गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 6) (त्रिभुज)

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 6.5

प्रश्न 1:

कुछ त्रिभुजों के भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि इनमें से कौन - कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लंबाई भी लिखिए।

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm (ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm (iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

उत्तर 1:

(i) दी गई त्रिभुज की भुजाएँ 7 cm, 24 cm और 25 cm हैं।
इनका वर्ग करने पर, हमें 49, 576 और 625 प्राप्त होता है।
$49 + 576 = 625 \Rightarrow 7^2 + 24^2 = 25^2$
ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हैं।
हम जानते हैं कि समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है, इसलिए कर्ण की लंबाई 25 cm होगी।

(ii) दी गई त्रिभुज की भुजाएँ 3 cm, 6 cm और 8 cm हैं।
इनका वर्ग करने पर, हमें 9, 36 और 64 प्राप्त होता है।
$9 + 36 \neq 64 \Rightarrow 3^2 + 6^2 \neq 8^2$
ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट नहीं करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ नहीं हैं।

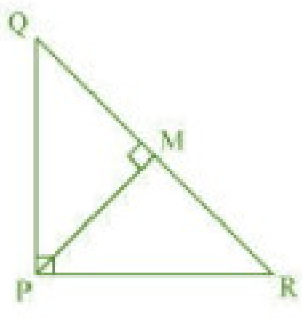
(iii) दी गई त्रिभुज की भुजाएँ 50 cm, 80 cm और 100 cm हैं।
इनका वर्ग करने पर, हमें 2500, 6400 और 10000 प्राप्त होता है।
$2500 + 6400 \neq 10000 \Rightarrow 50^2 + 80^2 \neq 100^2$
ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट नहीं करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ नहीं हैं।

(iv) दी गई त्रिभुज की भुजाएँ 5 cm, 12 cm और 13 cm हैं।
इनका वर्ग करने पर, हमें 25, 144 और 169 प्राप्त होता है।
$25 + 144 = 169 \Rightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$
ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हैं।
हम जानते हैं कि समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है, इसलिए कर्ण की लंबाई 13 cm है।

प्रश्न 2:

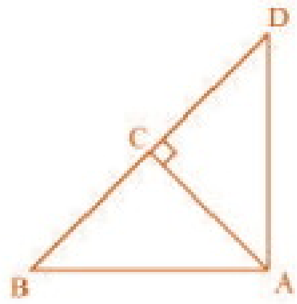
PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है। दर्शाइए कि $PM^2 = QM \times MR$ है।

उत्तर 2:



माना $\angle MPR = x$
ΔMPR में, $\angle MRP = 180° - 90° - x$
इसीप्रकार, ΔMPR में,
$\angle MPQ = 90° - \angle MPR = 90° - x$
$\angle MQP = 180° - 90° - (90° - x) = x$
ΔQMP और ΔPMR में,
$\angle MPQ = \angle MRP$
$\angle PMQ = \angle RMP$
$\angle MQP = \angle MPR$
$\Rightarrow \Delta QMP \sim \Delta PMR$ [AAA समरूपता प्रमेय से]
हम जानते हैं कि समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपाती होती हैं। इसलिए
$$\frac{QM}{PM} = \frac{MP}{MR}$$
$\Rightarrow PM^2 = MQ \times MR$

प्रश्न 3:



आकृति में ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा AC ⊥ BD है। दर्शाइए कि

(i) $AB^2 = BC \times BD$
(ii) $AC^2 = BC \times DC$
(iii) $AD^2 = BD \times CD$

उत्तर 3:

(i) ΔADB और ΔCAB में,

$\angle DAB = \angle ACB$ [प्रत्येक 90°]
$\angle ABD = \angle CBA$ [उभयनिष्ठ]
$\therefore \Delta DCM \sim \Delta BDM$ [AA समरूपता प्रमेय से]

$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{AB}$
$\Rightarrow AB^2 = CB \times BD$

(ii) माना $\angle CAB = x$
ΔCBA में,
$\angle CBA = 180° - 90° - x$
$\Rightarrow \angle CBA = 90° - x$
इसीप्रकार, ΔCAD में,
$\angle CAD = 90° - \angle CAB$
$\Rightarrow \angle CAD = 90° - x$
$\angle CDA = 180° - 90° - (90° - x)$
$\Rightarrow \angle CDA = x$
ΔCBA और ΔCAD में,

