# गणित

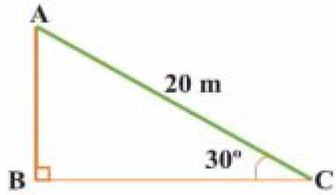
(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 9) (त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग)

(कक्षा 10)

## प्रश्नावली 9.1

### प्रश्न 1:
सर्कस का एक कलाकार एक 20 m लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंधा हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 1:


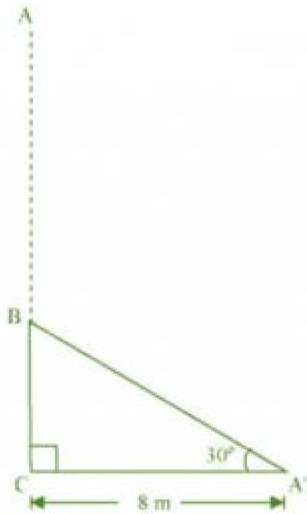

दी गई आकृति में AB खंभा है और AC डोर है।

ΔABC में,

$\frac{AB}{AC} = \sin 30^\circ \qquad \Rightarrow \frac{AB}{20} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow AB = \frac{20}{2} = 10$

इसलिए, खंभे की ऊँचाई 10 m है।

### प्रश्न 2:
आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद - बिंदु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 2:



माना AC पेड़ है। माना AB पेड़ के टूटने से पहले की स्थिति है और A'B पेड़ के टूटने के बाद की स्थिति है।

ΔA'BC में,

$\frac{BC}{A'C} = \tan 30^\circ \qquad \Rightarrow \frac{BC}{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow BC = \frac{8}{\sqrt{3}}$

तथा $\frac{A'C}{A'B} = \cos 30^\circ \qquad \Rightarrow \frac{8}{A'B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow A'B = \frac{16}{\sqrt{3}}$

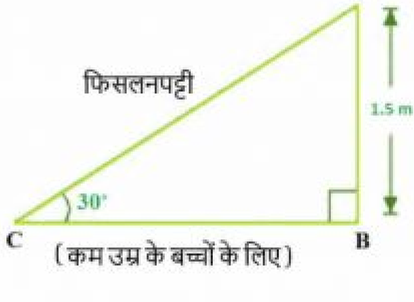
पेड़ की ऊँचाई

$= AC = AB + BC = A'B + BC$

$= \frac{16}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$

इसलिए, पेड़ की ऊँचाई $8\sqrt{3}$ m है।

### प्रश्न 3:
एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ के 30° कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3 m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लंबई क्या होनी चाहिए?

### उत्तर 3:



माना AC, 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए (for younger children) एक ऐसी फिसलनपट्टी (Slide) है जिसका शिखर 1.5 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ के 30° कोण पर झुका हुआ हो।

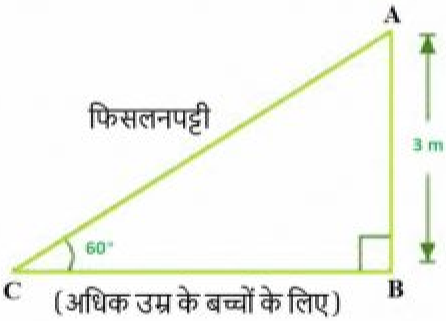
ΔABC में,

$\frac{AB}{AC} = \sin 30^\circ$

$\Rightarrow \frac{1.5}{AC} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow AC = 3$

माना AC, 5 वर्ष से अधिक उम्र के बच्चों के लिए (for elder children) एक ऐसी फिसलनपट्टी (Slide) है जिसका शिखर 3 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ के 60° कोण पर झुका हुआ हो।




ΔABC में,

$$\frac{AB}{AC} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{3}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

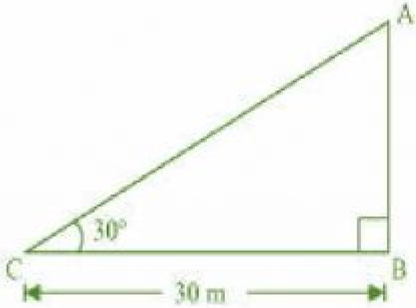
इसलिए, फिसलनपट्टी की लंबई 3m और $2\sqrt{3}$ m होनी चाहिए।

## प्रश्न 4:

भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद - बिंदु से 30 m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 4:

