $\angle ACB = 31°$]
$\Rightarrow \angle A + 100° = 180°$
$\Rightarrow \angle A = 180° - 100° = 80°$
$\angle BDC = \angle A$ [∵ एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]
$\Rightarrow \angle BDC = 80°$

प्रश्न 5:



आकृति में, एक वृत्त पर A, B, C और D चार बिन्दु हैं। AC और BD एक बिन्दु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\angle BEC = 130°$ तथा $\angle ECD = 20°$ है। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।

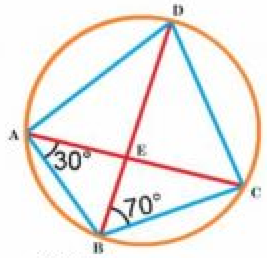
उत्तर 5:

$\angle DEC + \angle BEC = 180°$ [∵ रैखिक युग्म]
$\Rightarrow \angle DEC + 130° = 180°$ [∵ $\angle BEC = 130°$]
$\Rightarrow \angle DEC = 180° - 130° = 50°$
ΔDEC में, $\angle D + \angle DEC + \angle DCE = 180°$
$\Rightarrow \angle D + 50° + 20° = 180°$ [∵ $\angle DEC = 50°$ और $\angle DCE = 20°$]
$\Rightarrow \angle D + 70° = 180°$
$\Rightarrow \angle D = 180° - 70° = 110°$
$\angle BAC = \angle D$ [∵ एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]
$\Rightarrow \angle BAC = 110°$

प्रश्न 6:

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण एक बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DBC = 70°$ और $\angle BAC = 30°$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए। पुनः यदि AB = BC हो, तो $\angle ECD$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 6:



$\angle BDC = \angle BAC$ [∵ एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]

$\Rightarrow \angle BDC = 30°$

ΔBDC में, $\angle BCD + \angle BDC + \angle DBC = 180°$

$\Rightarrow \angle BCD + 30° + 70° = 180°$ [∵ $\angle DBC = 70°$ और $\angle BDC = 30°$]

$\Rightarrow \angle BCD + 100° = 180°$ $\Rightarrow \angle BCD = 180° - 100° = 80°$

यदि AB = BC हो, तो

$\angle BCA = \angle BAC$ [∵ समद्विभाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

$\Rightarrow \angle BCA = 30°$

यहाँ $\angle ECD + \angle BCE = \angle BCD$

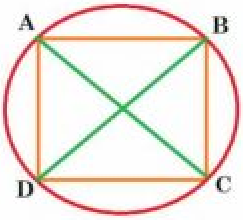
$\Rightarrow \angle ECD + 30° = 80°$ [∵ $\angle BCE = 30°$ और $\angle BCD = 80°$]

$\Rightarrow \angle ECD = 80° - 30° = 50°$

प्रश्न 7:

यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण उसके शीर्षों से जाने वाले वृत्त के व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।

उत्तर 7:



AC वृत्त का व्यास है।

अतः, $\angle ADC = 90°$ और $\angle ABC = 90°$ ... (1) [∵अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है]

इसीप्रकार, BD वृत्त का व्यास है।

अतः, $\angle BAD = 90°$ और $\angle BCD = 90°$ ... (2) [∵अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है]

समीकरण (1) और (2) से, $\angle ADC = \angle ABC = \angle BAD = \angle BCD = 90°$

अतः, ABCD एक आयत है।

प्रश्न 8:

यदि एक समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है।

उत्तर 8:

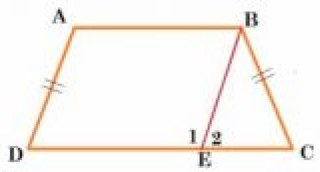
दिया है: समलंब ABCD में AB || DC तथा AD = BC है।

रचना: AD || BE खींचा।

उपपत्ति: चतुर्भुज ABED में,

AB || DE [∵ दिया है]

AD || BE [∵ रचना से]



अतः, ABED एक समांतर चतुर्भुज है।

AD = BE [∵ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर माप की होती हैं]

AD = BC [∵ दिया है]

$\Rightarrow$ BE = BC

ΔEBC में, BE = BC [∵ ऊपर सिद्ध किया गया है]

अतः, $\angle C = \angle 2$ ... (1) [∵ समद्विभाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

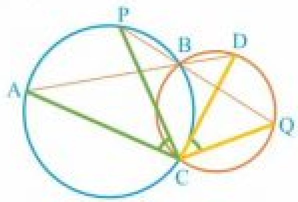
$\angle A = \angle 1$ ... (2) [∵ समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

