गणित

(www.tiwariacademy.com)
(अध्याय - 9) (बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ)
(कक्षा - 8)

प्रश्नावली 9.5

प्रश्न 1:

निम्नलिखित गुणनफलों में से प्रत्येक को प्राप्त करने के लिए उचित सर्वसमिका का उपयोग कीजिए:

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(2y+5)(2y+5)$

(iii) $(2a-7)(2a-7)$ (iv) $\left(3a-\frac{1}{2}\right)\left(3a-\frac{1}{2}\right)$

(v) $(1.1m-0.4)(1.1m+0.4)$ (vi) $\left(a^2+b^2\right)\left(-a^2+b^2\right)$

(vii) $(6x-7)(6x+7)$ (viii) $(-a+c)(-a+c)$

(ix) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a-9b)(7a-9b)$

उत्तर 1:

(i) $(x+3)(x+3)=(x+3)^2$

$=(x)^2+2\times x\times 3+(3)^2$ [सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ से]

$=x^2+6x+9$

(ii) $(2y+5)(2y+5)=(2y+5)^2$

$=(2y)^2+2\times 2y\times 5+(5)^2$ [सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ से]

$=4y^2+20y+25$

(iii) $(2a-7)(2a-7)=(2a-7)^2$

$=(2a)^2-2\times 2a\times 7+(7)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$=4a^2-28a+49$

(iv) $\left(3a-\frac{1}{2}\right)\left(3a-\frac{1}{2}\right)=\left(3a-\frac{1}{2}\right)^2$

$=(3a)^2-2\times 3a\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$=9a^2-3a+\frac{1}{4}$

(v) $(1.1m-0.4)(1.1m+0.4)=(1.1m)^2-(0.4)^2$

[सर्वसमिका $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ से]

$=1.21m^2-0.16$

(vi) $\left(a^2+b^2\right)\left(-a^2+b^2\right)=\left(b^2+a^2\right)\left(b^2-a^2\right)$

$=\left(b^2\right)^2-\left(a^2\right)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ से]

$=b^4-a^4$

(vii) $(6x-7)(6x+7)=(6x)^2-(7)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ से]

$=36x^2-49$

(viii) $(-a+c)(-a+c)=(c-a)(c-a)=(c-a)^2$

$= (c)^2 - 2\times c\times a + (a)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से]

$= c^2 - 2ca + a^2$

(ix) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)=\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)^2$

$=\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\times\frac{x}{2}\times\frac{3y}{4}+\left(\frac{3y}{4}\right)^2$ [सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से]

$= \frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}xy+\frac{9}{16}y^2$

(x) $(7a-9b)(7a-9b)=(7a-9b)^2$

$=(7a)^2 - 2\times 7a\times 9b + (9b)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से]

$= 49a^2 - 126ab + 81b^2$

प्रश्न 2:

निम्नलिखित गुणनफलों में से प्रत्येक को प्राप्त करने के लिए, सर्वसमिका $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ का उपयोग कीजिए:

(i) $(x+3)(x+7)$ (ii) $(4x+5)(4x+1)$

(iii) $(4x-5)(4x-1)$ (iv) $(4x+5)(4x-1)$

(v) $(2x+5y)(2x+3y)$ (vi) $(2a^2+9)(2a^2+5)$

(vii) $(xyz-4)(xyz-2)$

उत्तर 2:

(i) $(x+3)(x+7)=(x)^2+(3+7)x+3\times 7$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ से]

$= x^2 + 10x + 21$

(ii) $(4x+5)(4x+1)=(4x)^2+(5+1)4x+5\times 1$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ से]

$= 16x^2 + 6\times 4x + 5 = 16x^2 + 24x + 5$

(iii) $(4x-5)(4x-1) = (4x)^2+(-5-1)4x+(-5)\times(-1)$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ से]