माना AB मीनार है तथा C पाद - बिंदु से 30 m की दूरी पर एक बिंदु है।




ΔABC में,

$$\frac{AB}{BC} = \tan 30^\circ \Rightarrow \frac{AB}{30} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$$

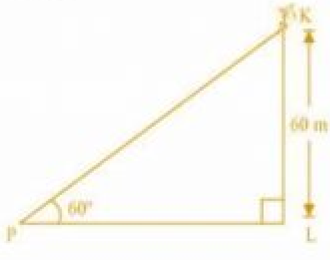
इसलिए, मीनार की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ m होगी।

## प्रश्न 5:

भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थाई रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर की डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 5:

माना K पतंग है और P वह बिंदु है जिससे पतंग में लगी डोरी को अस्थाई रूप से बांध दिया गया है।




ΔKLP में,

$$\frac{KL}{KP} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{60}{KP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{120}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}$$

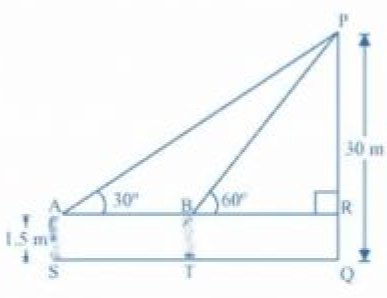
इसलिए, डोरी की लंबाई $40\sqrt{3}$ m है।

## प्रश्न 6:

1.5 m लंबा एक लड़का 30 m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है।

### उत्तर 6:

माना PQ भवन है और AS 1.5 m लंबा एक लड़का है। वह भवन की ओर S से T तक चलकर गया है।




यहाँ, PQ = 30 m

इसलिए, PR = PQ – RQ = (30 – 1.5) m = 28.5 m = 57/2 m

ΔPAR में,

$$\frac{PR}{AR} = \tan 30^\circ \Rightarrow \frac{57/2}{AR} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow AR = \frac{57\sqrt{3}}{2}$$

ΔPRB में,

$$\frac{PR}{BR} = \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{57/2}{BR} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow BR = \frac{57}{2\sqrt{3}} = \frac{57\sqrt{3}}{6} = \frac{19\sqrt{3}}{2}$$

भवन की ओर चली गई दूरी

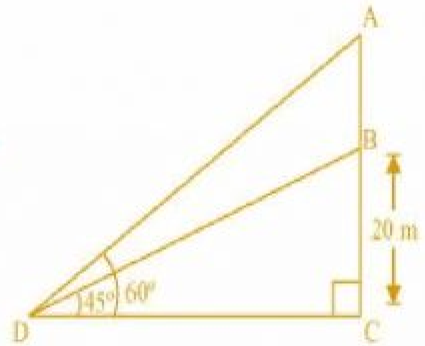
$$= ST = AB = AR - BR = \frac{57\sqrt{3}}{2} - \frac{19\sqrt{3}}{2} = \frac{38\sqrt{3}}{2} = 19\sqrt{3}$$

इसलिए, भवन की ओर चली गई दूरी $19\sqrt{3}$ m है।

## प्रश्न 7:

भूमि के एक बिंदु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 7:




माना BC भवन है और AB एक संचार मीनार है।

ΔBCD में,

$$\frac{BC}{CD} = \tan 45^\circ \Rightarrow \frac{20}{CD} = 1 \Rightarrow CD = 1$$

ΔACD में,

$$\frac{AC}{CD} = \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{AB + BC}{CD} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \frac{AB + 20}{20} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB + 20 = 20\sqrt{3} \quad \Rightarrow AB = 20(\sqrt{3} - 1)$$

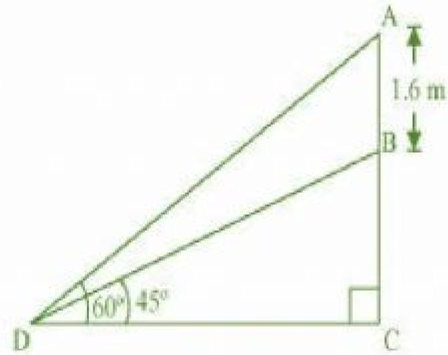
इसलिए, संचार मीनार की ऊँचाई $20(\sqrt{3} - 1)$ m है।

## प्रश्न 8:

एक पेडस्टल के शिखर पर 1.6 m ऊँची मूर्ती लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ती के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी बिंदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 8:

माना BC एक पेडस्टल है और AB पेडस्टल के शिखर पर 1.6 m ऊँची मूर्ती है।




ΔBCD में,

$$\frac{BC}{CD} = \tan 45^\circ \Rightarrow \frac{BC}{CD} = 1 \Rightarrow BC = CD$$

ΔACD में,

$$\frac{AB + BC}{CD} = \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{AB + BC}{BC} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1.6 + BC}{BC} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BC + 1.6 = BC\sqrt{3} \quad \Rightarrow 1.6 = BC(\sqrt{3} - 1)$$

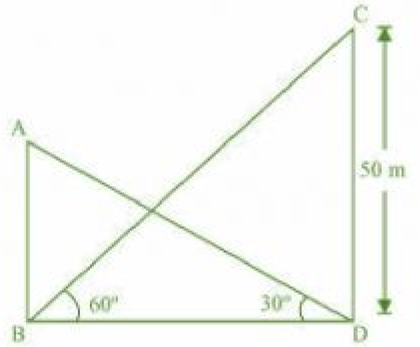
$$\Rightarrow BC = \frac{1.6}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1.6(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$= 0.8(\sqrt{3} + 1)$$

इसलिए, पेडस्टल की ऊँचाई $0.8(\sqrt{3} + 1)$ m है।

## प्रश्न 9:

एक मीनार के पाद - बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद - बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50 m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।




### उत्तर 9:

माना CD 50 m ऊँची मीनार है और AB भवन है।

ΔCDB में,

$$\frac{CD}{BD} = \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{50}{BD} = \sqrt{3} \Rightarrow BD = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

ΔABD में,

$$\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ \Rightarrow \frac{AB}{50/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{50}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

इसलिए, भवन की ऊँचाई $16\frac{2}{3}$ m है।

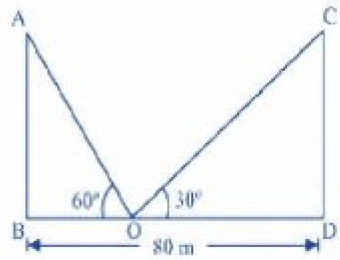
## प्रश्न 10:

एक 80 m चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने - सामने समान लंबाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभो के बीच सड़क के एक बिंदु से खंभो के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° है। खंभो की ऊँचाई और खंभों से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 10:

माना BD एक 80 m चौड़ी सड़क है और AB, CD आमने - सामने समान लंबाई वाले दो खंभे है।

माना $AB = CD = x$




ΔABO में,

$$\frac{AB}{BO} = \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{x}{BO} = \sqrt{3} \Rightarrow BO = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

ΔCDO में,

$$\frac{CD}{DO} = \tan 30^\circ \Rightarrow \frac{x}{80 - BO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x\sqrt{3} = 80 - BO$$

$$\Rightarrow x\sqrt{3} = 80 - \frac{x}{\sqrt{3}}$$ [$BO$ का मान रखने पर]

$$\Rightarrow x\sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}} = 80 \Rightarrow 3x + x = 80\sqrt{3} \Rightarrow 4x = 80\sqrt{3} \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$$

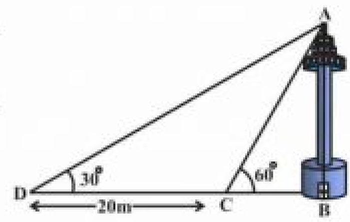
इसलिए, $BO = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 20$

DO = BD – BO = (80 – 20) m = 60 m

इसलिए, खंभे की ऊँचाई $20\sqrt{3}$ m है और खंभों से बिंदु की दूरी 20 m तथा 60 m है ।

## प्रश्न 11:

एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर ऊर्ध्वाधरतः खड़ा है। टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिंदु से 20 m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।




### उत्तर 11:

माना AB एक टीवी टॉवर है और BC नहर की चौड़ाई है।

ΔABC में,

$$\frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \sqrt{3} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sqrt{3}}$$

ΔABD में,

$\frac{AB}{BD} = \tan 30° \quad \Rightarrow \frac{AB}{BC + CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

