गणित

(www.tiwariacademy.com)

(अध्याय – 10)(वृत्त)

(कक्षा – 9)

प्रश्नावली 10.4

प्रश्न 1:

5 cm तथा 3 cm त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 cm है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1:

दिया है: C (P, 3) और C (Q, 5) दो वृत्त परस्पर दो बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं।

रचना: PA और QA को मिलाया। PM जीवा AB का समद्विभाजक खींचा।

उपपत्ति: AB वृत्त C (P, 3) की जीवा है और PM जीवा AB का समद्विभाजक है।

इसलिए, $PM \perp AB$

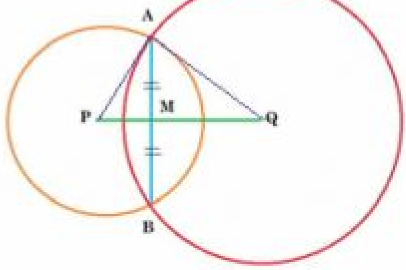
[∵ केन्द्र से होकर जाने वाली और जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।]

अतः, $\angle PMA = 90°$

माना, $PM = x$, इसलिए, $QM = 4 - x$

ΔAPM में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AM^2 = AP^2 - PM^2$ ... (1)



तथा ΔAPM में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AM^2 = AQ^2 - QM^2$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से

$AP^2 - PM^2 = AQ^2 - QM^2$

$\Rightarrow 3^2 - x^2 = 5^2 - (4 - x)^2 \quad \Rightarrow 9 - x^2 = 25 - (16 + x^2 - 8x)$

$\Rightarrow 9 - 9 = 8x \Rightarrow x = \frac{0}{8} = 0$

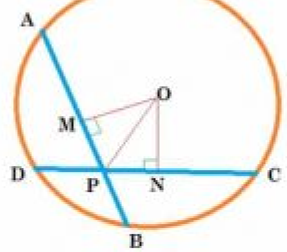
समीकरण (1) से, $AM^2 = 3^2 - 0^2 = 9 \quad \Rightarrow AM = 3$

$\Rightarrow AB = 2AM = 6$

प्रश्न 2:

यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के खंड दूसरी जीवा के संगत खंडों के बराबर हैं।

उत्तर 2:



दिया है: वृत्त C (O, r) की समान जीवाएँ AB और CD बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है: AP = CP और BP = DP है।

रचना: OP को मिलाया तथा $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ बनाए।

उपपत्ति: ΔOMP और ΔONP में,

$\angle OMP = \angle ONP$ [∵ प्रत्येक 90°]

AP = AP [∵ उभयनिष्ठ]

OM = ON [∵ वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं]

अतः, $\Delta OMP \cong \Delta ONP$ [∵ RHS सर्वांगसमता नियम]

PM = PN ... (1) [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

तथा AB = CD ... (2) [∵ दिया है]

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow AM = CN$ ... (3)

समीकरण (1) और (3) को जोड़ने पर

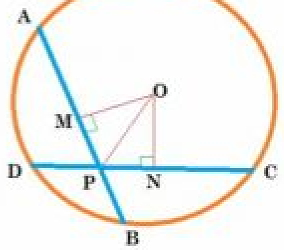
$AM + PM = CN + PN$

$\Rightarrow AP = CP$ ... (4)

समीकरण (2) में से (4) को घटाने पर

$AB - AP = CD - CP \quad \Rightarrow PB = PD$

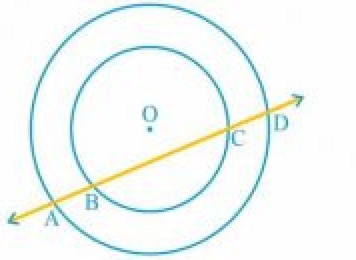
प्रश्न 3:
यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं से बराबर कोण बनाती है।

उत्तर 3:


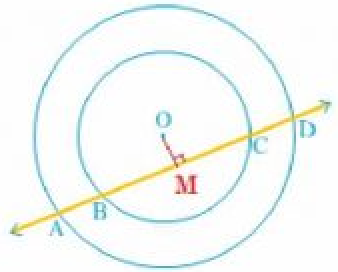
दिया है: वृत्त C (O, r) की समान जीवाएँ AB और CD बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं।
सिद्ध करना है: $\angle OPM = \angle OPN$ है।
रचना: OP को मिलाया तथा $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ बनाए।
उपपत्ति: ΔOMP और ΔONP में,

$\angle OMP = \angle ONP$	[∵ प्रत्येक 90°]
$AP = AP$	[∵ उभयनिष्ठ]
$OM = ON$	[∵ वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं]
अतः, $\Delta OMP \cong \Delta ONP$	[∵ RHS सर्वांगसमता नियम]
$\angle OPM = \angle OPN$	[∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

प्रश्न 4:
यदि एक रेखा दो संकेन्द्री वृत्तों (एक ही केन्द्र वाले वृत) को, जिसका केन्द्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करे, तो सिद्ध कीजिए AB = CD है (देखिए आकृति) ।

उत्तर 4:


दिया है: दो संकेन्द्री वृत्त (एक ही केन्द्र वाले वृत), जिसका केन्द्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करते हैं।
सिद्ध करना है: AB = CD है।
रचना: $OM \perp AD$ बनाया।
उपपत्ति: BC अन्तःवृत की जीवा है तथा $OM \perp BC$ है। इसलिए
BM = CM ... (1)
[∵ केंद्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है]
इसीप्रकार, AD बाह्यवृत्त की जीवा है तथा $OM \perp AD$ है। इसलिए
AM = DM ... (2)
[∵ केंद्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है]



समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर,
AM – BM = DM – CM
⇒ AB = CD

प्रश्न 5:
एक पार्क में बने 5 m त्रिज्या वाले वृत्त पर खड़ी तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा एवं मनदीप खेल रही हैं। रेशमा एक गेंद को सलमा के पास, सलमा मनदीप के पास तथा मनदीप रेशमा के पास फेंकती है। यदि रेशमा तथा सलमा के बीच और सलमा तथा मनदीप के बीच की प्रत्येक दूरी 6 m हो, तो रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी क्या है?

उत्तर 5:
दिया है: आकृति में, R, S और M क्रमशः रेशमा, सलमा एवं मनदीप को दर्शाते हैं। अतः RS = SM = 6 cm है।
रचना: OR, OS, RS, RM और OM को मिलाया तथा $OL \perp RS$ बनाया।
उपपत्ति: ΔORS में,

OS = OR और $OL \perp RS$	[∵ रचना से]
इसलिए, RL = LS = 3 cm	[∵ RS = 6 cm]

ΔOLS में, पाइथागोरस प्रमेय से, $OL^2 = OS^2 - SL^2$
$\Rightarrow OL^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Rightarrow OL = 4$

ΔORK और ΔOMK में,

OR = OM [∵ वृत्त की त्रिज्याएँ]

$\angle$ROK = $\angle$MOK [∵ समान जीवाएँ केंद्र पर बराबर कोण बनाती हैं]

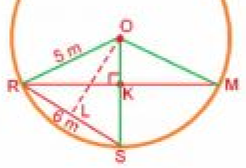
OK = OK [∵ उभयनिष्ठ]

अतः, $\Delta ORK \cong \Delta OMK$ [∵ SAS सर्वांगसमता नियम]

RK = MK [∵ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं]

अतः, OK ⊥ RM है।

[∵ केन्द्र से होकर जाने वाली और जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।]



अब, ΔORS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times RS \times OL$ ... (1)

तथा ΔORS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OS \times KR$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से, $\frac{1}{2} \times RS \times OL = \frac{1}{2} \times OS \times KR$

$\Rightarrow RS \times OL = OS \times KR \quad \Rightarrow 6 \times 4 = 5 \times KR \quad \Rightarrow KR = \frac{6 \times 4}{5} = 4.8$

अतः, $RM = 2 \times KR = 2 \times 4.8 = 9.6$ cm

प्रश्न 6:

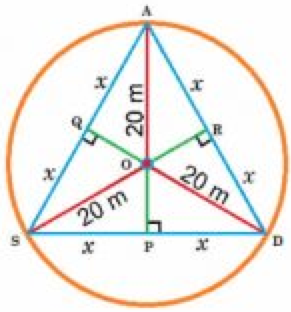
20 m त्रिज्या का एक गोल पार्क (वृत्ताकार) एक कालोनी में स्थित है। तीन लड़के अंकुर, सैय्यद तथा डेविड इसकी परिसीमा पर बराबर दूरी पर बैठे हैं और प्रत्येक के हाथ में एक खिलौना टेलीफोन आपस में बात करने के लिए है। प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर 6:

दिया है: आकृति में, A, S और D क्रमशः अंकुर, सैय्यद तथा डेविड को दर्शाते हैं। अतः AS = SD = AD है। वृत्ताकार पार्क की त्रिज्या 20 m है, अतः AO = SO = DO = 20 cm है।

रचना: AP ⊥ SD बनाया।

उपपत्ति: माना AS = SD = AD = $2x$ cm है।



ΔASD में,

AS = AD और AP ⊥ SD [∵ रचना से]

इसलिए, SP = PD = x cm [∵ SD = $2x$ cm]

ΔOPD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OP^2 = OD^2 - PD^2$

$\Rightarrow OP^2 = 20^2 - x^2 = 400 - x^2$

$\Rightarrow OP = \sqrt{400 - x^2}$

अब, ΔAPD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AP^2 + PD^2 = AD^2$

$\Rightarrow (AO + OP)^2 + x^2 = (2x)^2 \Rightarrow \left(20 + \sqrt{400 - x^2}\right)^2 + x^2 = 4x^2$

$\Rightarrow 400 + 400 - x^2 + 2 \times 20 \times \sqrt{400 - x^2} + x^2 = 4x^2$

$\Rightarrow 800 + 40\sqrt{400 - x^2} = 4x^2 \Rightarrow 200 + 10\sqrt{400 - x^2} = x^2$

$\Rightarrow 10\sqrt{400 - x^2} = x^2 - 200$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$100(400 - x^2) = (x^2 - 200)^2$

$\Rightarrow 40000 - 100x^2 = x^4 + 40000 - 400x^2$

$\Rightarrow x^4 - 300x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 300) = 0 \Rightarrow x^2 = 300 \Rightarrow x = 10\sqrt{3}$

अतः, प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई $= 2x = 2 \times 10\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ m