गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ - 6) (त्रिभुज)

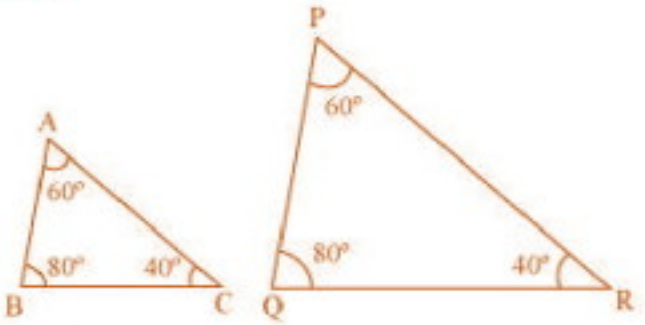
(कक्षा 10)

प्रश्नावली 6.3

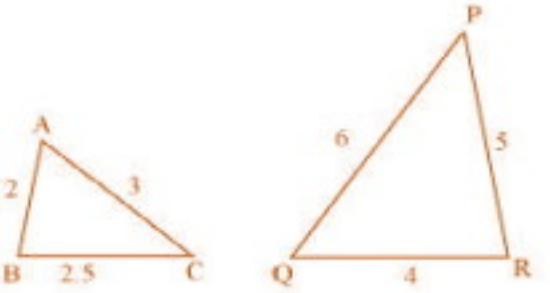
प्रश्न 1:

बताइए कि आकृति में दिए त्रिभुजों में युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं। उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए।

(i)

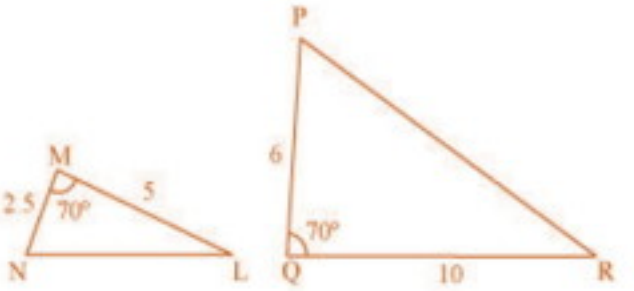


(ii)

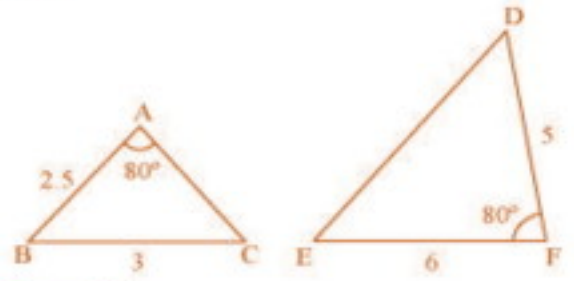


(iii)

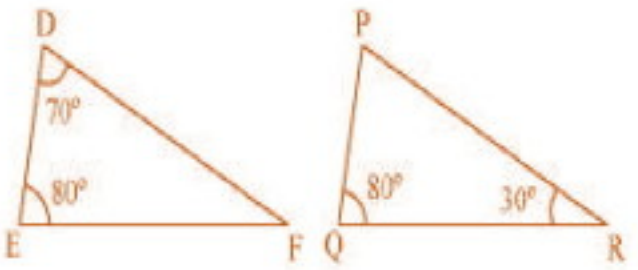
(iv)



(v)



(vi)



उत्तर 1:

(i) $\angle A = \angle P = 60°$, $\angle B = \angle Q = 80°$, $\angle C = \angle R = 40°$

इसलिए, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ [AAA समरूपता कसौटी से]

(ii) $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{CA}{PQ}$,

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta QRP$ [SSS समरूपता कसौटी से]

(iii) त्रिभुज समरूप नहीं हैं क्योंकि संगत भुजाएँ समानुपाती नहीं हैं।

(iv) त्रिभुज समरूप नहीं हैं क्योंकि संगत भुजाएँ समानुपाती नहीं हैं।

(v) त्रिभुज समरूप नहीं हैं क्योंकि संगत भुजाएँ समानुपाती नहीं हैं।

(vi) ΔDEF में,

$\angle D + \angle E + \angle F = 180°$ $\Rightarrow 70° + 80° + \angle F = 180$ $\Rightarrow \angle F = 30°$

इसीप्रकार, ΔPQR में,

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$ $\Rightarrow \angle P + 80° + 30° = 180°$ $\Rightarrow \angle P = 70°$

ΔDEF और ΔPQR में,

$\angle D = \angle P$ [प्रत्येक 70°]

$\angle E = \angle Q$ [प्रत्येक 80°]

$\angle F = \angle R$ [प्रत्येक 30°]

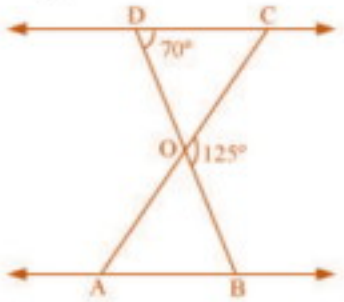
$\therefore \Delta DEF \sim \Delta PQR$ [AAA समरूपता कसौटी से]

गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ - 6) (त्रिभुज)
(कक्षा 10)

प्रश्न 2:

आकृति में, ΔODC ~ ΔOBA, ∠BOC = 125° और ∠CDO = 70° है। ∠DOC, ∠DCO और ∠OAB ज्ञात कीजिए।

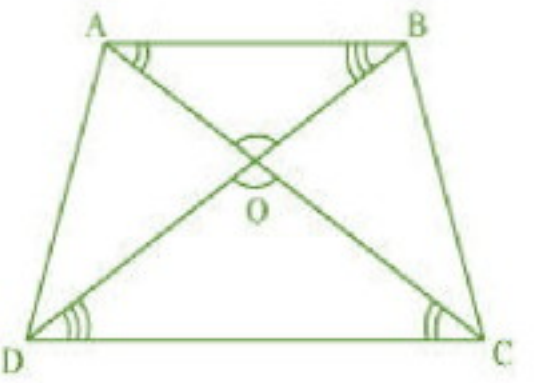


उत्तर 2:

DOB एक सरल रेखा है।
∴ ∠DOC + ∠COB = 180°
⇒ ∠DOC = 180° − 125° = 55°
ΔDOC में, ∠DCO + ∠CDO + ∠DOC = 180°
⇒ ∠DCO + 70° + 55° = 180° ⇒ ∠DCO = 55°
दिया है, ΔODC ~ ΔOBA.
∴ ∠OAB = ∠ OCD [समरूप त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होते हैं]
⇒ ∠OAB = 55°

प्रश्न 3:

समलंब ABCD, जिसमें AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।

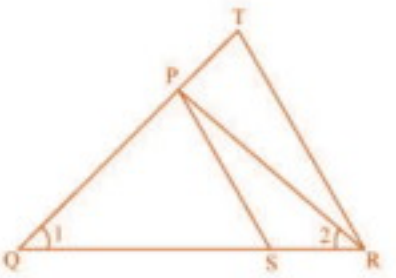


उत्तर 3:

ΔDOC और ΔBOA में,
∠DOC = ∠BOA [शीर्षाभिमुख कोण]
∠CDO = ∠ABO [एकांतर कोण]
∠DCO = ∠BAO [एकांतर कोण]
∴ ΔDOC ~ ΔBOA [AAA समरूपता कसौटी से]
$\frac{DO}{BO} = \frac{CO}{AO} \Rightarrow \frac{BO}{DO} = \frac{AO}{CO}$

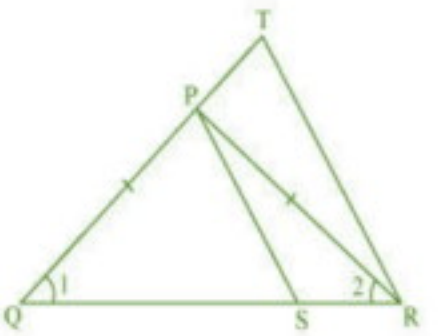
प्रश्न 4:

आकृति में, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा ∠1 = ∠2 है। दर्शाइए कि ΔPQS ~ ΔTQR है।



उत्तर 4:

ΔPQR में, ∠PQR = ∠PRQ
∴ PQ = PR ... (1)
दिया है,
$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$
$\Rightarrow \frac{QR}{QS} = \frac{QT}{QP}$ [समीकरण (1) से] ... (2)
ΔPQS और ΔTQR में,
$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{QP}$ [समीकरण (2) से]
∠Q = ∠Q [उभयनिष्ठ]
∴ ΔPQS ~ ΔTQR [SAS समरूपता कसौटी से]

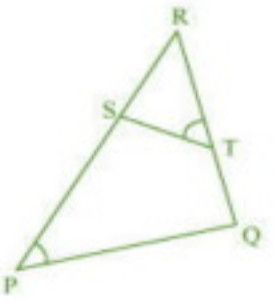


गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ - 6) (त्रिभुज)
(कक्षा 10)

प्रश्न 5:

ΔPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि ∠P = ∠RTS है। दर्शाइए कि ΔRPQ ~ ΔRTS है।



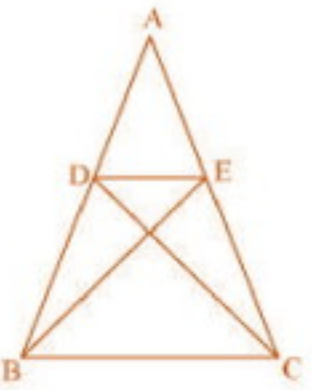
उत्तर 5:

ΔRPQ और ΔRST में,

∠RTS = ∠QPS	[दिया है]
∠R = ∠R	[उभयनिष्ठ]
∴ ΔRPQ ~ ΔRTS	[AA समरूपता कसौटी से]

प्रश्न 6:

आकृति में, यदि ΔABE ≅ ΔACD हैं कि है, तो दर्शाइए कि ΔADE ~ ΔABC है।



उत्तर 6:

दिया है, ΔABE ≅ ΔACD.

∴ AB = AC	[सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ]	... (1)
और, AD = AE	[सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ]	... (2)

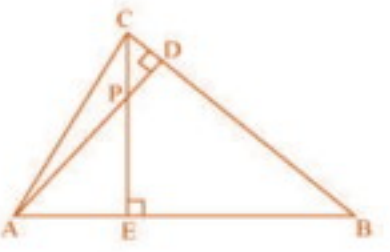
ΔADE और ΔABC में,

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$	[समीकरण (1) और (2) से]
∠A = ∠A	[उभयनिष्ठ]
∴ ΔADE ~ ΔABC	[SAS समरूपता कसौटी से]

प्रश्न 7:

आकृति में, ΔABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि:

(i) ΔAEP ~ ΔCDP
(ii) ΔABD ~ ΔCBE
(iii) ΔAEP ~ ΔADB
(iv) ΔPDC ~ ΔBEC

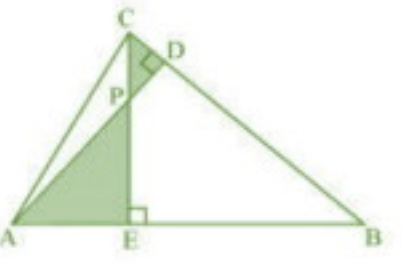


उत्तर 7:

(i)

ΔAEP और ΔCDP में,

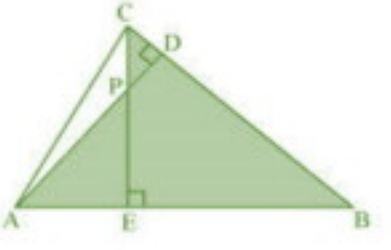
∠APE = ∠CPD	[शीर्षाभिमुख कोण]
∠AEP = ∠CDP	[प्रत्येक 90°]
∴ ΔAEP ~ ΔCDP	[AA समरूपता कसौटी से]



(ii)

ΔABD और ΔCBE में,

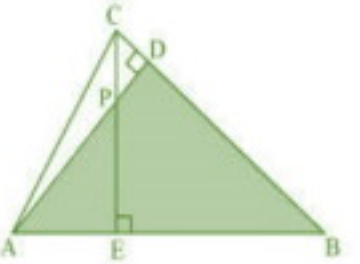
∠ADB = ∠CEB	[प्रत्येक 90°]
∠ABD = ∠CBE	[उभयनिष्ठ]
∴ ΔABD ~ ΔCBE	[AA समरूपता कसौटी से]



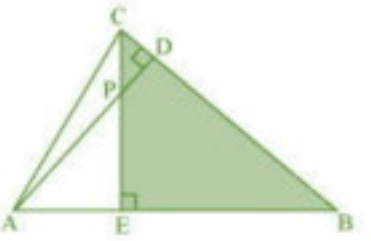
(iii)