$= 16x^2 + (-6)\times 4x + 5 = 16x^2 - 24x + 5$

(iv) $(4x+5)(4x-1)=(4x)^2+\{5\times(-1)\}\times 4x+5\times(-1)$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ से]

$= 16x^2 + (5-1)\times 4x - 5 = 16x^2 + 4\times 4x - 5 = 16x^2 + 16x - 5$

(v) $(2x+5y)(2x+3y)=(2x)^2+(5y+3y)\times 2x+5y\times 3y$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ से]

$= 4x^2 + 8y \times 2x + 15y^2 = 4x^2 + 16xy + 15y^2$

(vi) $(2a^2+9)(2a^2+5) = (2a^2)^2 + (9+5) \times 2a^2 + 9 \times 5$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ से]

$= 4a^4 + 14 \times 2a^2 + 45 = 4a^4 + 28a^2 + 45$

(vii) $(xyz-4)(xyz-2) = (xyz)^2 + (-4-2) \times xyz + (-4) \times (-2)$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ से]

$= x^2y^2z^2 - 6xyz + 8$

प्रश्न 3:

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित वर्गों को ज्ञात कीजिए:

(i) $(b-7)^2$ (ii) $(xy+3z)^2$ (iii) $(6x^2-5y)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p - 0.5q)^2$ (vi) $(2xy+5y)^2$

उत्तर 3:

(i) $(b-7)^2 = (b)^2 - 2 \times b \times 7 + (7)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से]

$= b^2 - 14b + 49$

(ii) $(xy+3z)^2 = (xy)^2 + 2 \times xy \times 3z + (3z)^2$ [सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से]

$= x^2y^2 + 6xyz + 9z^2$

(iii) $(6x^2-5y)^2 = (6x^2)^2 - 2 \times 6x^2 \times 5y + (5y)^2$

[सर्वसमिका $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से]

$= 36x^4 - 60x^2y + 25y^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{3}{2}n\right)^2 = \left(\frac{2}{3}m\right)^2 + 2 \times \frac{2}{3}m \times \frac{3}{2}n + \left(\frac{3}{2}n\right)^2$

[सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से]

$= \frac{4}{9}m^2 + 2mn + \frac{9}{4}n^2$

(v) $(0.4p - 0.5q)^2 = (0.4p)^2 - 2 \times 0.4p \times 0.5q + (0.5q)^2$

[सर्वसमिका $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से]

$= 0.16p^2 - 0.40pq + 0.25q^2$

(vi) $(2xy+5y)^2 = (2xy)^2 + 2 \times 2xy \times 5y + (5y)^2$ [सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से]

$= 4x^2y^2 + 20xy^2 + 25y^2$

प्रश्न 4:

सरल कीजिए:

(i) $(a^2 - b^2)^2$

(ii) $(2x+5)^2 - (2x-5)^2$

(iii) $(7m-8n)^2+(7m+8n)^2$

(iv) $(4m+5n)^2+(5m+4n)^2$

(v) $(2.5p-1.5q)^2-(1.5p-2.5q)^2$

(vi) $(ab+bc)^2-2ab^2c$

(vii) $(m^2-n^2m)^2+2m^3n^2$

उत्तर 4:

(i) $(a^2-b^2)^2=(a^2)^2-2\times a^2\times b^2+(b^2)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$= a^4-2a^2b^2+b^4$

(ii) $(2x+5)^2-(2x-5)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 5+(5)^2-\left[(2x)^2-2\times 2x\times 5+(5)^2\right]$

[सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ और $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$= 4x^2+20x+25-\left[4x^2-20x+25\right]$

$= 4x^2+20x+25-4x^2+20x-25 = 40x$

(iii) $(7m-8n)^2+(7m+8n)^2=(7m)^2-2\times 7m\times 8n+(8n)^2+\left[(7m)^2+2\times 7m\times 8n+(8n)^2\right]$

[सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ और $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$= 49m^2-112mn+64n^2+\left[49m^2+112mn+64n^2\right]$

