प्रश्नावली 7.2

प्रश्न 1:

उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं $(-1, 7)$ और $(4, -3)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को $2 : 3$ के अनुपात में विभाजित करता है।

उत्तर 1:

माना, बिंदु P बिंदुओं $A(-1, 7)$ और $B(4, -3)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को $2 : 3$ के अनुपात में विभाजित करता है।

विभाजन सूत्र $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ द्वारा, बिंदु P के निर्देशांक

$$= \left(\frac{2 \times 4 + 3 \times (-1)}{2+3}, \frac{2 \times (-3) + 3 \times 7}{2+3}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{5}, \frac{15}{5}\right) = (1, 3)$$

प्रश्न 2:

बिंदुओं $(4, -1)$ और $(-2, -3)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम-त्रिभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 2:

माना, बिंदु P और Q बिंदुओं $A(4, -1)$ और $B(-2, -3)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम-त्रिभाजित करते हैं।

अतः, $AP : PB = 1 : 2$

विभाजन सूत्र $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ द्वारा, बिंदु P के निर्देशांक

$$= \left(\frac{1 \times (-2) + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times (-3) + 2 \times (-1)}{1+2}\right)$$

$$= \left(\frac{6}{3}, \frac{-5}{3}\right) = \left(2, -\frac{5}{3}\right)$$

तथा, $AQ : QB = 2 : 1$

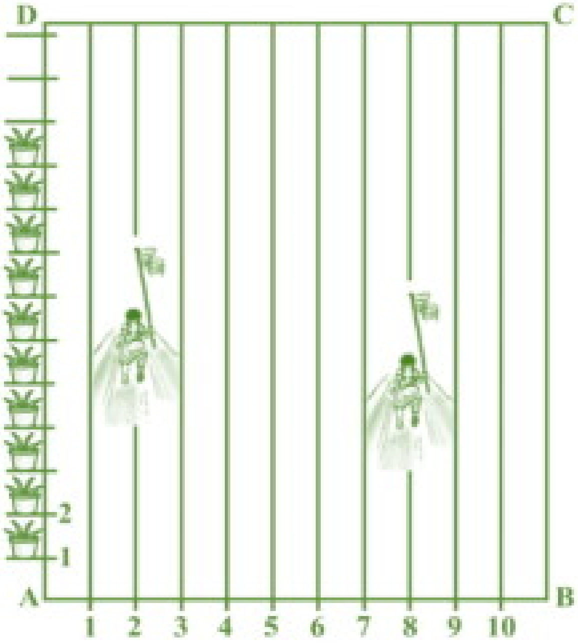
विभाजन सूत्र $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ द्वारा, बिंदु Q के निर्देशांक

$$= \left(\frac{2 \times (-2) + 1 \times 4}{2+1}, \frac{2 \times (-3) + 1 \times (-1)}{2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{0}{3}, \frac{-7}{3}\right) = \left(0, -\frac{7}{3}\right)$$

प्रश्न 3:

आपके स्कूल में खेल-कूद क्रियाकलाप आयोजित करने के लिए, एक आयताकार मैदान ABCD में, चुने से परस्पर $1m$ की दूरी पर पंक्तियाँ बनाई गई हैं। AD के अनुदिश परस्पर $1m$ की दूरी पर 100 गमले रखे गए हैं, जैसे कि आकृति में दर्शाया गया है। निहारिका दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक हरा झंडा गाड़ देती है। प्रीत आठवीं पंक्ति में AD के $\frac{1}{5}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक लाल झंडा गाड़ देती है। दोनों झंडो के बीच की दूरी क्या हैं? यदि रश्मि को एक नीला झंडा इन दोनों को मिलाने वाले रेखाखंड पर ठीक आधी दूरी (बीच में) पर गाड़ना हो तो उसे अपना झंडा कहाँ गाड़ना चाहिए?



उत्तर 3:

निहारिका दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक हरा झंडा गाड़ देती है।

इसलिए, निहारिका द्वारा गाड़े गए झंडे के निर्देशांक $= N\left(2, \frac{1}{4} \times 100\right) = N(2, 25)$

प्रीत आठवीं पंक्ति में AD के $\frac{1}{5}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक लाल झंडा गाड़ देती है।

इसलिए, प्रीत द्वारा गाड़े गए झंडे के निर्देशांक $= P\left(8, \frac{1}{5} \times 100\right) = P(8, 20)$

दोनों झंडो के बीच की दूरी $= NP = \sqrt{(8-2)^2 + (20-25)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$

यदि रश्मि को एक नीला झंडा इन दोनों को मिलाने वाले रेखाखंड पर ठीक आधी दूरी (बीच में) पर गाड़ना हो तो, रश्मि द्वारा गाड़े गए झंडे के निर्देशांक = NP के मध्य बिंदु के निर्देशांक

$$= R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = R\left(\frac{2+8}{2}, \frac{25+20}{2}\right) = R\left(5, \frac{45}{2}\right) = R(5, 22.5)$$