ΔAEP और ΔADB में,

∠AEP = ∠ADB	[प्रत्येक 90°]
∠PAE = ∠DAB	[उभयनिष्ठ]
∴ ΔAEP ~ ΔADB	[AA समरूपता कसौटी से]



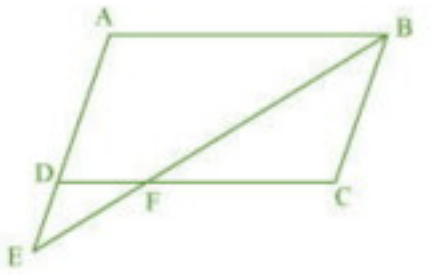
(iv)



ΔPDC और ΔBEC में,
∠PDC = ∠BEC [प्रत्येक 90°]
∠PCD = ∠BCE [उभयनिष्ठ]
∴ ΔPDC ~ ΔBEC [AA समरूपता कसौटी से]

प्रश्न 8:

समांतर चतुर्भुज ABCD की बड़ाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि ΔABE ~ ΔCFB है।

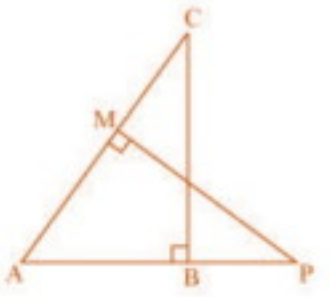


उत्तर 8:

ΔABE और ΔCFB में,
∠A = ∠C [समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]
∠AEB = ∠CBF [एकांतर कोण, क्योंकि AE || BC]
∴ ΔABE ~ ΔCFB [AA समरूपता कसौटी से]

प्रश्न 9:

आकृति में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं।
सिद्ध कीजिए कि:
(i) ΔABC ~ ΔAMP
(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$



उत्तर 9:

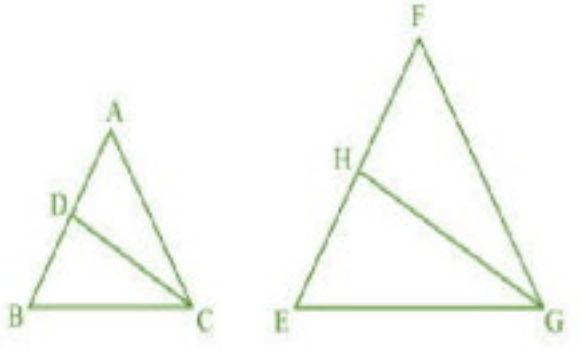
(i) ΔABC और ΔAMP में,
∠ABC = ∠AMP [प्रत्येक 90°]
∠A = ∠A [उभयनिष्ठ]
∴ ΔABC ~ ΔAMP [AA समरूपता कसौटी से]
(ii) ΔABC ~ ΔAMP [ऊपर सिद्ध किया गया है]
$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ [समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ]

प्रश्न 10:

CD और GH क्रमशः ∠ACB और ∠EGF के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः ΔABC और ΔFEG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं। यदि ΔABC ~ ΔFEG है, तो दर्शाइए कि:
(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$
(ii) ΔDCB ~ ΔHGE
(iii) ΔDCA ~ ΔHGF

उत्तर 10:

(i) दिया है, ΔABC ~ ΔFEG
∴ ∠A = ∠F, ∠B = ∠E और ∠ACB = ∠FGE, ∠ACB = ∠FGE
∴ ∠ACD = ∠FGH [CD और GH समान कोणों के कोण समद्विभाजक हैं]
और, ∠DCB = ∠HGE [CD और GH समान कोणों के कोण समद्विभाजक हैं]
ΔACD और ΔFGH में,
∠A = ∠F, और ∠ACD = ∠FGH [ऊपर सिद्ध किया गया है]
∴ ΔACD ~ ΔFGH [AA समरूपता कसौटी से]
$\Rightarrow \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$



(ii) ΔDCB और ΔHGE में,

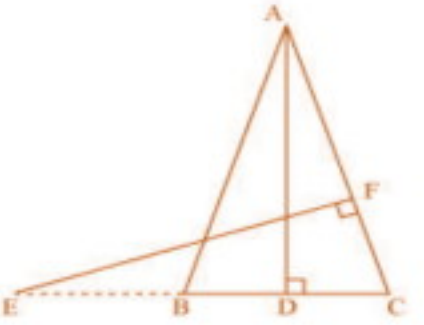
∠DCB = ∠HGE	[ऊपर सिद्ध किया गया है]
∠B = ∠E	[ऊपर सिद्ध किया गया है]
∴ ΔDCB ~ ΔHGE	[AA समरूपता कसौटी से]

