गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 8) (त्रिकोणमिति का परिचय)
(कक्षा 10)

प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1:

निम्नलिखित के मान निकालिए:

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

(ii) $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(iii) $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + cosec\ 30°}$

(iv) $\frac{\sin 30° + \tan 45° - cosec\ 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

(v) $\frac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

उत्तर 1:

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

मान रखने पर

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii) $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

मान रखने पर

$$2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

(iii) $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + cosec\ 30°}$

मान रखने पर

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2 + 2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} \times \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{18}}{(2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{8 - 24} = \frac{-2(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{-16}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$

(iv) $\frac{\sin 30° + \tan 45° - cosec\ 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

मान रखने पर

$$\frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} + 4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} + 4} \times \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} - 4} = \frac{27 - 12\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 16}{(3\sqrt{3})^2 - 4^2}$$

$$= \frac{43 - 24\sqrt{3}}{27 - 16} = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$$

(v) $\frac{5\cos^2 60°+4\sec^2 30°-\tan^2 45°}{\sin^2 30°+\cos^2 30°}$

मान रखने पर

$$\frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{4}{4}}=\frac{67}{12}$$

प्रश्न 2:

सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:

(i) $\frac{2\tan 30°}{1+\tan^2 30°}$

(A) $sin\ 60°$ (B) $cos\ 60°$ (C) $tan\ 60°$ (D) $sin\ 30°$

(ii) $\frac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°}$

(A) $tan\ 90°$ (B) 1 (C) $sin\ 45°$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

(A) 0 (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ बराबर है:

(A) $cos\ 60°$ (B) $sin\ 60°$ (C) $tan\ 60°$ (D) $sin\ 30°$

उत्तर 2:

(i) $\frac{2\tan 30°}{1+\tan^2 30°}$

मान रखने पर

$$\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

हम जानते हैं कि $sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ इसलिए, विकल्प (A) सही है।

(ii) $\frac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°}$

मान रखने पर

$$\frac{1-(1)^2}{1+(1)^2}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$

हम जानते हैं कि $sin\ 0 = 0$,

इसलिए, विकल्प (A) सही है।

(iv) $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$

मान रखने पर

$$\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

हम जानते हैं कि $tan\ 60° = \sqrt{3}$
इसलिए, विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 3:

यदि $tan\ (A+B) = \sqrt{3}$ और $tan\ (A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0° < A+B \leq 90°, A > B$, तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

दिया है $tan\ (A+B) = \sqrt{3}$
$\Rightarrow\ tan\ (A+B) = \tan 60°$ $\left[\text{क्योंकि } \tan 60° = \sqrt{3}\right]$
$\Rightarrow A+B = 60°$ ... (i)
दिया है $tan\ (A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow\ tan\ (A-B) = \tan 30°$ $\left[\text{क्योंकि } \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$
$\Rightarrow A-B = 30°$ ... (ii)
समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर
$2A = 90°$
$\Rightarrow A = 45°$
समीकरण (i) से
$45° + B = 60° \quad \Rightarrow B = 15°$
इसलिए, $A = 45°$ और $B = 15°$

प्रश्न 4:

बताइए कि निम्नलिखित में कौन - कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर कि पुष्टि कीजिए।

(i) $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$
(ii) θ में वृद्धि होने के साथ $\sin\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
(iii) θ में वृद्धि होने के साथ $\cos\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
(iv) θ के सभी मानों पर $\sin\theta = \cos\theta$.
(v) $A = 0°$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

उत्तर 4:

(i) असत्य,
माना $A = 30°$ और $B = 60°$
इसप्रकार, $LHS = \sin(A+B) = \sin(30°+60°) = \sin 90° = 1$ और

$$\text{RHS} = \sin A + \sin B = \sin 30° + \sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

अतः, $\sin(A+B) \neq \sin A + \sin B$

(ii) सत्य,
क्योंकि, हम जानते हैं कि $\sin 0° = 0, \sin 30° = \frac{1}{2}, \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ और $\sin 90° = 1$
इसप्रकार, θ में वृद्धि होने के साथ $\sin\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) असत्य,
क्योंकि, हम जानते हैं कि $\cos 0° = 1, \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 60° = \frac{1}{2}$ और $\cos 90° = 0$
इसप्रकार, θ में वृद्धि होने के साथ $\cos\theta$ के मान में कमी होती है।

(iv) असत्य,
क्योंकि $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ लेकिन $\sin 30° = \frac{1}{2}$ होता है।

(v) सत्य,
क्योंकि $\tan 0° = 0$, हम जानते हैं कि $\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°} = \frac{1}{0}$ परिभाषित नहीं है।

TIWARI ACADEMY