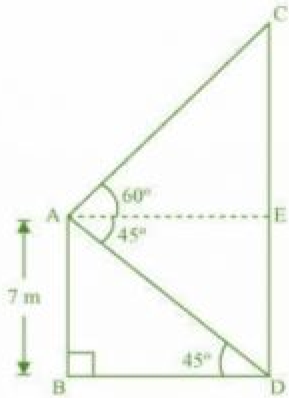
$\Rightarrow \frac{AB}{AB/\sqrt{3} + CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [$BC$ का मान रखने पर]

$\Rightarrow \frac{AB\sqrt{3}}{AB + 20\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow 3AB = AB + 20\sqrt{3} \quad \Rightarrow 2AB = 20\sqrt{3} \quad \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$

इसलिए, $BC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10$

इसलिए, टीवी टॉवर की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ m और नहर की चौड़ाई 10 m है।

## प्रश्न 12:
7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 12:



माना AB भवन है और CD केबल टॉवर है।

ΔABD में,

$\frac{AB}{BD} = \tan 45° \quad \Rightarrow \frac{7}{BD} = 1 \quad \Rightarrow BD = 7$

ΔACE में, AC = BD = 7 m

$\frac{CE}{AE} = \tan 60° \quad \Rightarrow \frac{CE}{7} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow CE = 7\sqrt{3}$

इसलिए, $CD = CE + ED = 7\sqrt{3} + 7 = 7(\sqrt{3} + 1)$

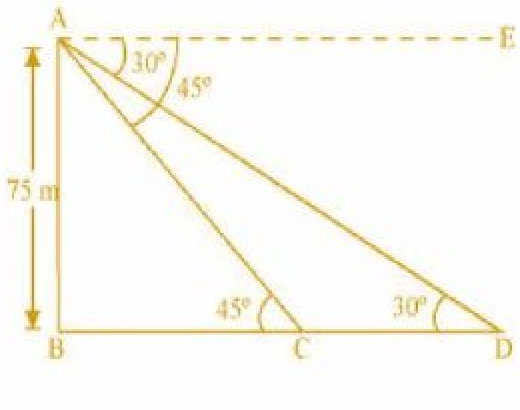
इसलिए, केबल टॉवर की ऊँचाई $7(\sqrt{3} + 1)$ m है।

## प्रश्न 13:
समुद्र - तल से 75 m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दुसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 13:
माना AB 75 m ऊँची लाइट हाउस है और C तथा D दो समुद्री जहाज हैं।

ΔABC में,

$\frac{AB}{BC} = \tan 45° \quad \Rightarrow \frac{75}{BC} = 1 \quad \Rightarrow BC = 75$




ΔABD में,

$\frac{AB}{BD} = \tan 30°$

$\Rightarrow \frac{75}{BC + CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{75}{75 + CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

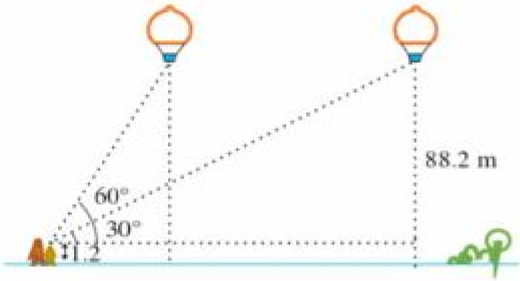
$\Rightarrow 75 + CD = 75\sqrt{3}$

$\Rightarrow CD = 75(\sqrt{3} - 1)$

इसलिए, दो जहाजों के बीच की दूरी $75(\sqrt{3} - 1)$ m है।

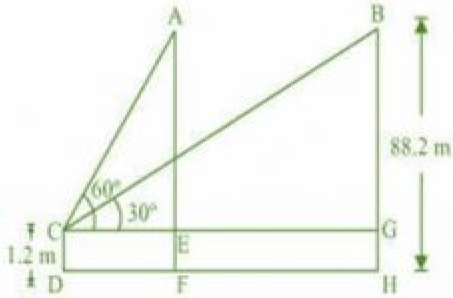
## प्रश्न 14:

1.2 m लंबी एक लड़की भूमि से 88.2 m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60° है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है। इस अंतराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।




## उत्तर 14:

माना CD 1.2 m लंबी एक लड़की है और FG गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी है।




$\Delta$ACE में,

$\dfrac{AE}{CE} = \tan 60°$

$\Rightarrow \dfrac{AF - EF}{CE} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \dfrac{88.2 - 1.2}{CE} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \dfrac{87}{CE} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow CE = \dfrac{87}{\sqrt{3}} = \dfrac{87\sqrt{3}}{3} = 29\sqrt{3}$