(iii) ΔDCA और ΔHGF में,

∠ACD = ∠FGH	[ऊपर सिद्ध किया गया है]
∠A = ∠F	[ऊपर सिद्ध किया गया है]
∴ ΔDCA ~ ΔHGF	[AA समरूपता कसौटी से]

प्रश्न 11:

आकृति में, AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिंदु है। यदि AD⊥BC और EF⊥AC है तो सिद्ध कीजिए कि ΔABD ~ ΔECF है।



उत्तर 11:

दिया है, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

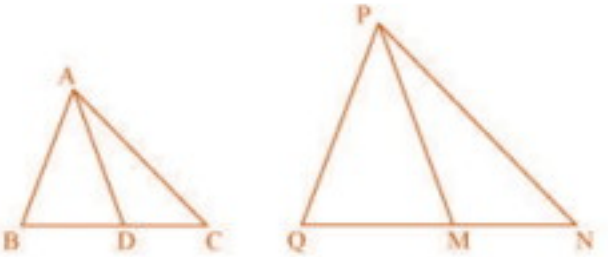
∴ AB = AC ⇒ ∠ABD = ∠ECF

ΔABD और ΔECF में,

∠ADB = ∠EFC	[प्रत्येक 90°]
∠ABD = ∠ECF	[ऊपर सिद्ध किया गया है]
∴ ΔABD ~ ΔECF	[AA समरूपता कसौटी से]

प्रश्न 12:

एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और BC तथा मध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा मध्यिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति) । दर्शाइए कि ΔABC ~ ΔPQR है।



उत्तर 12:

AD और PM त्रिभुज की माध्यिकाएँ हैं। इसलिए

BD = BC/2 और QM = QR/2

दिया है,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{AD}{PM}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$$

ΔABD और ΔPQM में,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$	[ऊपर सिद्ध किया गया है]
∴ ΔABD ~ ΔPQM	[SSS समरूपता कसौटी से]
⇒ ∠ABD = ∠PQM	[समरूप त्रिभुजों के संगत कोण]

ΔABC और ΔPQR में,

∠ABD = ∠PQM	[ऊपर सिद्ध किया गया है]
$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$	
∴ ΔABC ~ ΔPQR	[SAS समरूपता कसौटी से]

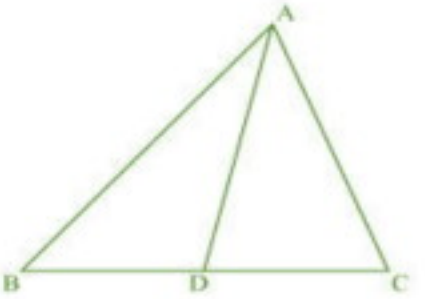
गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ - 6) (त्रिभुज)
(कक्षा 10)

प्रश्न 13:

एक त्रिभुज की भुजा पर बिंदु इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है। दर्शाइए कि $CA^2 = CB.CD$ है।

उत्तर 13:



ΔADC और ΔBAC में,

$\angle ADC = \angle BAC$ [दिया है]

$\angle ACD = \angle BCA$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore \Delta ADC \sim \Delta BAC$ [AA समरूपता कसौटी से]

हम जानते हैं कि समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं। इसलिए

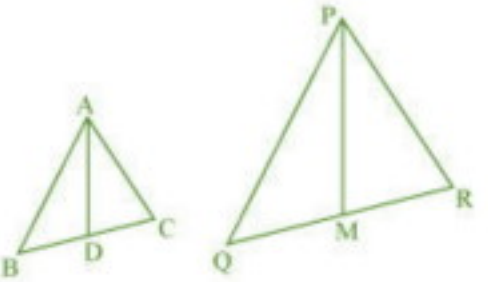
$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$$

$$\Rightarrow CA^2 = CB \times CD$$

प्रश्न 14:

एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं। दर्शाइए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।

उत्तर 14:



