गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 5) (समांतर श्रेढ़ी)

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 5.4 (ऐच्छिक)*

प्रश्न 1:
A.P.: 121, 117, 113, ..., का कौन-सा सबसे पहला ऋणात्मक पद होगा?
[**संकेत**: $a_n < 0$ के लिए n ज्ञात कीजिए]

उत्तर 1:
यहाँ, $a = 121$ तथा $d = 117 - 121 = -4$ है,
माना, A.P. का nवाँ पद पहला ऋणात्मक पद है।
$\Rightarrow a_n < 0$
$\Rightarrow a + (n-1)d < 0$
$\Rightarrow 121 + (n-1)(-4) < 0$
$\Rightarrow 121 - 4n + 4 < 0$
$\Rightarrow 125 < 4n$
$\Rightarrow n > \frac{125}{4}$
$\Rightarrow n > 31.25$
$\Rightarrow n = 32$
अतः, इस A.P. का 32वाँ पद सबसे पहला ऋणात्मक पद होगा।

प्रश्न 2:
किसी A.P. के तीसरे और सातवें पदों का योग 6 है और उनका गुणनफल 8 है। इस A.P. के प्रथम 16 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर 2:
माना, इस A.P. का पहला पद $= a$ तथा सार्व अंतर $= d$
A.P. के तीसरे और सातवें पदों का योग 6 है, इसलिए
$a_3 + a_7 = 6$
$\Rightarrow a + 2d + a + 6d = 6$
$\Rightarrow 2a + 8d = 6$
$\Rightarrow a + 4d = 3$
$\Rightarrow a = 3 - 4d$ ... (1)
A.P. के तीसरे और सातवें पदों का गुणनफल 8 है। इसलिए
$(a_3)(a_7) = 8$
$\Rightarrow (a + 2d)(a + 6d) = 8$
समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$(3 - 2d)(3 + 2d) = 8$
$\Rightarrow 3^2 - 4d^2 = 8$
$\Rightarrow 4d^2 = 1$
$\Rightarrow d = \pm\frac{1}{2}$
यदि, $d = \frac{1}{2}$, समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$a = 3 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
इस A.P. के प्रथम 16 पदों का योग
$S_{16} = \frac{16}{2}[2a + (16-1)d] = 8\left[2(1) + 15\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 76$

यदि, $d = -\frac{1}{2}$, समीकरण (1) में d का मान रखने पर

$a = 3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$

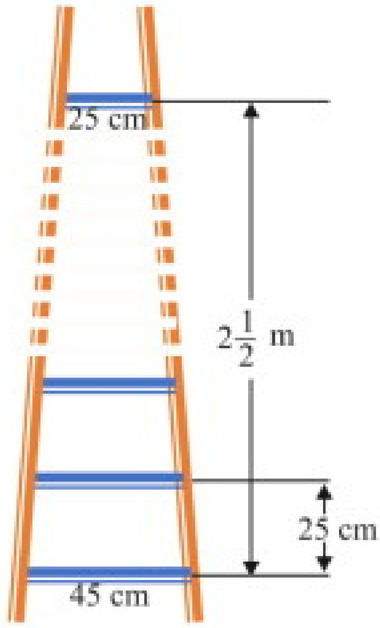
इस A.P. के प्रथम 16 पदों का योग

$S_{16} = \frac{16}{2}[2a + (16-1)d] = 8\left[2(5) + 15\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 20$

अतः, इस A.P. के प्रथम 16 पदों का योग 20 या 76 होगा।

प्रश्न 3:

एक सीढ़ी के क्रमागत डंडे परस्पर 25 cm की दूरी पर हैं (देखिए आकृति)। डंडे की लंबाई एक समान रूप से घटती जाती है तथा सबसे निचले डंडे की लंबाई 45 cm है और सबसे ऊपर वाले डंडे की लंबाई 25 cm है। यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दूरी $2\frac{1}{2}$ m है, तो डंडों को बनाने के लिए लकड़ी की कितनी लंबाई की आवश्यकता होगी?