$= 49m^2-112mn+64n^2+49m^2+112mn+64n^2 = 98m^2+128n^2$

(iv) $(4m+5n)^2+(5m+4n)^2=(4m)^2+2\times 4m\times 5n+(5n)^2+(5m)^2+2\times 5m\times 4n+(4n)^2$

[सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ से]

$= 16m^2+40mn+25n^2+25m^2+40mn+16n^2$

$= 16m^2+25m^2+40mn+40mn+25n^2+16n^2 = 41m^2+80mn+41n^2$

(v) $(2.5p-1.5q)^2-(1.5p-2.5q)^2$

$=(2.5p)^2-2\times 2.5p\times 1.5q+(1.5q)^2-\left[(1.5p)^2-2\times 1.5p\times 2.5q+(2.5q)^2\right]$

[सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$= 6.25p^2-7.50pq+2.25q^2-\left[2.25p^2-7.50pq+6.25q^2\right]$

$= 6.25p^2-7.50pq+2.25q^2-2.25p^2+7.50pq-6.25q^2$

$= 4p^2-4q^2$

(vi) $(ab+bc)^2-2ab^2c=(ab)^2+2\times ab\times bc+(bc)^2-2ab^2c$

[सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ से]

$= a^2b^2+2ab^2c+b^2c^2-2ab^2c = a^2b^2+b^2c^2$

(vii) $(m^2-n^2m)^2+2m^3n^2=(m^2)^2-2\times m^2\times n^2m+(n^2m)^2+2m^3n^2$

[सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$= m^4-2m^3n^2+n^4m^2+2m^3n^2 = m^4+n^4m^2$

प्रश्न 5:

दर्शाइए कि:

(i) $(3x+7)^2-84x=(3x-7)^2$

(ii) $(9p-5q)^2+180pq=(9p+5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}m-\frac{3}{4}n\right)^2+2mn=\frac{16}{9}m^2+\frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq+3q)^2-(4pq-3q)^2=48pq^2$

(v) $(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)=0$

उत्तर 5:

(i) L.H.S. $=(3x+7)^2-84x=(3x)^2+2\times3x\times7+(7)^2-84x$

[सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ से]

$=9x^2+42x+49-84x = 9x^2-42x+49$

$=(3x-7)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

= R.H.S.

(ii) L.H.S. $=(9p-5q)^2+180pq=(9p)^2-2\times9p\times5q+(5q)^2+180pq$

[सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$=81p^2-90pq+25q^2+180pq = 81p^2+90pq+25q^2$

$=(9p+5q)^2$ [सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ से]

(iii) L.H.S. $=\left(\frac{4}{3}m-\frac{3}{4}n\right)^2+2mn=\left(\frac{4}{3}m\right)^2-2\times\frac{4}{3}m\times\frac{3}{4}n+\left(\frac{3}{4}n\right)^2+2mn$

[सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$=\frac{16}{9}m^2-2mn+\frac{9}{16}n^2+2mn = \frac{16}{9}m^2+\frac{9}{16}n^2$ = R.H.S.

(iv) L.H.S. $=(4pq+3q)^2-(4pq-3q)^2$

$=(4pq)^2+2\times4pq\times3q+(3q)^2-\left[(4pq)^2-2\times4pq\times3q+(3q)^2\right]$

[सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ और $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

$=16p^2q^2+24pq^2+9q^2-\left[16p^2q^2-24pq^2+9q^2\right]$

$=16p^2q^2+24pq^2+9q^2-16p^2q^2+24pq^2-9q^2 = 48pq^2$ = R.H.S.

(v) L.H.S. $=(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)$

$=a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2$ [सर्वसमिका $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ से]

= 0 = R.H.S.