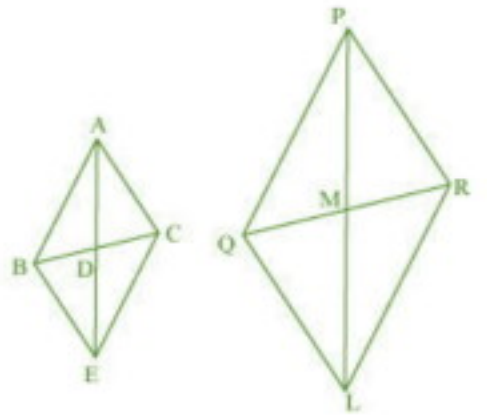
दिया है,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$$

AD और PM को क्रमशः बिंदु E और L तक इस प्रकार बढ़ाया ताकि AD = DE तथा PM = DE हो। B को E से, C को E से, Q को L से और R को L से मिलाया।

AD और PM त्रिभुज की माध्यिकाएँ हैं। इसलिए

BD = DC और QM = MR



तथा, AD = DE [रचना से]

और, PM = ML [रचना से]

चतुर्भुज ABEC में, विकर्ण AE और BC एक दूसरे को बिंदु D पर समद्विभाजित करते हैं। अतः ABEC एक समांतर चतुर्भुज है।

इसीप्रकार, PQLR भी एक समांतर चतुर्भुज है।

$\therefore$ AC = BE और AB = EC तथा PR = QL और PQ = LR

दिया है,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM} \quad \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BE}{QL} = \frac{2AD}{2PM} \quad \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BE}{QL} = \frac{AE}{PL}$$

$\therefore \Delta ABE \sim \Delta PQL$ [SSS समरूपता कसौटी से]

हम जानते हैं कि समरूप त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होते हैं।

$\therefore \angle BAE = \angle QPL$ ... (1)

इसीप्रकार $\Delta AEC \sim \Delta PLR$ और

$\angle CAE = \angle RPL$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$\angle BAE + \angle CAE = \angle QPL + \angle RPL$

$\Rightarrow \angle CAB = \angle RPQ$ ... (3)

ΔABC और ΔPQR में,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ [दिया है]

$\angle CAB = \angle RPQ$ [समीकरण (3) से]

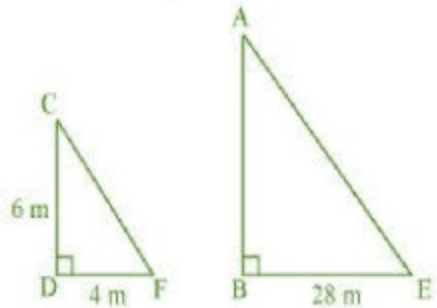
$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ [SAS समरूपता कसौटी से]

प्रश्न 15:

लंबाई 6 m वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लंबाई 4 m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28 m है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर 15:

माना CD स्तंभ है और AB मीनार है। अतः DF स्तंभ की छाया है और BE मीनार की छाया है।



ΔABE और ΔCDF में,

$\angle DCF = \angle BAE$ [एक ही समय पर सूर्य का कोण]

$\angle CDF = \angle ABE$ [प्रत्येक 90°]

$\therefore \Delta ABE \sim \Delta CDF$ [AA समरूपता कसौटी से]

$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{QL}$

$\Rightarrow \frac{AB}{6} = \frac{28}{4}$

$\Rightarrow AB = 42\ m$

इसलिए, मीनार की ऊँचाई 42 m है।

प्रश्न 16:

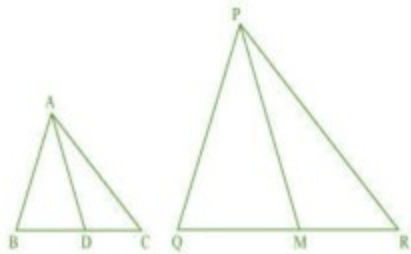
AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएँ हैं, जबकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है।

उत्तर 16:

दिया है, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

हम जानते हैं कि समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं। इसलिए

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ ... (1)



तथा,

$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ ... (2)

AD और PM त्रिभुज की माध्यिकाएँ हैं। इसलिए

$BD = BC/2$ और $QM = QR/2$ ... (3)

समीकरण (1) और (3) से

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ ... (4)

ΔABD और ΔPQM में,

$\angle B = \angle Q$ [समीकरण (2) से]

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ [समीकरण (4) से]

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta PQM$ [SAS समरूपता कसौटी से]

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$