[**संकेत**: डंडों की संख्या $= \frac{250}{25} + 1$ है।]

उत्तर 3:

यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दूरी $2\frac{1}{2}$ m है तथा क्रमागत डंडे परस्पर 25 cm की दूरी पर हैं। इसलिए,

डंडों की संख्या $= \frac{250}{25} + 1 = 11$

डंडों की लंबाई समांतर श्रेणी में 25 cm से 45 cm तक बढ़ रही है।

जिसमे पहला पद $a = 25$ तथा अंतिम पद $a_{11} = 45$ है। माना, इस A.P. का सार्व अंतर d हैं।

इसलिए, $a_{11} = 45$

$\Rightarrow a + (11-1)d = 45$

$\Rightarrow 25 + 10d = 45$

$\Rightarrow d = \frac{20}{10} = 2$

डंडों को बनाने के लिए लकड़ी की लंबाई $= S_{11}$

$= \frac{11}{2}[2a + (11-1)d] = \frac{11}{2}[2(25) + 10(2)] = 11 \times 35 = 385\ cm$

अतः, डंडों को बनाने के लिए लकड़ी की 385 cm लंबाई की आवश्यकता होगी।

प्रश्न 4:

एक पंक्ति के मकानों को क्रमागत रूप से संख्या 1 से 49 तक अंकित किया गया है। दर्शाइए कि x का एक ऐसा मान है कि x से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओ का योग उसके बाद वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है। x का मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत**: $S_{x-1} = S_{49} - S_x$ है।]

उत्तर 4:

यहाँ, $a = 1$ तथा $d = 1$ है,

A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

x से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओ का योग उसके बाद वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है। इसलिए,

$S_{x-1} = S_{49} - S_x$

$\Rightarrow \frac{x-1}{2}[2a + (x-1-1)d] = \frac{49}{2}[2a + (49-1)d] - \frac{x}{2}[2a + (x-1)d]$

$\Rightarrow \frac{x-1}{2}[2(1) + (x-2)(1)] = \frac{49}{2}[2(1) + 48(1)] - \frac{x}{2}[2(1) + (x-1)(1)]$

$\Rightarrow (x-1)[x] = 49[50] - x[x+1]$

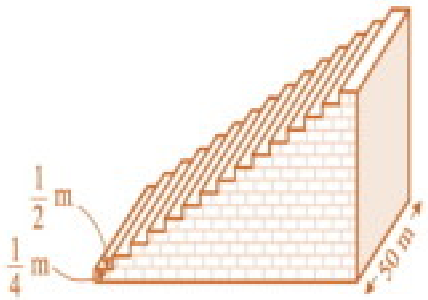
$\Rightarrow x^2 - x = 2450 - x^2 - x$

$\Rightarrow 2x^2 = 2450 \quad \Rightarrow x^2 = 1225 \quad \Rightarrow x = 35$

अतः, x का मान 35 है।

प्रश्न 5:

एक फुटबाल के मैदान में एक छोटा चबूतरा है जिसमें 15 सीढ़ियाँ बनी हुई हैं। इन सीढ़ियों में से प्रत्येक की लंबाई 50 m है और वह ठोस कंक्रीट (concrete) की बनी है। प्रत्येक सीढ़ी में $\frac{1}{4}m$ की चढ़ाई है और $\frac{1}{2}m$ का फैलाव (चौड़ाई) है। (देखिए आकृति)। इस चबूतरे को बनाने में लगी कंक्रीट का कुल आयतन परिकलित कीजिए।



[**संकेत**: पहली सीढ़ी को बनाने में कंक्रीट का आयतन $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50\ m^3$ है।]

उत्तर 5:

पहली सीढ़ी को बनाने में कंक्रीट का आयतन $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 = \frac{1}{4} \times 25\ m^3$

दूसरी सीढ़ी को बनाने में कंक्रीट का आयतन $= \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 = \frac{2}{4} \times 25\ m^3$

तीसरी सीढ़ी को बनाने में कंक्रीट का आयतन $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 = \frac{3}{4} \times 25\ m^3$

सीढ़ियों का आयतन समांतर श्रेणी में बढ़ रहा है। जिसमे पहला पद $a = \frac{1}{4} \times 25$ तथा अंतिम पद $a_{15} = \frac{15}{4} \times 25$ है। इस A.P. का सार्व अंतर $d = \frac{2}{4} \times 25 - \frac{1}{4} \times 25 = \frac{1}{4} \times 25$ हैं। इसलिए,
इस चबूतरे को बनाने में लगी कंक्रीट का कुल आयतन = S_{15}

$= \frac{15}{2}\left[2\left(\frac{1}{4} \times 25\right) + (15-1)\left(\frac{1}{4} \times 25\right)\right]$

$= \frac{15}{2}\left[\frac{25}{2} + \frac{175}{2}\right] = \frac{15}{2} \times \frac{200}{2} = 750\ m^3$

अतः, इस चबूतरे को बनाने में लगी कंक्रीट का कुल आयतन 750 m^3 है।