यहाँ, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ [∵ रैखिक युग्म]

$\Rightarrow \angle A + \angle C = 180°$ [∵ समीकरण (1) और (2) से]

$\Rightarrow$ ABED एक चक्रीय चतुर्भुज है।

प्रश्न 9:
दो वृत्त दो बिन्दुओं B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं। B से जाने वाले दो रेखाखंड ABD और PBQ वृत्तों को A, D और P, Q पर क्रमशः प्रतिच्छेद करते हुए खींचे गए हैं (देखिए आकृति)। सिद्ध कीजिए कि ∠ACP = ∠QCD है।

उत्तर 9:


∠ACP = ∠ABP ... (1) [∵ एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]

∠ABP = ∠QBD ... (2) [∵ शीर्षाभिमुख कोण]

∠QBD = ∠QCD ... (3) [∵ एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]

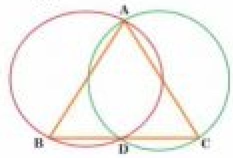
समीकरण (1), (2) और (3) से,

∠ACP = ∠QCD

प्रश्न 10:
यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित है।

उत्तर 10:
दिया है: त्रिभुज की दो भुजाओं AB और AC को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त परस्पर एक दूसरे को बिंदु D पर काटते हैं।

रचना: AD को मिलाया।

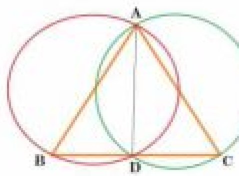


उपपत्ति: AB वृत्त का व्यास है तथा ∠ADB अर्द्धवृत्त में बना कोण है।

अतः, ∠ADB = 90° ... (1) [∵ अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है]

AC वृत्त का व्यास है तथा ∠ADC अर्द्धवृत्त में बना कोण है।

अतः, ∠ADC = 90° ... (2) [∵ अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है]

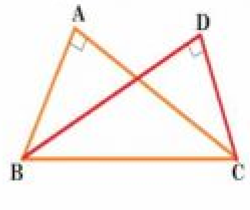


यहाँ, ∠ADB + ∠ADC = 90° + 90° = 180°

∠ADB और ∠ADC रैखिक युग्म बनाते हैं, इसलिए BDC एक सरल रेखा है।

अतः, प्रतिच्छेद बिन्दु D तीसरी BC पर स्थित है।

प्रश्न 11:
उभयनिष्ठ कर्ण AC वाले दो समकोण त्रिभुज ABC और ADC हैं। सिद्ध कीजिए कि ∠CAD = ∠CBD है।

उत्तर 11:


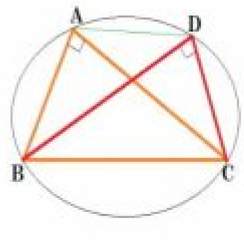
दिया है: ABC और ADC उभयनिष्ठ कर्ण AC पर दो समकोण त्रिभुज हैं।

सिद्ध करना है: ∠CAD = ∠CBD है।

उपपत्ति: त्रिभुज ABC और ADC एक ही आधार BC पर स्थित हैं तथा ∠BAC = ∠BDC है।

अतः, बिन्दु A, B, C और D एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

[∵ दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखाखंड के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिंदुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक ही वृत्त पर स्थित होते है]



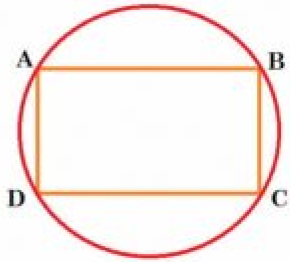
इसलिए,

∠CAD = ∠CBD

[∵ एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]

प्रश्न 12:

सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समांतर चतुर्भुज आयत होता है।



उत्तर 12:

दिया है: ABCD एक चक्रीय समांतर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है: ABCD एक आयत है।

उपपत्ति: चक्रीय चतुर्भुज ABCD में

$\angle A + \angle C = 180°$ ... (1)

[∵ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है]

परन्तु $\angle A = \angle C$ ... (2)

[∵ समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

समीकरण (1) और (2) से

$\angle A + \angle A = 180°$

$\Rightarrow 2\angle A = 180°$

$\Rightarrow \angle A = \frac{180°}{2} = 90°$

एक समांतर चतुर्भुज, जिसका एक कोण समकोण हो, आयत होता है।

अतः, ABCD एक आयत है।