$\angle CBA = \angle CAD$ [ऊपर सिद्ध किया गया है]
$\angle CAB = \angle CDA$ [ऊपर सिद्ध किया गया है]
$\angle ACB = \angle DCA$ [प्रत्येक 90°]
$\therefore \Delta CBA \sim \Delta CAD$ [AAA समरूपता प्रमेय से]

$\Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$
$\Rightarrow AC^2 = BC \times DC$

(iii) ΔDCA और ΔDAB में,

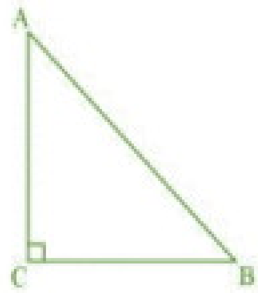
$\angle DCA = \angle DAB$ [प्रत्येक 90°]
$\angle CDA = \angle ADB$ [उभयनिष्ठ]
$\therefore \Delta DCA \sim \Delta DAB$ [AA समरूपता प्रमेय से]

$\Rightarrow \frac{DC}{DA} = \frac{DA}{DB}$
$\Rightarrow AD^2 = BD \times CD$

प्रश्न 4:

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

उत्तर 4:

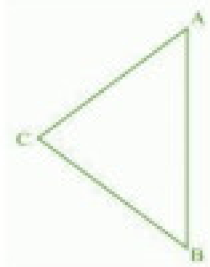


दिया है, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमे AC = BC और ∠C = 90°,
ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2$ [क्योंकि AC = BC]
$\Rightarrow AB^2 = 2AC^2$

प्रश्न 5:

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AC = BC है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।

उत्तर 5:



दिया है, $AB^2 = 2AC^2$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2$

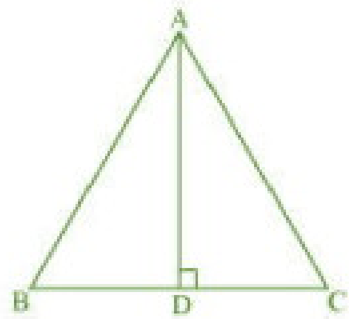
$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ [क्योंकि AC = BC]

ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करती हैं, अतः ABC एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्न 6:

एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 2a है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर 6:



माना ABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा 2a है। A से BC पर डाला गया शीर्षलंब AD है।

हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुज में शीर्षलम्ब सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है।

इसलिए, $\therefore BD = DC = a$

ΔADB में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\Rightarrow (2a)^2 = AD^2 + a^2$ [क्योंकि AB = 2a]

$\Rightarrow 4a^2 = AD^2 + a^2$

$\Rightarrow AD^2 = 3a^2$

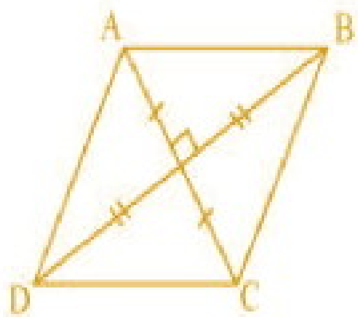
$\Rightarrow AD = \sqrt{3}a$

प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई $\sqrt{3}a$ है।

प्रश्न 7:

सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर 7:



ΔAOB में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AO^2 + OB^2$ ... (i)

ΔBOC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$BC^2 = BO^2 + OC^2$ ... (ii)

ΔCOD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$CD^2 = CO^2 + OD^2$ ... (iii)

ΔAOD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AD^2 = AO^2 + OD^2$ ... (iv)

समीकरण (i), (ii), (iii) और (iv) को जोड़ने पर

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = OA^2 + OB^2 + OB^2 + OC^2 + OC^2 + OD^2 + OD^2 + OA^2$

$= 2[OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2]$

$= 2[2OA^2 + 2OB^2]$ [क्योंकि OA = OC, OB = OD]

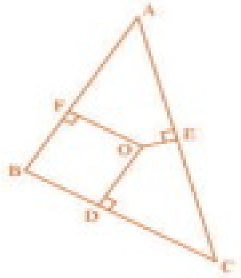
$= 4[OA^2 + OB^2]$

$= 4\left[\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2\right]$ [क्योंकि OA = ½ AC, OB = ½ BD]