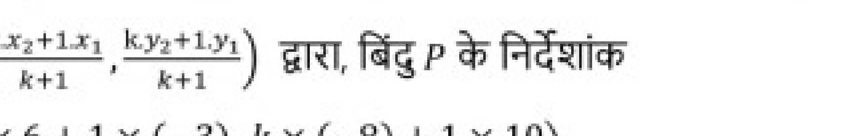
अतः, रश्मि को अपना झंडा पाँचवीं पंक्ति में $22.5\ m$ की दूरी पर गाड़ना चाहिए।

प्रश्न 4:

बिंदुओं $(-3, 10)$ और $(6, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिंदु $(-1, 6)$ किस अनुपात में विभाजित करता है।

उत्तर 4:

माना, बिंदु $P(-1, 6)$, बिंदुओं $A(-3, 10)$ और $B(6, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को $k:1$ अनुपात में विभाजित करता है।



विभाजन सूत्र $\left(\frac{k.x_2+1.x_1}{k+1}, \frac{k.y_2+1.y_1}{k+1}\right)$ द्वारा, बिंदु P के निर्देशांक

$$(-1, 6) = \left(\frac{k \times 6 + 1 \times (-3)}{k+1}, \frac{k \times (-8) + 1 \times 10}{k+1}\right)$$

$\Rightarrow (-1, 6) = \left(\frac{6k-3}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right)$

तुलना करने पर

$\frac{6k-3}{k+1} = -1$ और $\frac{-8k+10}{k+1} = 6$

$\Rightarrow 6k - 3 = -k - 1$

$\Rightarrow 7k = 2 \quad \Rightarrow k = \frac{2}{7}$

अतः, बिंदु $P(-1, 6)$, बिंदुओं $A(-3, 10)$ और $B(6, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को $2:7$ अनुपात में विभाजित करता है।

प्रश्न 5:

वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदुओं $A(1, -5)$ और $B(-4, 5)$ को मिलाने वाला रेखाखंड x –अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

माना, बिंदुओं $A(1, -5)$ और $B(-4, 5)$ को मिलाने वाला रेखाखंड x –अक्ष से बिंदु $P(x, 0)$ पर $k:1$ के अनुपात में विभाजित होता है।

विभाजन सूत्र $\left(\frac{k.x_2+1.x_1}{k+1}, \frac{k.y_2+1.y_1}{k+1}\right)$ द्वारा, बिंदु P के निर्देशांक

$(x, 0) = \left(\frac{k \times (-4) + 1 \times 1}{k+1}, \frac{k \times 5 + 1 \times (-5)}{k+1}\right)$

$\Rightarrow (x, 0) = \left(\frac{-4k+1}{k+1}, \frac{5k-5}{k+1}\right)$

तुलना करने पर

$\frac{-4k+1}{k+1} = x$ और $\frac{5k-5}{k+1} = 0$

$\Rightarrow 5k - 5 = 0$

$\Rightarrow k = 1$

$\frac{-4k+1}{k+1} = x$ में k का मान रखने पर

$\frac{-4(1)+1}{1+1} = x$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

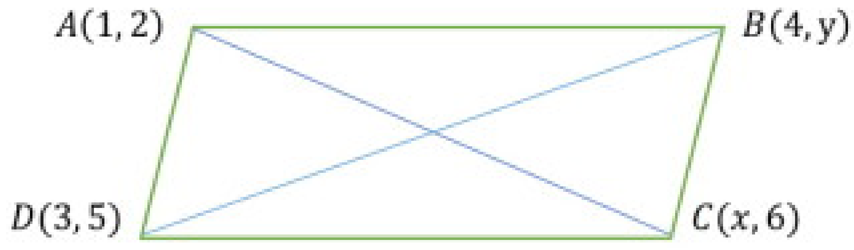
अतः, बिंदुओं $A(1, -5)$ और $B(-4, 5)$ को मिलाने वाला रेखाखंड x –अक्ष से बिंदु $P\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ पर $1:1$ के अनुपात में विभाजित होता है।

प्रश्न 6:

यदि बिंदु $(1, 2)$, $(4, y)$, $(x, 6)$ और $(3, 5)$ इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y ज्ञात कीजिए।

उत्तर 6:

दिया है: बिंदु $A(1,2), B(4,y), C(x,6)$ और $D(3,5)$ एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।



समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए
AC के मध्य बिंदु के निर्देशांक = BD के मध्य बिंदु के निर्देशांक

$$\Rightarrow \left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$$

तुलना करने पर

$\frac{1+x}{2} = \frac{7}{2}$ और $\frac{8}{2} = \frac{5+y}{2}$

$\Rightarrow 1 + x = 7$ और $8 = 5 + y$

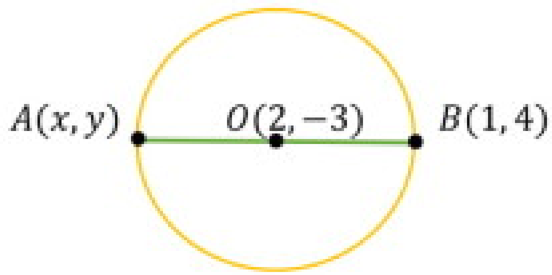
$\Rightarrow x = 6$ और $y = 3$

प्रश्न 7:

बिंदु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केंद्र $(2, -3)$ है तथा B के निर्देशांक $(1, 4)$ हैं।

उत्तर 7:

यहाँ, AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केंद्र $O(2, -3)$ है तथा B के निर्देशांक $(1, 4)$ हैं।
माना, बिंदु A के निर्देशांक (x, y) हैं।



केंद्र $O(2, -3)$, व्यास AB का मध्य बिंदु है। इसलिए,
AB के मध्य बिंदु के निर्देशांक = O के निर्देशांक

$$\Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+4}{2}\right) = (2, -3)$$

तुलना करने पर, $\frac{x+1}{2} = 2$ और $\frac{y+4}{2} = -3$

$\Rightarrow x + 1 = 4$ और $y + 4 = -6$

$\Rightarrow x = 3$ और $y = -10$

अतः, बिंदु A के निर्देशांक $(3, -10)$ हैं।

प्रश्न 8:

यदि A और B क्रमशः $(-2,-2)$ और $(2,-4)$ हो तो बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP=\frac{3}{7}AB$ हो और P रेखाखंड AB पर स्थित हो।

उत्तर 8:

दिया है: $AP=\frac{3}{7}AB$, इसलिए, $BP=\frac{4}{7}AB$

$\Rightarrow AP:PB=3:4$

बिंदु P बिंदुओं $A(-2,-2)$ और $B(2,-4)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को 3 : 4 के अनुपात में विभाजित करता है।

विभाजन सूत्र $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ द्वारा, बिंदु P के निर्देशांक

$$=\left(\frac{3\times 2+4\times(-2)}{3+4},\frac{3\times(-4)+4\times(-2)}{3+4}\right)$$

$$=\left(-\frac{2}{7},-\frac{20}{7}\right)$$

अतः, बिंदु P के निर्देशांक $\left(-\frac{2}{7},-\frac{20}{7}\right)$ हैं।

प्रश्न 9:

बिंदुओं $A(-2,2)$ और $B(2,8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 9:

माना, बिंदु P,Q और R बिंदुओं $A(-2,2)$ और $B(2,8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

अतः, $AP:PB=1:3$

विभाजन सूत्र $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ द्वारा, बिंदु P के निर्देशांक

$$=\left(\frac{1\times 2+3\times(-2)}{1+3},\frac{1\times 8+3\times 2}{1+3}\right)$$

$$=\left(\frac{-4}{4},\frac{14}{4}\right)=\left(-1,\frac{7}{2}\right)$$

और, $AQ:QB=2:2$

बिंदु Q के निर्देशांक

$$=\left(\frac{2\times 2+2\times(-2)}{2+2},\frac{2\times 8+2\times 2}{2+2}\right)$$

$$=\left(\frac{0}{4},\frac{20}{4}\right)=(0,5)$$

तथा, $AR:RB = 3:1$

बिंदु Q के निर्देशांक

$$= \left(\frac{3\times 2 + 1\times(-2)}{3+1}, \frac{3\times 8 + 1\times 2}{3+1}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{4}, \frac{26}{4}\right) = \left(1, \frac{13}{2}\right)$$

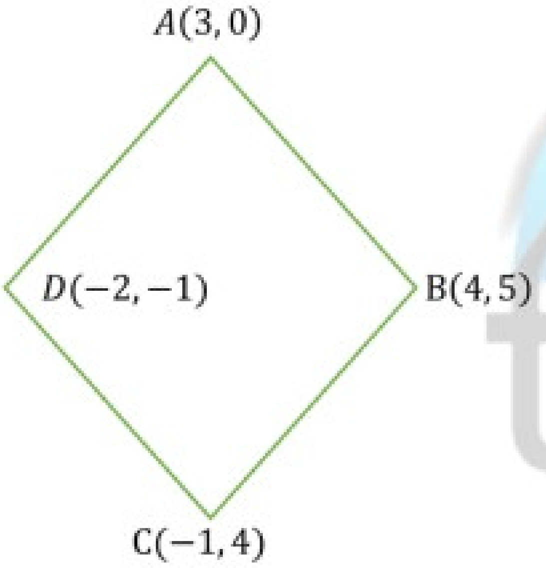
अतः, बिंदुओं $A(-2,2)$ और $B(2,8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक $P\left(-1,\frac{7}{2}\right)$, $Q(0,5)$तथा $R\left(1,\frac{13}{2}\right)$ हैं।

प्रश्न 10:

एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, $(3,0)$, $(4,5)$, $(-1,4)$ और $(-2,-1)$ हैं। [संकेत : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (उसके विकर्णों का गुणनफल)]

उत्तर 10:

समचतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष $A(3,0)$, $B(4,5)$, $C(-1,4)$ और $D(-2,-1)$ हैं।



विकर्णों $AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

विकर्णों $BD = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (उसके विकर्णों का गुणनफल)

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$$

$= 24$ वर्ग इकाई