प्रश्न 6:

सर्वसमिकाओं के उपयोग से निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए:

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2

(iv) 998^2 (v) 5.2^2 (vi) 297×303

(vii) 78×82 (viii) 8.9^2 (ix) 1.05×9.5

उत्तर 6:

(i) $71^2=(70+1)^2=(70)^2+2\times70\times1+(1)^2$ [सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

= 4900 + 140 + 1 = 5041

(ii) $99^2=(100-1)^2=(100)^2-2\times100\times1+(1)^2$ [सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

= 10000 – 200 + 1 = 9801

(iii) $102^2=(100+2)^2=(100)^2+2\times100\times2+(2)^2$

[सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ से]

= 10000 + 400 + 4 = 10404

(iv) $998^2=(1000-2)^2=(1000)^2-2\times1000\times2+(2)^2$

[सर्वसमिका $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ से]

= 1000000 – 4000 + 4 = 996004

(v) $5.2^2=(5+0.2)^2=(5)^2+2\times5\times0.2+(0.2)^2$

[सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ से]

= 25 + 2.0 + 0.04 = 27.04

(vi) 297 x 303 = (300 – 3) x (300 + 3) = $(300)^2-(3)^2$

[सर्वसमिका $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ से]

= 90000 – 9 = 89991

(vii) 78 x 82 = (80 – 2) x (80 + 2) = $(80)^2-(2)^2$

[सर्वसमिका $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ से]

= 6400 – 4 = 6396

(viii) $8.9^2=(8+0.9)^2=(8)^2+2\times8\times0.9+(0.9)^2$ [सर्वसमिका $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ से]

= 64 + 14.4 + 0.81 = 79.21

(ix) 1.05 x 9.5 = (10 + 0.5) x (10 – 0.5) = $(10)^2-(0.5)^2$

[सर्वसमिका $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ से]

प्रश्न 7:

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए:

(i) 51^2-49^2 (ii) $(1.02)^2-(0.98)^2$

(iii) 153^2-147^2 (iv) $12.1^2-7.9^2$

उत्तर 7:

(i) $51^2-49^2=(51+49)(51-49)$ [सर्वसमिका $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ से]

= 100 x 2 = 200

(ii) $(1.02)^2-(0.98)^2=(1.02+0.98)(1.02-0.98)$

[सर्वसमिका $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ से]

= 2.00 x 0.04 = 0.08

(iii) $153^2 - 147^2 = (153+147)(153-147)$ [सर्वसमिका $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ से]

= 300 x 6 = 1800

(iv) $12.1^2 - 7.9^2 = (12.1+7.9)(12.1-7.9)$ [सर्वसमिका $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ से]

= 20.0 x 4.2 = 84.0 = 84

प्रश्न 8:

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$, का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए:

(i) 103 x 104
(ii) 5.1 x 5.2
(iii) 103 x 98
(iv) 9.7 x 9.8

उत्तर 8:

(i) 103 x 104 = (100 + 3) x (100 + 4) = $(100)^2 + (3+4)\times 100 + 3\times 4$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ से]

= 10000 + 7 x 100 + 12
= 10000 + 700 + 12 = 10712

(ii) 5.1 x 5.2 = (5 + 0.1) x (5 + 0.2) = $(5)^2 + (0.1+0.2)\times 5 + 0.1\times 0.2$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ से]

= 25 + 0.3 x 5 + 0.02
= 25 + 1.5 + 0.02 = 26.52

(iii) 103 x 98 = (100 + 3) x (100 – 2) = $(100)^2 + (3-2)\times 100 + 3\times(-2)$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ से]

= 10000 + (3 – 2) x 100 – 6
= 10000 + 100 – 6 = 10094

(iv) 9.7 x 9.8 = (10 – 0.3) x (10 – 0.2)

= $(10)^2 + \{(-0.3)+(-0.2)\}\times 10 + (-0.3)\times(-0.2)$

[सर्वसमिका $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ से]

= $100 + \{-0.3-0.2\}\times 10 + 0.06$

= 100 – 0.5 x 10 + 0.06
= 100 – 5 + 0.06 = 95.06