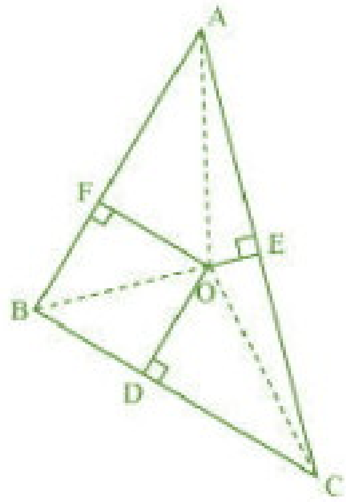
$= 4\left[\frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4}\right]$

$= AC^2 + BD^2$

प्रश्न 8:
आकृति में ΔABC के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा OD ⊥ BC, OE ⊥ AC और OF ⊥ AB है। दर्शाइए कि
(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$
(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$

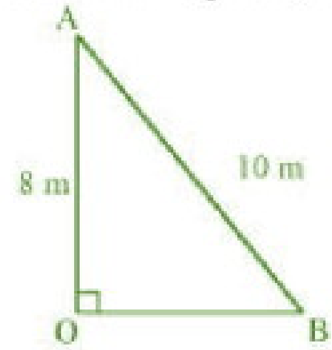


उत्तर 8:
OA, OB और OC को मिलाया।
(i) ΔAOF में, पाइथागोरस प्रमेय से
$OA^2 = OF^2 + AF^2$ ... (i)
ΔBOD में, पाइथागोरस प्रमेय से
$OB^2 = OD^2 + BD^2$ ... (ii)
ΔCOE में, पाइथागोरस प्रमेय से
$OC^2 = OE^2 + EC^2$ ... (iii)
समीकरण (i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर
$OA^2 + OB^2 + OC^2$
$= OF^2 + AF^2 + OD^2 + BD^2 + OE^2 + EC^2$
$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$ ... (iv)



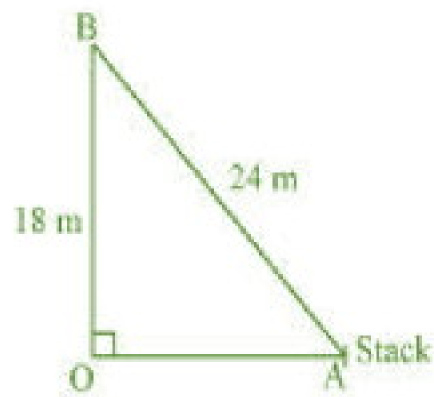
(ii) समीकरण (iv) से,
$AF^2 + BD^2 + CE^2$
$= OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2$
$= (OA^2 - OE^2) + (OC^2 - OD^2) + (OB^2 - OF^2)$
$= AE^2 + CD^2 + BF^2$

प्रश्न 9:
10 m लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8 m की ऊँचाई पर स्थित एक खिडकी तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।



उत्तर 9:
माना OA दीवार है और AB सीढ़ी है।
ΔAOB में, पाइथागोरस प्रमेय से
$AB^2 = OA^2 + OB^2$
$\Rightarrow 10^2 = 8^2 + BO^2 \quad \Rightarrow 100 = 64 + BO^2$
$\Rightarrow BO^2 = 36 \quad \Rightarrow BO = 6\,m$
अतः, दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी 6 m है।

प्रश्न 10:
18 m ऊंचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूंटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूंटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24 m है।

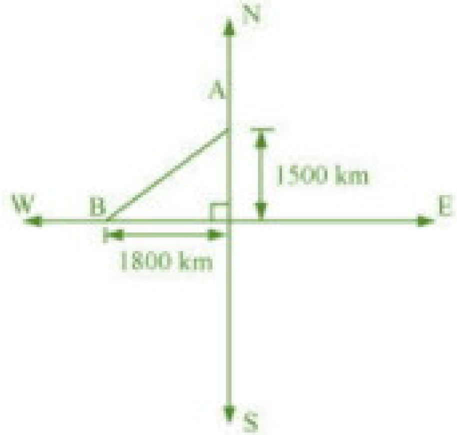


उत्तर 10:
माना OB खंभा है और A खूँटा (Stack) है।
ΔAOB में, पाइथागोरस प्रमेय से
$AB^2 = OB^2 + OA^2$
$\Rightarrow 24^2 = 18^2 + OA^2$
$\Rightarrow 576 = 324 + OA^2$
$\Rightarrow OA^2 = 252 \quad \Rightarrow OA = 6\sqrt{7}\,m$
अतः, खंभे के आधार से खूंटे की दूरी $6\sqrt{7}\,m$ है।

प्रश्न 11:

एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 km/hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 km/hr की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

उत्तर 11:



$1\frac{1}{2}$ घंटे में पहले विमान (उत्तर की ओर) द्वारा तय दूरी $= 1000 \times \frac{3}{2} = 1500\ km$

$1\frac{1}{2}$ घंटे में दूसरे विमान (पश्चिम की ओर) द्वारा तय दूरी$= 1200 \times \frac{3}{2} = 1800\ km$

माना OA और OB तय दूरियां हैं। पाइथागोरस प्रमेय से

जहाजों के बीच की दूरी

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2}$

$= \sqrt{(1500)^2 + (1800)^2} = \sqrt{2250000 + 3240000}$

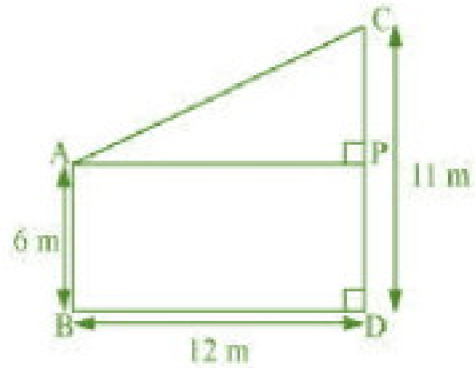
$= \sqrt{5490000} = 300\sqrt{61}\ km$

अतः, $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी $300\sqrt{61}\ km$ होगी।

प्रश्न 12:

दो खंभे जिनकी ऊँचाइयाँ 6 m और 11 m हैं तथा ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी 12 m है तो इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर 12:



माना AB और CD दो खंभे हैं जिनकी ऊँचाइयाँ 6 m और 11 m हैं ।

इसलिए, CP = 11 – 6 = 5 m तथा AP = 12 m

ΔAPC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AP^2 + PC^2 = AC^2$

$\Rightarrow 12^2 + 5^2 = AC^2$

$\Rightarrow AC^2 = 144 + 25 = 169$

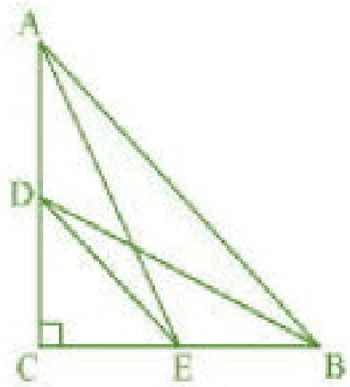
$\Rightarrow AC = 13\ m$

अतः, इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी 13 m होगी ।

प्रश्न 13:

एक त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है।

उत्तर 13:



ΔACE में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 + CE^2 = AE^2$ ... (1)

ΔBCD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$BC^2 + CD^2 = DB^2$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से,

$AC^2 + CE^2 + BC^2 + CD^2 = AE^2 + DB^2$ ... (3)

ΔCDE में, पाइथागोरस प्रमेय से

$DE^2 = CD^2 + CE^2$ ... (4)

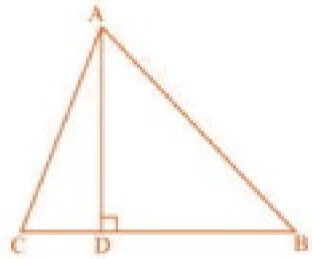
ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 + CB^2$ ... (5)

समीकरण (3), (4) और (5) से,

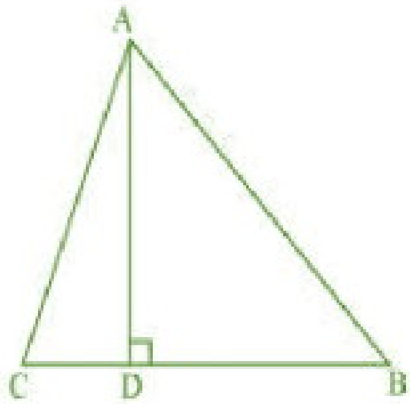
$DE^2 + AB^2 = AE^2 + DB^2$

प्रश्न 14:



किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लम्ब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि $DB = 3CD$ है (देखिए आकृति) । सिद्ध कीजिए कि $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है।

उत्तर 14:



ΔACD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$\Rightarrow AC^2 - CD^2 = AD^2$ ... (1)

ΔABD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\Rightarrow AB^2 - BD^2 = AD^2$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से,

$AC^2 - CD^2 = AB^2 - BD^2$ ... (3)

दिया है, $3DC = DB$, इसलिए

$DC = \frac{BC}{4}$ और $BD = \frac{3BC}{4}$ ... (4)