$\Delta$BCG में,

$\dfrac{BG}{GC} = \tan 30° \;\; \Rightarrow \dfrac{88.2 - 1.2}{CG} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \dfrac{87}{CG} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow CG = 87\sqrt{3}$

गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी $= EG = CG - CE = 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3}$

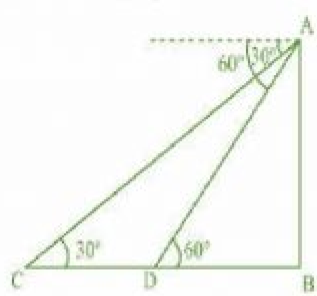
इसलिए, गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी $58\sqrt{3}$ m है।

## प्रश्न 15:

एक सीधा राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30° के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एक सामान चाल से जाता है। छः सेकेंड बाद कार का अवनमन कोण 60° हो गया। इस बिंदु से मीनार के पाद तक पहुंचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

## उत्तर 15:

माना CD राजमार्ग है और AB मीनार है। C कार की पहली स्थिति है और D छः सेकेंड बाद की स्थिति है।




$\Delta$ADB में,

$\dfrac{AB}{DB} = \tan 60° \;\; \Rightarrow \dfrac{AB}{DB} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow DB = \dfrac{AB}{\sqrt{3}}$

$\Delta$ABC में,

$\dfrac{AB}{BC} = \tan 30°$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BD + DC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AB\sqrt{3} = BD + DC$

$\Rightarrow AB = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} + DC$ [$BD$ का मान रखने पर]

$\Rightarrow AB\sqrt{3} - \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = DC$

$\Rightarrow DC = \dfrac{3AB - AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{2AB}{\sqrt{3}}$

CD $\left(= \frac{2AB}{\sqrt{3}}\right)$ दूरी तय करने में कार द्वारा लिया गया समय = 6 सेकेंड

इसलिए, कार की चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{\left(\frac{2AB}{\sqrt{3}}\right)}{6} = \frac{AB}{3\sqrt{3}}\ m/s$

BD $\left(= \frac{AB}{\sqrt{3}}\right)$ दूरी तय करने में कार द्वारा लिया गया समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{\left(\frac{AB}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{AB}{3\sqrt{3}}} = 3$ सेकेंड

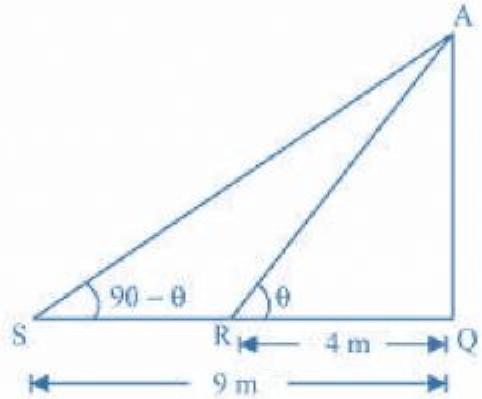
इसलिए, मीनार के पाद तक पहुंचने में कार द्वारा लिया गया समय 3 सेकेंड है।

## प्रश्न 16:

मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4 m और 9 m की दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 m है।

## उत्तर 16:

माना AQ मीनार है और C तथा D, 4 m और 9 m की दूरी पर स्थित दो बिंदु है।
उन्नयन कोण पूरक कोण हैं । इसलिए, यदि एक कोण θ है तो दूसरा कोण 90 – θ होगा।




ΔAQR में,

$\dfrac{AQ}{QR} = \tan\theta$

$\Rightarrow \dfrac{AQ}{4} = \tan\theta$ ... (1)

ΔAQS में,

$\dfrac{AQ}{QS} = \tan(90-\theta)$

$\Rightarrow \dfrac{AQ}{9} = \cot\theta$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) को गुणा करने पर

$\left(\dfrac{AQ}{4}\right)\left(\dfrac{AQ}{9}\right) = \tan\theta . \cot\theta$

$\Rightarrow \dfrac{AQ^2}{36} = 1$

$\Rightarrow AQ^2 = 36$

$\Rightarrow AQ = \pm 6$

क्योंकि ऊँचाई ऋणात्मक नहीं हो सकती, इसलिए, मीनार की ऊँचाई 6 m है।