समीकरण (3) और (4) से,

$$AC^2 - \left(\frac{BC}{4}\right)^2 = AB^2 - \left(\frac{3BC}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow AC^2 - \frac{BC^2}{16} = AB^2 - \frac{9BC^2}{16}$$

$$\Rightarrow 16AC^2 - BC^2 = 16AB^2 - 9BC^2$$

$$\Rightarrow 16AC^2 = 16AB^2 - 8BC^2$$

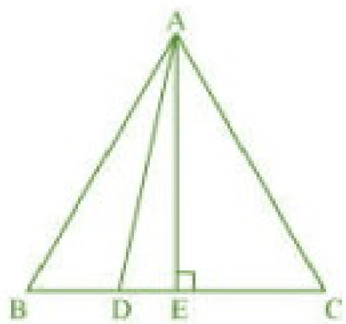
$$\Rightarrow 2AC^2 = 2AB^2 - BC^2$$

$$\Rightarrow 2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$

प्रश्न 15:

किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि $DB = 1/3\ BC$ है । सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$ है।

उत्तर 15:



ABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा a है। A से BC पर डाला गया शीर्षलंब AE है।
हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुज में शीर्षलम्ब सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है। इसलिए

$\therefore BE = EC = a/2$

ΔAEB में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AE^2 + BE^2$ $\Rightarrow (a)^2 = AD^2 + (a/2)^2$ [क्योंकि AB = a]

$\Rightarrow a^2 = AD^2 + a^2/4$ $\Rightarrow AD^2 = 3a^2/4$ $\Rightarrow AD = \sqrt{3}a/2$

दिया है, $BD = 1/3\ BC$

$\therefore BD = a/3$

$DE = BE - BD = a/2 - a/3 = a/6$

ΔADE में, पाइथागोरस प्रमेय से, $AD^2 = AE^2 + DE^2$

$$AD^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{36} = \frac{28a^2}{36} = \frac{7}{9}a^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{7}{9}AB^2$$

$$\Rightarrow 9AD^2 = 7AB^2$$

प्रश्न 16:

किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलम्ब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

उत्तर 16:

माना ABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा a है। A से BC पर डाला गया शीर्षलंब AE है।

हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुज में शीर्षलम्ब सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है। इसलिए

∴ BE = EC = BC/2 = a/2

ΔABE में, पाइथागोरस प्रमेय से

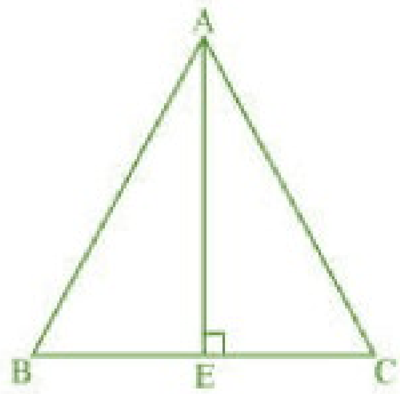
$AB^2 = AE^2 + BE^2$

$\Rightarrow a^2 = AE^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = AE^2 + \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow AE^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$4AE^2 = 3a^2$

⇒ 4 × (शीर्षलम्ब का वर्ग) = 3 × (एक भुजा का वर्ग)



प्रश्न 17:

सही उत्तर चुनकर उसका औचित्य दीजिए: ΔABC में, $AB = 6\sqrt{3}$ cm, AC = 12 cm और BC = 6 cm है। कोण B है:

(A) 120° (B) 60°

(C) 90° (D) 45°

उत्तर 17:

दिया है, $AB = 6\sqrt{3}$ cm, AC = 12 cm और BC = 6 cm

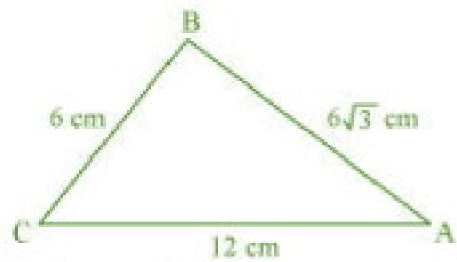
इसलिए, $AB^2 = 108$, $AC^2 = 144$ और $BC^2 = 36$

$AB^2 + BC^2$

= 108 + 36

= 144

$= AC^2$



ΔABC में, ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हैं।

∴ ∠B = 90°

इसलिए, विकल्प (C) सही है।